УДК 517.938

Полный топологический инвариант для диффеоморфизмов Морса-Смейла на 3-многообразиях

© **О.В. Починка**[1]

Аннотация. Настоящая статья посвящена топологической классификации множества $G(M^3)$ сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса-Смейла f, заданных на гладких замкнутых ориентируемых 3-многообразиях M^3. Полным топологическим инвариантом для диффеоморфизма $f \in G(M^3)$ является класс эквивалентности его схемы S_f, которая содержит информацию о периодических данных и топологии вложения в объемлющее многообразие двумерных инвариантных многообразий седловых периодических точек f. Кроме того, выделено множество абстрактных схем $\mathcal{S}$, имеющее представителя из каждого класса эквивалентности схем диффеоморфизмов из $G(M^3)$ и по каждой абстрактной схеме $S \in \mathcal{S}$ построен диффеоморфизм $f_S \in G(M^3)$, схема которого эквивалентна схеме S.

Ключевые слова: диффеоморфизм Морса-Смейла, топологическая классификация, пространство орбит.

Введение

Пусть M^n — гладкое замкнутое связное ориентируемое n-многообразие. Динамическая система на многообразии M^n называется *системой Морса-Смейла*, если:

1) ее неблуждающее множество гиперболично и состоит из конечного числа неподвижных точек и периодических орбит;

2) инвариантные многообразия неподвижных точек и периодических орбит пересекаются трансверсально.

Своим названием эти системы обязаны С. Смейлу [18], который в 1961 году, основываясь на работе Андронова и Понтрягина [1] 1937 года, выделил потоки со свойствами 1), 2), как естественное обобщение грубых потоков на поверхностях и доказал, что для них справедливы соотношения, подобные неравенствам Морса. Сегодня хорошо известно, что динамические системы Морса-Смейла на многообразиях любой размерности действительно являются структурно устойчивыми, но не являются типичными, за исключением потоков Морса-Смейла на поверхностях и систем Морса-Смейла на окружности. Однако, эти системы получили широкое распростанение в динамике в качестве простейших моделей грубых систем, к которым сводятся многочисленные задачи естественных наук.

Одним из первых вопросов, возникающих при изучении динамической системы является вопрос о поведении ее траекторий и возможности качественно (с точностью до топологической эквивалентности (сопряженности)) отличать это поведение от поведения траекторий другой системы. Решение этих задач составляет *топологическую классификацию* динамических систем и заключается в выделении некоторой, по-возможности минимальной, информации о системе, однозначно определяющей ее класс топологической эквивалентности (сопряженности) и называемой *полным топологическим инвариантом.* Неотъемлемой частью топологической классификации является построение по выделенной информации стандартного представителя в каждом классе топологической эквивалентности (сопряженности), называемое *реализацией динамической системы.* Возможность реализации позволяет моделировать системы с заданными свойствами. Приведем некоторые классификационные результаты для динамических систем Морса-Смейла.

[1]Доцент кафедры теории функций, Нижегородский Государственный Университет им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород; olga-pochinka@yandex.ru.

Класс эквивалентности потока Морса-Смейла на окружности однозначно определяется числом его неподвижных точек. Для каскадов на окружности полный топологический инвариант получен А.Г. Майером [14] в 1939 году и состоит из числа периодических орбит и числа вращения диффеоморфизма. В 1955 году Е.А. Леонтович и А.Г. Майер [13] в качестве полного топологического инварианта ввели схему потоков с конечным числом особых траекторий на двумерной сфере. В 1971 году М. Пейкшото [15] обобщил понятие схемы Леонтович-Майера и доказал, что для потоков на произвольных поверхностях полным топологическим инвариантом является класс изоморфности ориентируемого графа, вершины и ребра которого находятся во взаимно однозначном соответствии с особыми траекториями и сепаратрисами седловых особенностей, соответственно, а изоморфность графов включает в себя сохранение выделенных специальным образом подграфов. Графа, подобного графу Пейкшото и оснащенного некоторой дополнительной информацией, оказалось достаточно для описания полного топологического инварианта для диффеоморфизмов поверхностей с конечным числом гетероклинических орбит (А.Н. Безденежных, В.З. Гринес [2], [3], [4], [10]). Для потоков с конечным числом особых траекторий на 3-многообразиях (Я.Л. Уманский [19]) в качестве полного топологического инварианта вновь использовалась схема, подобная схеме Леонтович-Майера. Классификационные результаты на языке графов Пейкшото и диаграмм Смейла имеются и в размерности $n > 3$: для потоков на сфере $\mathbb{S}^n$, в предположении, что эти потоки не имеют замкнутых траекторий и гетероклинических пересечений (С.Ю. Пилюгин [16]); для диффеоморфизмов на M^n, все седловые точки которого имеют индекса Морса 1 (Гринес В.З., Гуревич Е.Я., Медведев В.С. [11], [12]).

Как стало ясно сравнительно недавно, никакая комбинаторная информация о диффеоморфизме на 3-многообразии не позволяет выделить класс его топологической сопряженности. Причиной столь неожиданного эффекта оказалась возможность “дикого” поведения сепаратрис седловых точек, при котором, сепаратриса, являясь гладким подмногообразием объемлющего многообразия, имеет замыкание, отличающееся от сепаратрисы всего одной точкой, но не являющееся даже топологическим подмногообразием. Впервые диффеоморфизм с дикими сепаратрисами был построен Д. Пикстоном в 1977 году [17]. Он использовал кривую Артина-Фокса для построения одномерной сепаратрисы седловой неподвижной точки. Диффеоморфизм Пикстона задан на трехмерной сфере и имеет неблуждающее множество, состоящее из четырех неподвижных точек: седла, одного источника и двух стоков. Из работы [5] следует, что в классе Пикстона существует счетное множество топологически несопряженных диффеоморфизмов (при этом, очевидно, что их графы Пейкшото изоморфны) и полным топологическим инвариантом является тип вложения сепаратрис. Эффективным инструментом, позволяющим различать эти вложения является переход к пространству орбит и рассмотрение класса эквивалентности естественной проекции сепаратрисы в это пространство. Именно этой идеей связаны все уже имеющиеся работы по топологической классификации диффеоморфизмов Морса-Смейла на 3-многообразиях в предположениях различной общности (Х. Бонатти, В.З. Гринес, В.С. Медведев, Е. Пеку, О.В. Починка [6]–[7]). Настоящая работа показывает, что такой подход позволяет полностью решить задачу топологической классификации произвольных диффеоморфизмов Морса-Смейла на 3-многообразиях. Кроме того, становится понятным, что структура пространства блуждающих орбит является необходимой информацией в топологическом инварианте, поскольку диффеоморфизм уже не определяется своим действием на особых траекториях (траекториях, принадлежащих инвариантным многообразиям периодических точек).

1. Необходимые и достаточные условия топологической сопряженности диффеоморфизмов класса $G(M^3)$

Обозначим через $G(M^3)$ класс сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса-Смейла f, заданных на гладких замкнутых ориентируемых 3-многообразиях M^3. Как уже было отмечено выше, замыкание инвариантного многообразия седловой точки диффеоморфизма $f \in G(M^3)$ может иметь сложную топологическую структуру. Это явление может иметь как чисто топологичекую, так и динамическую природу. Последний случай соответствует ситуации, когда сепаратриса седловой точки участвует в гетероклинических пересечениях. Напомним, что непустое пересечение $W^s_{\sigma_1} \cap W^u_{\sigma_2}$ инвариантных многообразий различных седловых точек σ_1, σ_2 называется *гетероклиническим*. При этом, компонента связности этого пересечения называется *гетероклинической кривой* в случае, когда $\dim\ W^s_{\sigma_1} = \dim\ W^u_{\sigma_2}$ и *гетероклинической точкой* в случае, когда $\dim\ W^s_{\sigma_1} \neq \dim\ W^u_{\sigma_2}$.

Представим динамику произвольного диффеоморфизма Морса-Смейла $f : M^3 \to M^3$ в виде "источник-сток" следующим образом. Для $q \in \{0, 1, 2, 3\}$ обозначим через Ω_q множество периодических точек диффеоморфизма f с индексом Морса q. Положим $A_f = \Omega_0 \cup W^u_{\Omega_1}$, $R_f = \Omega_3 \cup W^s_{\Omega_2}$ и $V_f = M^3 \setminus (A_f \cup R_f)$. Методом построения фильтрации доказывается, что множество A_f (R_f) является аттрактором (репеллером)[2] диффеоморфизма f. При этом, множество V_f состоит из блуждающих точек, которые под действием диффеоморфизма f (f^{-1}) движутся к аттрактору (репеллеру). Обозначим через $\hat{V}_f = V_f/f$ пространство орбит действия f на V_f и через $p_{_f} : V_f \to \hat{V}_f$ естественную проекцию. В силу выбора пространства V_f, естественная проекция $p_{_f}$ является накрытием и, согласно [9], пространство орбит $\hat{V}_f$ является простым многообразием[3]. При этом накрытие $p_{_f}$ индуцирует эпиморфизм $\eta_{_f} : \pi_1(\hat{V}_f) \to \mathbb{Z}$, ставящий в соответствие гомотопическому классу $[c] \in \pi_1(\hat{V}_f)$ целое число n такое, что поднятие кривой c на V_f соединяет точку x с точкой $f^n(x)$. Положим $\hat{\mathbb{W}}^s_f = p_{_f}(W^s_{\Omega_1} \setminus A_f)$ и $\hat{\mathbb{W}}^u_f = p_{_f}(W^u_{\Omega_2} \setminus R_f)$.

О п р е д е л е н и е 1.1. *Набор* $S_f = (\hat{V}_f, \eta_{_f}, \hat{\mathbb{W}}^s_f, \hat{\mathbb{W}}^u_f)$ *назовем схемой диффеоморфизма* $f \in G(M^3)$.

О п р е д е л е н и е 1.2. *Схемы* S_f *и* $S_{f'}$ *диффеоморфизмов* $f, f' \in G(M^3)$ *назовем эквивалентными, если существует гомеоморфизм* $\hat{\varphi} : \hat{V}_f \to \hat{V}_{f'}$ *со следующими свойствами:*

1) $\eta_{_f} = \eta_{_{f'}}\hat{\varphi}_*$;

2) $\hat{\varphi}(\hat{\mathbb{W}}^s_f) = \hat{\mathbb{W}}^s_{f'}$ *и* $\hat{\varphi}(\hat{\mathbb{W}}^u_f) = \hat{\mathbb{W}}^u_{f'}$.

Т е о р е м а 1.1. *Диффеоморфизмы Морса-Смейла* $f, f' \in G(M^3)$ *топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их схемы эквивалентны.*

Решение проблемы реализации основывается на двух принципиальных взаимосвязанных фактах, касающихся схемы S_f. Первый факт (лемма 2.1.) утверждает, что множества $\hat{\mathbb{W}}^s_f$, $\hat{\mathbb{W}}^u_f$ являются трансверсально пересекающимися ламинациями на многообразии $\hat{V}_f$ в смысле определений 2.1., 2.2.. Второй факт (лемма 2.2.) связан с введенным авторами

[2]Компактное множество $A \subset M^n$ называется *аттрактором диффеоморфизма* $f : M^n \to M^n$, если существует окрестность U множества A такая, что $f(U) \subset U$ и $A = \bigcap\limits_{n \in \mathbf{N}} f^n(U)$. Множество $R \subset M^n$ называется *репеллером* для f, если оно является аттрактором для f^{-1}.

[3]Гладкое связное замкнутое ориентируемое 3-многообразие называется *простым*, если оно гомеоморфно $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ или неприводимо (любая гладко вложенная 2-сфера ограничивает в нем 3-шар).

понятием перестройки многообразия вдоль ламинации и устанавливает, что результатом такой перестройки является многообразие, состоящее из конечного числа копий $\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^1$. Оказывается, что выполнение этих двух необходимых свойств является достаточным условием, выделяющим множество $\mathcal{S}$ абстрактных схем, каждая из которых является схемой некоторого диффеоморфизма из $G(M^3)$. Более детально.

2. Реализация диффеоморфизмов класса $G(M^3)$

Положим $\mathbb{D}^n=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n : x_1^2+\dots+x_n^2\leq 1\}$ и $\mathbb{S}^{n-1}=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n : x_1^2+\dots+x_n^2=1\}$ для $n\in\mathbb{N}$. Пусть $\mathcal{A}=\mathbb{S}^1\times\mathbb{D}^1\times\mathbb{R}$ — толстый цилиндр и $\mathcal{W}=\mathbb{S}^1\times\{0\}\times\mathbb{R}$ — его середина. Определим диффеоморфизмы на многообразии $\mathcal{A}$: $a_{s,+1}(e^{i\psi},t,r)=(e^{i\psi},t,r+1)$, $a_{s,-1}(e^{i\psi},t,r)=(e^{-i\psi},-t,r+1)$, $a_{u,+1}(e^{i\psi},t,r)=(e^{i\psi},t,r-1)$, $a_{s,-1}(e^{i\psi},t,r)=(e^{-i\psi},-t,r-1)$, где $e^{i\psi}$, $\psi\in[0,2\pi)$ — показательная форма записи комплексного числа, соответствующего точке на единичной окружности. Для $\delta\in\{u,s\}$, $\nu\in\{+1,-1\}$ положим $\hat{\mathcal{A}}_{\delta,\nu}=\mathcal{A}/a_{\delta,\nu}$. Обозначим через $p_{_{\delta,\nu}}:\mathcal{A}\to\hat{\mathcal{A}}_{\delta,\nu}$ естественную проекцию. Тогда проекция $p_{_{\delta,\nu}}$ является накрытием и индуцирует эпиморфизм $\eta_{_{\delta,\nu}}:\pi_1(\hat{\mathcal{A}}_{\delta,\nu})\to\mathbb{Z}$. Положим $\hat{\mathcal{W}}_{\delta,\nu}=p_{_{\delta,\nu}}(\mathcal{W})$. Тогда множество $\hat{\mathcal{W}}_{\delta,\nu}$ гомеоморфно двумерному тору для $\nu=+1$ и гомеоморфно бутылке Клейна для $\nu=-1$, а множество $\hat{\mathcal{A}}_{\delta,\nu}$ является окрестностью поверхности $\hat{\mathcal{W}}_{\delta,\nu}$.

Рассмотрим на многообразии $\mathcal{A}$ пару трансверсальных $a_{\delta,\nu}$-инвариантных слоений $\mathcal{F}^1=\bigcup\limits_{\psi_0\in[0,2\pi),r_0\in\mathbb{R}}\{(e^{i\psi},t,r)\in\mathcal{A}:\psi=\psi_0,\ r=r_0\}$, $\mathcal{F}^2=\bigcup\limits_{r_0\in\mathbb{R}}\{(e^{i\psi},t,r)\in\mathcal{A}:r=r_0-\log_2 t,\ t>0\}\cup\bigcup\limits_{r_0\in\mathbb{R}}\{(e^{i\psi},t,r)\in\mathcal{A}:r=r_0-\log_2(-t),\ t<0\}\cup\mathcal{W}$. Обозначим через $\hat{\mathcal{F}}^1_{\delta,\nu}$, $\hat{\mathcal{F}}^2_{\delta,\nu}$ пару трансверсальных слоений на $\hat{\mathcal{A}}_{\delta,\nu}$, слои которых являются проекциями относительно $p_{_{\delta,\nu}}$ слоев слоений $\mathcal{F}^1$, $\mathcal{F}^2$, соответственно. Пусть $X\subset\hat{\mathcal{W}}_{\delta,\nu}$ — пустое, конечное или счетное множество точек и Y — объединение всех слоев слоения $\hat{\mathcal{F}}^1_{\delta,\nu}$, проходящих через точки множества X. Положим $\hat{\mathcal{W}}_{\delta,\nu,X}=\hat{\mathcal{W}}_{\delta,\nu}\setminus X$ и $\hat{\mathcal{A}}_{\delta,\nu,X}=\hat{\mathcal{A}}_{\delta,\nu}\setminus Y$. Обозначим через $\hat{\mathcal{F}}^1_{\delta,\nu,X}$ ($\hat{\mathcal{F}}^2_{\delta,\nu,X}$) слоение на множестве $\hat{\mathcal{A}}_{\delta,\nu,X}$, состоящее из слоев слоения $\hat{\mathcal{F}}^1_{\delta,\nu}$ ($\hat{\mathcal{F}}^2_{\delta,\nu}$) после удаления из них всех точек множества Y.

Далее под обозначением $(\hat{V},\eta)$ понимается 3-многообразие $\hat{V}$, каждая компонента связности $\hat{v}$ которого является простым многообразием, допускающим эпиморфизм $\eta_{_{\hat{v}}}:\pi_1(\hat{v})\to\mathbb{Z}$, и η — отображение, составленное из этих эпиморфизмов.

Определение 2.1. *Компактное множество $\hat{\mathbb{W}}^\delta\subset(\hat{V},\eta)$ назовем δ-ламинацией, если:*

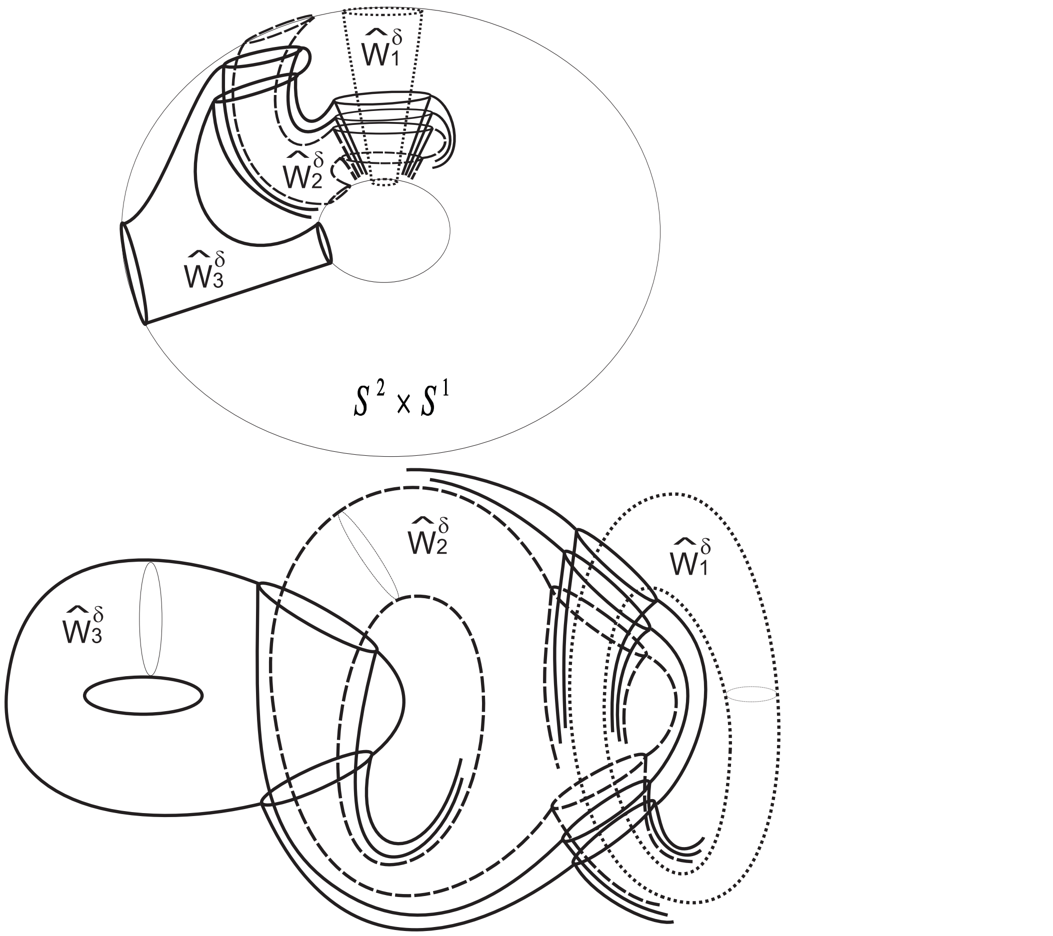
1) $\hat{\mathbb{W}}^\delta$ состоит из конечного числа n_δ компонент линейной связности $\hat{W}^\delta_1,\dots,\hat{W}^\delta_{n_\delta}$ таких, что компонента $\hat{W}^\delta_1$ является замкнутым множеством и $(cl\ \hat{W}^\delta_i\setminus\hat{W}^\delta_i)\subset\bigcup\limits_{j=1}^{i-1}cl\ \hat{W}^\delta_j$ для $i>1$;

2) для каждого $i=1,\dots,n_\delta$ существуют окрестности $N(\hat{W}^\delta_i)$, $\tilde{N}(\hat{W}^\delta_i)$ множества $\hat{W}^\delta_i$, числа $m_i\in\mathbb{N}$, $\nu_i\in\{-1,+1\}$, множество $X_i\subset\hat{\mathcal{A}}_{\delta,\nu_i}$ и диффеоморфизм $\mu_i:N(\hat{W}^\delta_i)\to\hat{\mathcal{A}}_{\delta,\nu_i,X_i}$ со следующими свойствами:

a) $\mu_i(\hat{W}^\delta_i)=\hat{\mathcal{W}}_{\delta,\nu_i,X_i}$ и $\eta([c])=m_i\eta_{_{\delta,\nu_i}}(\mu_i([c]))$ для любой замкнутой кривой $c\subset\hat{W}^\delta_i$;

b) для $j<i$ множество $\mu_j(N(\hat{W}^\delta_j)\cap\hat{W}^\delta_i)$ либо пусто, либо для любого слоя $\hat{L}^2_i\in\hat{\mathcal{F}}^2_{\delta,\nu_i,X_i}$ каждая компонента связности множества $\mu_j(N(\hat{W}^\delta_j)\cap\mu_i^{-1}(\hat{L}^2_i)\cap\tilde{N}(\hat{W}^\delta_i))$ явля-

ется слоем слоения $\hat{\mathcal{F}}^2_{\delta,\nu_j,X_j}$ *и для любого слоя* $\hat{L}^1_j \in \hat{\mathcal{F}}^1_{\delta,\nu_j,X_j}$ *каждая компонента связности множества* $\mu_i(N(\hat{W}^\delta_i) \cap \mu_j^{-1}(\hat{L}^1_j) \cap \tilde{N}(\hat{W}^\delta_j))$ *является слоем слоения* $\hat{\mathcal{F}}^1_{\delta,\nu_i,X_i}$.



Р и с у н о к **2.1**
δ-ламинация на многообразии $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$

О п р е д е л е н и е 2.2. *Ламинации* $\hat{\mathbb{W}}^s$ *и* $\hat{\mathbb{W}}^u$ *на многообразии* $(\hat{V}, \eta)$ *будем называть трансверсально пересекающимися, если для* $i_s \in \{1, \dots, n_s\}$ *и* $i_u \in \{1, \dots, n_u\}$ *таких, что* $\hat{W}^s_{i_s} \cap \hat{W}^u_{i_u} \neq \emptyset$, *множество* $\mu_{i_s}(N(\hat{W}^s_{i_s}) \cap \hat{W}^u_{i_u})$ *является объединением слоев слоения* $\hat{\mathcal{F}}^1_{s,\nu_{i_s},X_{i_s}}$ *и множество* $\mu_{i_u}(N(\hat{W}^u_{i_u}) \cap \hat{W}^s_{i_s})$ *является объединением слоев слоения* $\hat{\mathcal{F}}^1_{u,\nu_{i_u},X_{i_u}}$.

Л е м м а 2.1. *Для диффеоморфизма* $f \in G(M^3)$ *множества* $\hat{\mathbb{W}}^s_f$ *и* $\hat{\mathbb{W}}^u_f$ *являются трансверсально пересекающимися ламинациями на многообразии* $(\hat{V}_f, \eta_f)$.

Пусть $\mathcal{B} = \mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^0 \times \mathbb{R}$ — две копии заполненных цилиндров и $\mathcal{I} = \{0\} \times \mathbb{S}^0 \times \mathbb{R}$ — их середины. Определим на многообразии $\mathcal{B}$ диффеоморфизмы: $b_{s,+1}(d \cdot e^{i\psi}, \kappa, r) = (d \cdot e^{i\psi}, \kappa, r+1)$, $b_{s,-1}(d \cdot e^{i\psi}, \kappa, r) = (d \cdot e^{-i\psi}, -\kappa, r+1)$, $b_{u,+1}(d \cdot e^{i\psi}, \kappa, r) = (d \cdot e^{i\psi}, \kappa, r-1)$, $b_{s,-1}(d \cdot e^{i\psi}, \kappa, r) = (d \cdot e^{-i\psi}, -\kappa, r-1)$, где $d \in [0, 1]$. Положим $\hat{\mathcal{B}}_{\delta,\nu} = \mathcal{B}/b_{\delta,\nu}$. Обозначим через $q_{\delta,\nu} : \mathcal{B} \to \hat{\mathcal{B}}_{\delta,\nu}$ естественную проекцию. Тогда проекция $q_{\delta,\nu}$ является накрытием и индуцирует эпиморфизм в группу $\mathbb{Z}$ на фундаментальной группе каждой компоненты связности многообразия $\hat{\mathcal{B}}_{\delta,\nu}$, обозначим через $\zeta_{\delta,\nu}$ отображение, составленное из этих эпиморфизмов. Положим $\hat{\mathcal{I}}_{\delta,\nu} = q_{\delta,\nu}(\mathcal{I})$. Тогда множество $\hat{\mathcal{B}}_{\delta,\nu}$ является трубчатой окрестностью многообразия $\hat{\mathcal{I}}^\delta_\nu$, которое гомеоморфно паре непересекающихся окружностей для $\nu = +1$ и одной окружности для $\nu = -1$. Рассмотрим на многообразии $\mathcal{B}$ двумерное $b_{\delta,\nu}$-инвариантное слоение $\mathcal{G}^2 = \bigcup\limits_{r_0\in\mathbb{R}} \{(d\cdot e^{i\psi}, \kappa, r) \in \mathcal{B} : \kappa = -1,\ r = r_0\} \cup \bigcup\limits_{r_0\in\mathbb{R}} \{(d\cdot e^{i\psi}, \kappa, r) \in \mathcal{B} : \kappa = +1,\ r = r_0\}$. Обозначим через $\hat{\mathcal{G}}^2_{\delta,\nu}$ двумерное слоение на $\hat{\mathcal{B}}_{\delta,\nu}$, слои которого являются проекцией относительно $q_{\delta,\nu}$ слоев слоения $\mathcal{G}^2$.

Заметим, что $\partial\mathcal{A} = \partial\mathcal{B} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^0 \times \mathbb{R}$ и $a_{\delta,\nu}|_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^0\times\mathbb{R}} = b_{\delta,\nu}|_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^0\times\mathbb{R}}$. Тогда отображение $\xi_{\delta,\nu} = q_{\delta,\nu}(p_{\delta,\nu}|_{\partial\mathcal{A}})^{-1} : \partial\hat{\mathcal{A}}_{\delta,\nu} \to \partial\hat{\mathcal{B}}_{\delta,\nu}$ является гомеоморфизмом. Пусть $\hat{\mathbb{W}}^\delta = \bigcup\limits_{i=1}^{n_\delta} \hat{W}^\delta_i$ — δ-ламинация на многообразии $(\hat{V}, \eta)$. Положим $J_1 = \xi_{\delta,\nu_1}\mu_1|_{\partial N(\hat{W}^\delta_1)} : \partial N(\hat{W}^\delta_1) \to \partial\hat{\mathcal{B}}_{\delta,\nu_1}$. Будем говорить, что многообразие $\hat{V}_1 = (\hat{V} \setminus int\ N(\hat{W}^\delta_1)) \cup_{J_1} \hat{\mathcal{B}}_{\delta,\nu_1}$ получено *перестройкой многообразия* $\hat{V}$ *вдоль поверхности* $\hat{W}^\delta_1$. Обозначим через $p_1 : (\hat{V} \setminus int\ N(\hat{W}^\delta_1)) \cup \hat{\mathcal{B}}_{\delta,\nu_1} \to \hat{V}_1$ естественную проекцию. Для $i = 1, \dots, n_\delta - 1$ положим $\hat{W}^\delta_{1,i} = p_1(\hat{W}^\delta_{i+1} \setminus N(\hat{W}^\delta_1)) \cup p_1(G_i)$, где G_i — объединение слоев слоения $\hat{\mathcal{G}}^2_{\delta,\nu_1}$ таких, что $\partial G_i = J_1(\partial N(\hat{W}^\delta_1) \cap \hat{W}^\delta_{i+1})$. Положим $\hat{\mathbb{W}}^\delta_1 = \bigcup\limits_{i=1}^{n_\delta-1} \hat{W}^\delta_{1,i}$.

П р е д л о ж е н и е 2.1. *Каждая компонента связности $\hat{v}_1$ многообразия $\hat{V}_1$ является простым многообразием, допускающим эпиморфизм $\eta_{\hat{v}_1} : \pi_1(\hat{v}_1) \to \mathbb{Z}$ такой, что отображение η_1, составленное из этих эпиморфизмов, удовлетворяет условиям $\eta(c) = \eta_1([p_1(c)])$, $\zeta_{\delta,\nu_1}(\gamma) = m_1\eta_1([p_1(\gamma)])$ для любых замкнутых кривых $c \subset (\hat{V} \setminus int\ N(\hat{W}^\delta_1))$, $\gamma \subset \hat{\mathcal{B}}_{\delta,\nu_1}$ и множество $\hat{\mathbb{W}}^\delta_1$ является δ-ламинацией с компонентами линейной связности $\hat{W}^\delta_{1,1}, \dots, \hat{W}^\delta_{1,n_\delta-1}$ на многообразии $(\hat{V}_1, \eta_1)$.*

Для $i = 2, \dots, n_\delta$ обозначим через $\hat{V}_i$ — многообразие, полученное перестройкой многообразия $\hat{V}_{i-1}$ вдоль поверхности $\hat{W}^\delta_{i-1,1}$ и назовем $\hat{V}_{n_\delta}$ *многообразием, полученным перестройкой многообразия $\hat{V}$ вдоль δ-ламинации $\hat{\mathbb{W}}^\delta$.*

Л е м м а 2.2. *Для диффеоморфизма $f \in G(M^3)$ каждая компонента связности многообразия, полученного перестройкой многообразия $\hat{V}_f$ вдоль s-ламинации $\hat{\mathbb{W}}^s_f$ (u-ламинации $\hat{\mathbb{W}}^u_f$) гомеоморфна $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$.*

О п р е д е л е н и е 2.3. *Набор $S = (\hat{V}, \eta, \hat{\mathbb{W}}^s, \hat{\mathbb{W}}^u)$ называется абстрактной схемой, если:*

1) $(\hat{V}, \eta)$ — простое многообразие, фундаментальная группа которого допускает эпиморфизм η в группу $\mathbb{Z}$;

2) $\hat{\mathbb{W}}^s$ и $\hat{\mathbb{W}}^u$ — трансверсально пересекающиеся ламинации на многообразии $(\hat{V}, \eta)$;

3) каждая компонента связности многообразия, полученного перестройкой многообразия $\hat{V}$ вдоль s-ламинации $\hat{\mathbb{W}}^s$ (u-ламинации $\hat{\mathbb{W}}^u$) гомеоморфна $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$.

Обозначим через $\mathcal{S}$ множество абстрактных схем. Из лемм 2.1. и 2.2. получаем следующее утверждение.

Т е о р е м а 2.1. *Схема S_f любого диффеоморфизма $f \in G(M^3)$ принадлежит множеству $\mathcal{S}$.*

Т е о р е м а 2.2. *Для любой абстрактной схемы $S \in \mathcal{S}$ существует диффеоморфизм $f_S \in G(M^3)$, схема которого эквивалентна схеме S.*

Благодарности. Автор благодарит В.З. Гринеса и Х. Бонатти за полезные обсуждения, а также грант правительства Российской Федерации 11.G34.31.0039 за частичную финансовую поддержку.

Список литературы

1. Андронов А.А., Понтрягин Л.С. Грубые системы// Докл. АН СССР. – 1937. – Т. 14, № 5. – С. 247-250.

2. Безденежных А.Н., Гринес В.З. Динамические свойства и топологическая классификация градиентноподобных диффеоморфизмов на двумерных многообразиях. Часть 1// Методы качественной теории дифференц. уравнений. Межвуз. темат. сб. научн. тр. под ред. Е.А. Лентович-Андроновой. Горький. – 1985. – С. 22-38.

3. Безденежных А.Н., Гринес В.З. Реализация градиентноподобных диффеоморфизмов двумерных многообразий// Дифференциальные и интегральные уравнения. Сб. науч. тр. под ред. Н.Ф. Отрокова. Горький ГГУ. – 1985. – С. 33-37.

4. Безденежных А.Н., Гринес В.З. Динамические свойства и топологическая классификация градиентноподобных диффеоморфизмов на двумерных многообразиях. Часть 2// Методы качественной теории дифференц. уравнений. Межвуз. темат. сб. научн. тр. под ред. Е.А. Лентович-Андроновой. Горький. – 1987. – С. 24-32.

5. Bonatti Ch., Grines V. Knots as topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3 // Journal of Dynamical and Control Systems (Plenum Press, New York and London). – 2000. – V. 6, № 4. – P. 579-602.

6. Bonatti Ch., Grines V., Medvedev V., Pecou E. Topological classification of gradient-like diffeomorphisms on 3-manifolds// Topology. – 2004. – №43. – P. 369–391.

7. Бонатти Хр., Гринес В.З, Починка О.В. Классификация диффеоморфизмов Морса-Смейла с конечным множеством гетероклинических орбит на 3-многообразиях// Труды МИАН. – 2005. –Т. 250. – С. 5–53.

8. Ch. Bonatti, V. Grines, O.Pochinka. Classification of Morse-Smale diffeomorphisms with the chain of saddles on 3-manifolds// Foliations 2005. World Scientific, Singapore. – 2006. – P. 121–147.

9. Bonatti Ch., Paoluzzi L. 3-manifolds which are orbit spaces of diffeomorphisms// Topology. – 2008. – V. 47. – P. 71–100.

10. Гринес В.З. Топологическая классификация диффеоморфизмов Морса-Смейла с конечным множеством гетероклинических траекторий на поверхностях// Матем. заметки. – 1993. – Т. 54, вып. 3. – С. 3-17.

11. Гринес В.З., Гуревич Е.Я. О диффеоморфизмах Морса-Смейла на многообразиях размерности большей трех// Доклады академии наук. – 2007. – Т.416, N.1. – С. 15-17.

12. Гринес В.З., Гуревич Е.Я., Медведев В.С. Граф Пейкшото диффеоморфизмов Морса-Смейла на многообразиях размерности большей трех// Труды математического института им. В.А. Стеклова. – 2008. – Т. 261. – С. 61-86.

13. Леонтович Е.А., Майер А.Г. О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории// Докл. АН СССР. – 1955. – Т. 103, № 4. – С. 557-560.

14. Майер А.Г. Грубое преобразование окружности в окружность// Уч. Зап. ГГУ. Горький, Изд-во ГГУ. – 1939. – вып. 12. – С. 215-229.

15. Peixoto M. On the classification of flows on two-manifolds. – Dynamical systems Proc. Symp. held at the Univ.of Bahia, Salvador, Brasil. 1971. N.Y.London: Acad. press. – 1973. P. 389-419.

16. Пилюгин С.Ю. Фазовые диаграммы, определяющие системы Морса-Смейла без периодических траекторий на сферах// Дифференциальные уравнения. – 1978. –Т. 14, № 2. – С. 245-254.

17. Pixton D. Wild unstable manifolds// Topology. – 1977. – V. 16, № 2. – P. 167-172.

18. С. Смейл. Неравенства Морса для динамических систем// Сб. Математика. – 1967. – Т.11, №4. – С. 79–87.

19. Уманский Я. Л. Необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности трехмерных динамических систем Морса-Смейла с конечным числом особых траекторий// Мат. сб. – 1990. – Т. 181, № 2. – С. 212 - 239.

Complete topological invariant for Morse-Smale diffeomorphisms on 3-manifolds

© O. V. Pochinka[4]

Abstract. The present paper is devoted to topological classification of a set $G(M^3)$ of preserving orientation Morse-Smale diffeomorphisms f given on smooth closed orientable 3-manifolds M^3 . A complete topological invariant for a diffeomorphism $f \in G(M^3)$ is equivalence class of its scheme S_f , which contains an information on periodic dates and on topology of embedding in ambient manifold of two-dimensional invariant manifolds of the saddle periodic points of f . Moreover, it is introduced a set $\mathcal{S}$ of abstract schemes, having a representative from each equivalence class of schemes of the diffeomorphisms from $G(M^3)$ and it is constructed a diffeomorphism $f_S \in G(M^3)$ whose scheme is equivalent to S .

Key Words: Morse-Smale diffeomorphisms, topological classification, orbit space.

[4]Associate Professor of Theory Function Chair, Nizhny Novgorod State University after N.I. Lobachevsky, Nizhny Novgorod; olga-pochinka@yandex.ru.