УДК 517.9

Аппроксимации модели Гольдштика

© **Д. К. Потапов**[1]

Аннотация. В данной работе рассматриваются непрерывные аппроксимации задачи Гольдштика отрывных течений несжимаемой жидкости. Аппроксимирующая задача получается из исходной малыми возмущениями спектрального параметра (завихренности) и непрерывными по фазовой переменной аппроксимациями разрывной нелинейности. При определенных условиях вариационным методом устанавливается сходимость решений аппроксимирующих задач к решениям исходной задачи. В работе также рассматривается модификация одномерного аналога математической модели Гольдштика. Модель представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение с граничным условием. Нелинейность в уравнении непрерывная и зависит от малого параметра. В пределе, при стремлении параметра к нулю, получается разрывная нелинейность. Результаты о решениях согласуются с результатами, полученными для одномерного аналога модели Гольдштика.

Ключевые слова: модель Гольдштика, отрывные течения, нелинейное дифференциальное уравнение, разрывная нелинейность, непрерывная аппроксимация.

1. Введение

В работах [1], [2] рассматривалась математическая модель отрывных течений несжимаемой жидкости М.А. Гольдштика, в работе [3] – непрерывная аппроксимация плоской задачи Гольдштика, а в работе [4] – непрерывная аппроксимация модификации одномерного аналога модели Гольдштика. Данная статья представляет собой объединение результатов работ [3], [4].

Аппроксимации краевых задач эллиптического типа со спектральным параметром и разрывной по фазовой переменной нелинейностью рассматривались в работах [5]–[7]. Аппроксимирующая задача получалась из исходной возмущением спектрального параметра и аппроксимацией нелинейности каратеодориевыми функциями. Вариационным методом доказаны теоремы о сходимости решений аппроксимирующих задач эллиптического типа со спектральным параметром и непрерывной нелинейностью к решениям предельной задачи с разрывной нелинейностью. В работе [5] предполагалось, что дифференциальная часть вместе с граничным условием порождает коэрцитивный оператор, в работе [6] рассматривались резонансные эллиптические краевые задачи со спектральным параметром и разрывной нелинейностью, а в работе [7] – однопараметрическое семейство задач Дирихле для уравнения эллиптического типа высокого порядка с разрывной нелинейностью. Изучался вопрос близости решений аппроксимирующей и исходной задач. Аппроксимация задачи с разрывной нелинейностью последовательностью задач с непрерывной нелинейностью для оператора Лапласа на конкретных примерах склейки вихревых и потенциальных течений рассматривалась ранее в работах И.И. Вайнштейна. На актуальность данной тематики и необходимость исследований в этом направлении указано также в работе М.А. Красносельского и А.В. Покровского [8].

[1]Доцент кафедры высшей математики, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург; potapov@apmath.spbu.ru.

2. Постановка задачи

Математическая постановка плоской задачи Гольдштика состоит в определении непрерывно-дифференцируемой функции тока ψ, удовлетворяющей уравнению

$$\Delta\psi = \begin{cases} \omega, & \text{если } \psi < 0, \\ 0, & \text{если } \psi \geq 0, \end{cases}$$

и краевому условию

$$\psi|_\Gamma = \varphi(s),$$

где Δ – оператор Лапласа, ω – завихренность, Γ – кусочно-гладкий контур плоской ограниченной области Ω, φ – непрерывная неотрицательная и отличная от нуля лишь на части контура функция.

Аппроксимирующая задача имеет вид

$$\Delta\psi = \begin{cases} \omega_k, & \text{если } \psi < -\varepsilon, \\ -\frac{\omega_k}{\varepsilon}\psi, & \text{если } -\varepsilon \leq \psi \leq 0, \\ 0, & \text{если } \psi \geq 0, \end{cases}$$

$$\psi|_\Gamma = \varphi(s),$$

$\omega_k > 0$, $\varepsilon > 0$. Аппроксимирующая задача представляет собой нелинейное эллиптическое дифференциальное уравнение с краевым условием. Нелинейность в уравнении непрерывная и зависит от малого параметра. В пределе, при стремлении параметра к нулю, получается разрывная нелинейность. Отметим, что разрывные нелинейности довольно часто возникают как идеализации непрерывных нелинейностей, имеющих участки быстрого роста по фазовой переменной. При этом удобно считать, что непрерывные нелинейности зависят от малого параметра ε и в пределе при $\varepsilon \to 0$ получается разрывная нелинейность. В силу результатов работ [5]–[7] аппроксиматором при $\psi \in [-\varepsilon, 0]$ может быть любая непрерывная на этом отрезке функция $f = f(\psi)$, удовлетворяющая условиям $f(-\varepsilon) = \omega_k$, $f(0) = 0$.

Функция ψ_0 удовлетворяет задаче

$$\begin{cases} \Delta\psi_0 = 0, \\ \psi_0|_\Gamma = \varphi(s). \end{cases}$$

Из принципа максимума следует, что функция $\psi_0(x)$ положительна в области Ω. Сделав замену $u = \psi - \psi_0$, приходим к следующей задаче:

$$\Delta u = \begin{cases} \omega, & \text{если } u < -\psi_0(x), \\ 0, & \text{если } u \geq -\psi_0(x), \end{cases}$$

$$u|_\Gamma = 0.$$

Имеем

$$-\Delta u = \omega g(x, u(x)), \tag{2.1}$$

$$u|_\Gamma = 0, \tag{2.2}$$

где

$$g(x,u) = \begin{cases} -1, & \text{если } u < -\psi_0(x), \\ 0, & \text{если } u \geq -\psi_0(x). \end{cases}$$

Краевой задаче (2.1)–(2.2) сопоставим функционал $J^\omega(u)$, заданный на $\mathbf{H}^1_\circ(\Omega)$, следующим образом:

$$J^\omega(u) = J_1(u) - \omega \int\limits_\Omega dx \int\limits_0^{u(x)} g(x,s)ds,$$

где

$$J_1(u) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int\limits_\Omega u_{x_i}^2 dx = \frac{1}{2}\left(\int\limits_\Omega (u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2)dx\right).$$

В работе [2] доказано, что существует $\omega_0 > 0$ такое, что для любого $\omega > \omega_0$ $\inf\limits_{v\in\mathbf{H}^1_\circ(\Omega)} J^\omega(v) < 0$, найдется $u \in \mathbf{H}^1_\circ(\Omega)$ такое, что $J^\omega(u) = \inf\limits_{v\in\mathbf{H}^1_\circ(\Omega)} J^\omega(v)$ и любое такое u является ненулевым полуправильным решением краевой задачи (2.1)–(2.2). Таким образом, при ω, превышающих некоторое значение, задача имеет, по крайней мере, одно нетривиальное решение (в силу теорем вложения Соболева решение непрерывно-дифференцируемо). В силу [9] для величины бифуркационного параметра ω_0, начиная с которого задача на собственные значения (2.1)–(2.2) разрешима, справедлива следующая оценка сверху:

$$\omega_0 \le \inf_{\hat u\in U} \frac{J_1(\hat u)}{\int\limits_\Omega dx \int\limits_0^{\hat u(x)} g(x,s)ds},$$

где $U = \{\hat u \in \mathbf{H}^1_\circ(\Omega) : \int\limits_\Omega dx \int\limits_0^{\hat u(x)} g(x,s)ds > 0\}$.

Зафиксируем $\omega > \omega_0$ и пусть числовая последовательность (ω_k), $\omega_k > 0$, сходится к ω. Нелинейность $g(x,u)$ аппроксимируется последовательностью каратеодориевых функций $(g^k(x,u))$.

Имеем

$$-\Delta u = \omega_k g^k(x, u(x)), \quad x \in \Omega, \tag{2.3}$$

$$u|_\Gamma = 0, \tag{2.4}$$

где

$$g^k(x,u) = \begin{cases} -1, & \text{если } u < -\varepsilon - \psi_0(x), \\ \frac{1}{\varepsilon}(u + \psi_0(x)), & \text{если } -\varepsilon - \psi_0(x) \le u \le -\psi_0(x), \\ 0, & \text{если } u \ge -\psi_0(x). \end{cases}$$

В случае модификации одномерного аналога модели Гольдштика требуется найти дважды непрерывно-дифференцируемую функцию ψ, удовлетворяющую уравнению

$$\psi'' = \begin{cases} \omega, & \text{если } \psi < -\varepsilon, \\ -\frac{\omega}{\varepsilon}\psi, & \text{если } -\varepsilon \le \psi \le 0, \\ 0, & \text{если } \psi \ge 0, \end{cases}$$

и граничным условиям $\psi(0) = 1$, $\psi(1) = 0$, $\omega > 0$, $\varepsilon > 0$. Модель представляет собой нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение с граничным условием. Нелинейность в уравнении непрерывная и зависит от малого параметра ε, в пределе при $\varepsilon \to 0$ получается разрывная нелинейность. Данная статья посвящена построению регуляризации краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка в случае, когда свободный член есть разрывная функция типа Хевисайда. В данной работе результаты работ [5]–[7] переносятся на обыкновенные дифференциальные уравнения, конкретную задачу с разрывами – одномерный аналог модели Гольдштика. Отметим, что в силу [5]–[7] аппроксиматором вместо $-\frac{\omega}{\varepsilon}\psi$ при $-\varepsilon \le \psi \le 0$ может быть также любая функция $f = f(\psi)$, непрерывная на отрезке $[-\varepsilon, 0]$ и удовлетворяющая условиям $f(-\varepsilon) = \omega$, $f(0) = 0$.

3. Решение задачи

В работе [3] для плоской задачи Гольдштика показано, что выполнены все условия теоремы 1 из работы [5]. Поэтому последовательность (u_k) решений аппроксимирующих задач (2.3)–(2.4) является минимизирующей последовательностью для функционала J^ω на $\mathbf{H}^1_\circ(\Omega)$, содержит подпоследовательность (u_{k_l}), сходящуюся в $\mathbf{C}_1(\overline{\Omega})$ к полуправильному решению u_0 предельной задачи (2.1)–(2.2), для которого

$$J^\omega(u_0) = \inf_{v\in \mathbf{H}^1_\circ(\Omega)} J^\omega(v) =$$

$$\inf_{v\in \mathbf{H}^1_\circ(\Omega)} \left(\frac{1}{2}\int\limits_\Omega (v_{x_1}^2 + v_{x_2}^2)dx - \omega \int\limits_\Omega dx \int\limits_0^{v(x)} g(x,s)ds \right).$$

Если инфимум J^ω на $\mathbf{H}^1_\circ(\Omega)$ достигается в единственной точке u_0, то $u_k \to u_0$ в $\mathbf{C}_1(\overline{\Omega})$. Отметим, что согласно теореме 3 из работы [10] для любого $k \ge 2$ существует $u_k \in \mathbf{H}^1_\circ(\Omega)$ такое, что

$$J_k(u_k) = \inf_{v\in \mathbf{H}^1_\circ(\Omega)} J_k(v) = \inf_{v\in \mathbf{H}^1_\circ(\Omega)} \left(J_1(v) - \omega_k \int\limits_\Omega dx \int\limits_0^{v(x)} g^k(x,s)ds \right).$$

Причем любое такое $u_k \in \mathbf{W}^2_q(\Omega)$ и является сильным решением соответствующей аппроксимирующей краевой задачи.

В работе [4] для одномерного аналога модели Гольдштика показано, что при $\varepsilon \to 0$ все результаты о решениях (число решений, аналитические выражения норм решений и значений функционала, порождаемого задачей, на них) согласуются с результатами, полученными ранее в работе [2]. Действительно, из искомого уравнения имеем

$$\psi_1(x) = c_1 x + 1,$$

$$\psi_2(x) = c_2 \cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{\varepsilon}}x\right) + c_3 \sin\left(\sqrt{\frac{\omega}{\varepsilon}}x\right),$$

$$\psi_3(x) = \frac{\omega}{2}x^2 + c_4 x + c_5,$$

$$\psi_4(x) = c_6\left(\sin\left(\sqrt{\frac{\omega}{\varepsilon}}x\right) - \operatorname{tg}\left(\sqrt{\frac{\omega}{\varepsilon}}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{\varepsilon}}x\right)\right),$$

где $c_1, ..., c_6$ – произвольные постоянные. Учитывая условия непрерывности и дифференцируемости данных функций в точках x_0, x_1 и x_2 ($\psi_1(x_0) = \psi_2(x_0) = 0$, $\psi_2(x_1) = \psi_3(x_1) = -\varepsilon$, $\psi_3(x_2) = \psi_4(x_2) = -\varepsilon$), находим данные постоянные. При $\varepsilon \to 0$ имеем

$$\psi_1(x) \to -\frac{x}{x_0} + 1,$$

$$\psi_2(x) \to 0,$$

$$\psi_3(x) \to \frac{\omega}{2}(x-x_0)(x-1),$$
$$\psi_4(x) \to 0,$$

что согласуется с [2]:

$$\psi(x) = \begin{cases} -\frac{x}{x_0}+1, & \text{если} \;\; 0 \le x \le x_0 \\ \frac{\omega}{2}(x-x_0)(x-1), & \text{если} \;\; x_0 \le x \le 1 \end{cases}, \quad x_0 = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{8}{\omega}}.$$

Заменой $u = \psi + x - 1$ исходная задача преобразуется к виду

$$u'' = \begin{cases} \omega, & \text{если} \;\; u < -\varepsilon + x - 1, \\ \frac{\omega}{\varepsilon}(x-1-u(x)), & \text{если} \;\; -\varepsilon + x - 1 \le u \le x-1, \\ 0, & \text{если} \;\; u \ge x-1, \end{cases} \tag{3.1}$$

$$u(0) = u(1) = 0. \tag{3.2}$$

При $\varepsilon \to 0$ для любого $\omega > 0$ данная проблема имеет тривиальное решение, при $0 < \omega < 8$ других решений нет. Если $\omega \ge 8$, то, кроме тривиального, задача имеет еще два решения:

$$u_\pm(x) = \begin{cases} x(1-\frac{1}{x_0}), & \text{если} \;\; 0 \le x \le x_0, \\ \frac{\omega}{2}(x-x_0+\frac{2}{\omega})(x-1), & \text{если} \;\; x_0 \le x \le 1, \end{cases}$$

где $x_0 = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{8}{\omega}}$, которые при $\omega = 8$ совпадают (сливаются в одно). Функционал

$$J_\omega(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 u'^2 dx - \omega \int\limits_{\{x\in[0,1]:\, u(x)<x-1\}} (x-1-u(x))dx$$

для каждого $\omega > 0$ достигает инфимума на $\mathbf{H}^1_\circ$ в некоторой точке u_0, и любое такое u_0 является решением задачи (3.1)–(3.2) при $\varepsilon \to 0$ (для данного недифференцируемого функционала предельное уравнение является уравнением Эйлера). Норма в $\mathbf{H}^1_\circ$ имеет вид:

$$||u||_{\mathbf{H}^1_\circ} = \left(\int_0^1 u'^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Получены аналитические выражения норм решений в $\mathbf{H}^1_\circ$ для рассматриваемой задачи и значений функционала J_ω на них как функций параметров ω и ε. При $\varepsilon \to 0$ имеем

$$J_\omega(u_\pm) = \frac{1}{1 \pm \sqrt{1-8/\omega}} \pm \frac{\omega^2\sqrt{1-8/\omega}}{48} \mp \frac{\omega\sqrt{1-8/\omega}}{24} - \frac{\omega^2}{48} + \frac{\omega}{8} - \frac{1}{2}$$

и

$$||u_\pm||_{\mathbf{H}^1_\circ} = \sqrt{\frac{2}{1 \pm \sqrt{1-8/\omega}} \mp \frac{\omega^2\sqrt{1-8/\omega}}{24} \pm \frac{\omega\sqrt{1-8/\omega}}{12} + \frac{\omega^2}{24} - \frac{\omega}{4} - 1}.$$

Таким образом, найдены аналитические выражения для нормы собственных функций соответствующей краевой задачи и значение функционала, порождаемого этой задачей, на них в зависимости от собственного значения ω; исследован вопрос о числе решений в зависимости от значений спектрального параметра (число решений исчерпывается найденными тремя, т. е. нечетно).

Задача (3.1)–(3.2) преобразуется к виду

$$-u'' = \omega \begin{cases} -1, & \text{если } u < -\varepsilon + x - 1, \\ \frac{1}{\varepsilon}(u - x + 1), & \text{если } -\varepsilon + x - 1 \le u \le x - 1, \\ 0, & \text{если } u \ge x - 1, \end{cases} \tag{3.3}$$

$$u(0) = u(1) = 0. \tag{3.4}$$

Предельная задача имеет вид

$$-u'' = \omega g(x, u(x)), \tag{3.5}$$

$$u(0) = u(1) = 0, \tag{3.6}$$

где

$$g(x, u) = \begin{cases} -1, & \text{если } u < x - 1, \\ 0, & \text{если } u \ge x - 1. \end{cases}$$

В работе [4] показано, что для задачи (3.5)–(3.6) выполнены все условия теоремы 3 из работы [10]. Поэтому существует $\omega_0 > 0$ такое, что для любого $\omega > \omega_0$ $\inf\limits_{v \in \mathbf{H}^1_\circ} J_\omega(v) < 0$, и найдется $u \in \mathbf{H}^1_\circ$ такое, что

$$J_\omega(u) = \inf_{v \in \mathbf{H}^1_\circ} J_\omega(v). \tag{3.7}$$

Отметим, что для величины ω_0 справедлива следующая оценка сверху [9]:

$$\omega_0 \le \inf_{\hat{u} \in U} \frac{\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \hat{u}'^2 dx}{\int\limits_{\{x \in [0,1]:\, \hat{u}(x) < x-1\}} (x - 1 - \hat{u}(x)) dx},$$

где $U = \{\hat{u} \in \mathbf{H}^1_\circ : \int\limits_{\{x \in [0,1]:\, \hat{u}(x) < x-1\}} (x - 1 - \hat{u}(x)) dx > 0\}$. Кроме того, если u – точка разрыва функции $g(x, \cdot)$, то $-1 = g(x, u-) < g(x, u+) = 0$, т. е. функция $g(x, \cdot)$ имеет только прыгающие разрывы для почти всех $x \in [0, 1]$. Значит, любое u, удовлетворяющее (3.7), является ненулевым полуправильным решением задачи (3.5)–(3.6). Из теоремы 3 из работы [10] также следует, что существует $u_k \in \mathbf{H}^1_\circ$ такое, что $J_\omega(u_k) = \inf\limits_{v \in \mathbf{H}^1_\circ} J_\omega(v)$. Причем любое такое $u_k \in \mathbf{W}^2_q$ и является сильным решением соответствующей аппроксимирующей задачи (3.3)–(3.4).

Далее рассмотрим проблему близости решений аппроксимирующей задачи u_k к решениям предельной задачи (3.5)–(3.6). Аналогично [3] проверяется, что для одномерного аналога модели Гольдштика выполнены условия теоремы 1 из работы [5]. Поэтому последовательность (u_k) решений аппроксимирующих задач (3.3)–(3.4), построенная выше, является минимизирующей последовательностью для функционала J_ω на $\mathbf{H}^1_\circ$ и содержит подпоследовательность (u_{k_l}), сходящуюся в равномерной метрике $\mathbf{C}_1$ к полуправильному решению u_0 предельной задачи (3.5)–(3.6), для которого $J_\omega(u_0) = \inf\limits_{v \in \mathbf{H}^1_\circ} J_\omega(v)$. Если последний инфимум достигается в единственной точке u_0, то $u_k \to u_0$ в $\mathbf{C}_1$.

Таким образом, теоремы об уравнениях с разрывными нелинейностями иллюстрируются прикладной задачей. В задаче Гольдштика интерес представляет существование нетривиальных решений в зависимости от значения завихренности в области отрывных течений. Показано, что при значениях спектрального параметра – завихренности, превышающих некоторое значение, задача имеет, по крайней мере, одно нетривиальное решение, что согласуется с результатами данной работы (выше получено, что при $\omega > 8$ одномерный аналог модели Гольдштика имеет два ненулевых решения). Кроме того, изучена проблема близости решений аппроксимирующей и предельной задач. Показано, что если u_k – сильное решение аппроксимирующей задачи, доставляющее абсолютный минимум функционалу задачи, то последовательность (u_k) содержит подпоследовательность, сходящуюся в равномерной метрике к некоторому полуправильному решению предельной задачи, на котором функционал этой задачи достигает нижней грани на всем пространстве; если функционал предельной задачи достигает своей нижней грани на всем пространстве только в одной точке u_0, то $u_k \to u_0$ в равномерной метрике, что также согласуется с результатами данной работы (например, выше отмечалось, что при $0 < \omega < 8$ одномерный аналог модели Гольдштика имеет только нулевое решение и, следовательно, $\inf\limits_{v \in \mathbf{H}^1_\circ} J_\omega(v) = 0$).

Список литературы

1. Гольдштик М.А. Математическая модель отрывных течений несжимаемой жидкости // Докл. АН СССР. – 1962. – Т. 147. – № 6. – С. 1310-1313.

2. Потапов Д.К. Математическая модель отрывных течений несжимаемой жидкости // Изв. РАЕН. Сер. МММИУ. – 2004. – Т. 8. – № 3-4. – С. 163-170.

3. Потапов Д.К. Непрерывные аппроксимации задачи Гольдштика // Матем. заметки. – 2010. – Т. 87. – Вып. 2. – С. 262-266.

4. Потапов Д.К. Непрерывная аппроксимация одномерного аналога модели Гольдштика отрывных течений несжимаемой жидкости // Сиб. журн. вычисл. матем. – 2011. – Т. 14. – № 3. – С. 291-296.

5. Потапов Д.К. Устойчивость основных краевых задач эллиптического типа со спектральным параметром и разрывной нелинейностью в коэрцитивном случае // Изв. РАЕН. Сер. МММИУ. – 2005. – Т. 9. – № 1-2. – С. 159-165.

6. Павленко В.Н., Потапов Д.К. Аппроксимация краевых задач эллиптического типа со спектральным параметром и разрывной нелинейностью // Изв. вузов. Математика. – 2005. – № 4. – С. 49-55.

7. Потапов Д.К. Аппроксимация задачи Дирихле для уравнения эллиптического типа высокого порядка со спектральным параметром и разрывной нелинейностью // Дифференц. уравнения. – 2007. – Т. 43. – № 7. – С. 1002-1003.

8. Красносельский М.А., Покровский А.В. Уравнения с разрывными нелинейностями // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 248. – № 5. – С. 1056-1059.

9. Потапов Д.К. Об одной оценке сверху величины бифуркационного параметра в задачах на собственные значения для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями // Дифференц. уравнения. – 2008. – Т. 44. – № 5. – С. 715-716.

10. Павленко В.Н., Потапов Д.К. О существовании луча собственных значений для уравнений с разрывными операторами // Сиб. матем. журн. – 2001. – Т. 42. – № 4. – С. 911-919.

Approximations of Gol'dshtik's model

© **D. K. Potapov**[2]

Abstract. In this paper we consider continuous approximations of the Gol'dshtik problem for separated flows of incompressible fluid. An approximating problem is obtained from the initial problem by small perturbations of a spectral parameter (vorticity) and by the continuous approximations of discontinuous nonlinearity in the phase variable. Using a variational method under certain conditions, we prove the convergence of solutions of the approximating problems to the solutions of the initial problem. A modification for a one-dimensional analogue of the Gol'dshtik mathematical model is considered. The model is a nonlinear differential equation with a boundary condition. Nonlinearity in the equation is continuous and depends on a small parameter. We have a discontinuous nonlinearity, when this parameter tends to zero. The results of the solutions are in accord with the results obtained for the one-dimensional analogue of the Gol'dshtik model.

Key Words: Gol'dshtik model, separated flows, nonlinear differential equation, discontinuous nonlinearity, continuous approximation.

[2]Associate Professor of Higher Mathematics Chair, Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg; potapov@apmath.spbu.ru.