УДК 532.582.7

Влияние твердой сферы на линейный поток жидкости, вязкость которой зависит от температуры

© А. О. Сыромясов[1]

Аннотация. Задача о твердой сфере в линейном потоке жидкости переменной вязкости решена в приближении Стокса. Предполагается, что градиент температуры вдали от частицы постоянен. Изучено взаимодействие термодинамических и гидродинамических эффектов. Показано, что в отличие от жидкости постоянной вязкости на частицу может действовать сила.
Ключевые слова: Вязкая жидкость, переменная вязкость, приближение Стокса, асимптотические методы, суспензия.

1. Введение

При математическом моделировании многофазных систем необходимо описывать взаимодействие несущей среды (например, жидкости) и дисперсной фазы (например, взвешенных в жидкости частиц). В изучаемых средах происходят разнообразные гидродинамические, термодинамические и электромагнитные процессы, и значительную роль могут играть перекрестные эффекты, связанные с взаимовлиянием различных процессов и явлений. Например, из-за колебаний электрического поля изменяются свойства ферромагнитной жидкости, что отражается на движении взвешенных в ней частиц.

Ниже изучается суспензия, образованная твердыми сферами в жидкости, вязкость которой зависит от температуры. Частицы расположены далеко друг от друга, так что в окрестности каждой из них влиянием других можно пренебречь. Кроме того, на взвешенные частицы не действуют внешние силы и моменты. Все процессы, происходящие в суспензии, считаются стационарными.

2. Общая постановка задачи

Поскольку мы пренебрегаем взаимодействием твердых сфер, можно считать, что в жидкости взвешена единственная частица Ω некоторого радиуса a. Ее центр для удобства можно совместить с началом O декартовой системы координат; положение произвольной точки пространства относительно O задается вектором $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

Течение жидкости в безынерционном приближении описывается уравнениями

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0,\ \operatorname{div} \vec{u} = 0, \tag{2.1}$$

где $\vec{u}$ – скорость течения жидкости, σ_{ij} – компоненты тензора напряжений:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big) \tag{2.2}$$

[1]Доцент кафедры математики и теоретической механики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; syal1@yandex.ru.

Здесь p – давление в жидкости, η – вязкость. Она зависит от температуры T по закону

$$\eta(T) = \eta_0\Big(1 - \alpha\frac{T - T_0}{T_0}\Big), \tag{2.3}$$

где $\alpha > 0$ – безразмерный параметр, T_0 – т.н. условный нуль температуры. Отношение $(T-T_0)/T_0$ считается малым. Формула (2.3) получается при линеаризации более сложных зависимостей $\eta(T)$ [1] и отражает падение вязкости при увеличении температуры.

Из уравнений (2.2) и (2.3) следует, что неоднородность температурного поля влияет на течение жидкости. Перемещение жидкости также может оказывать влияние на значение T в каждой точке. Будем, однако, считать течение настолько медленным, что оно не играет роли в распределении температуры. Тогда $T(\vec{x})$ должна подчиняться уравнению

$$\Delta T = 0 \tag{2.4}$$

Очевидно, вне и внутри частицы температурное поле описывается разными функциями. Обозначим отклонения температуры жидкости (fluid) и частицы (particle) от величины T_0 через $T_f(\vec{x})$ и $T_p(\vec{x})$. Согласно (2.4), обе эти функции должны быть гармоническими.

Граничные условия задачи таковы. В центре частицы температура должна быть конечной; именно ее можно принять за «условный нуль». Градиент температуры на бесконечности постоянен, а на поверхности частицы непрерывны температура и тепловой поток:

$$T_p(\vec{0}) = 0;\ \nabla T_f \to \vec{T} = \text{const},\ |\vec{x}| \to \infty;\ T_p = T_f,\ \kappa_p\frac{\partial T_p}{\partial n} = \kappa_f\frac{\partial T_f}{\partial n},\ |\vec{x}| = a \tag{2.5}$$

Здесь κ_p и κ_f – теплопроводности частицы и жидкости, $\vec{n}$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности сферы.

Поток жидкости на бесконечности в отсутствие градиента температуры линеен:

$$u_i \to C^{(0)}_{ij}x_j,\ C^{(0)}_{ij} = \text{const},\ |\vec{x}| \to \infty,\ \vec{T} = 0 \tag{2.6}$$

Обозначим через $\vec{V}$ и $\vec{\Gamma}$ абсолютные линейную и угловую скорости частицы. В таком случае условие прилипания на поверхности сферы запишется следующим образом:

$$u_i(\vec{x}) = V_i + \Gamma_{ij}x_j,\ |\vec{x}| = a \tag{2.7}$$

Итак, суспензия моделируется системой уравнений (2.1)–(2.7). Поскольку поток не влияет на распределение температуры, сначала следует решить термодинамическую задачу (2.4)–(2.5). После этого, зная $T_f(\vec{x})$ и считая $\vec{V}$ и $\vec{\Gamma}$ известными, можно найти поля скоростей и давления в жидкости из уравнений (2.1)–(2.3), (2.6), (2.7). Наконец, для определения самих $\vec{V}$ и $\vec{\Gamma}$ надо использовать условия отсутствия внешних сил и моментов.

3. Определение поля температуры

Задача (2.4)–(2.5) для случая неподвижной жидкости решена в [2]:

$$\begin{aligned} T_p &= (1+\kappa)T_s x_s, \\ T_f &= T_s x_s - \kappa a^3 T_s L_s(\vec{x}) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь обозначено $\kappa = (\kappa_f - \kappa_p)/(\kappa_p + 2\kappa_f)$. Гармонические функции $L_{i\cdots j}$ (мультиполи) вычисляются по следующим правилам:

$$L_0(\vec{x}) = \frac{1}{|\vec{x}|},\ L_{i\cdots j}(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i}\cdots\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{1}{|\vec{x}|}\Big)$$

При нахождении полей скорости и давления $\vec{u}$ и $\vec{p}$ нас будет интересовать лишь распределение температуры вне частицы, заданное функцией $T_f(\vec{x})$.

4. «Фоновый» поток

При решении задачи об обтекании частицы основной («фоновый») поток со скоростью $\vec{U}$ и давлением P, как правило, известен заранее, и требуется найти возмущения $\vec{v}$ и p', вносимые в него частицей. Поскольку уравнения движения линейны, то общие скорость и давление в жидкости представляются суммами

$$\vec{u} = \vec{U} + \vec{v},\ p = P + p' \tag{4.1}$$

В случае, когда вязкость переменная, сначала необходимо найти сами «фоновые» слагаемые. Для этого в уравнения движения вместо T следует подставить не $T_f(\vec{x})$, заданную формулой (3.1), а выражение $T = T_0 + T_s x_s$ (такой вид принимает температура в отсутствие взвешенных частиц).

Основываясь на (2.6), будем считать, что $U_i = C_{ij}x_j$. Градиент скорости C_{ij} и давление необходимо подобрать так, чтобы удовлетворялись уравнения (2.1). Будем раскладывать η, P и C_{ij} по степеням малого параметра

$$Q(\vec{x}) = \frac{T - T_0}{T_0} = \frac{T_s x_s}{T_0}$$

Из (2.3) следует, что $\eta = \eta_0(1 - \alpha Q)$. Аналогично, с точностью до Q получим:

$$C_{ij} = C_{ij}^{(0)} + C_{ij}^{(1)}Q,\ P = P^{(0)} + P^{(1)}Q,\ C_{ij}^{(0,1)} = \mathrm{const},\ P^{(0,1)} = \mathrm{const}$$

Отсюда следует, что «фоновая» скорость жидкости квадратична, а давление – линейно по координатам. Введем в рассмотрение вектор $\vec{W}$ и скаляр Π:

$$W_i = C_{ij}^{(1)}x_jQ = \frac{1}{T_0}C_{ij}^{(1)}T_kx_jx_k,\ \Pi = P^{(1)}Q = \frac{1}{T_0}T_kx_k,$$

тогда скорость и давление принимают вид

$$U_i = C_{ij}^{(0)}x_j + W_i,\ P = P^{(0)} + \Pi \tag{4.2}$$

Слагаемое $C_{ij}^{(0)}x_j$ отвечает течению (2.6) в отсутствие перепада температуры.

Подставим (4.2) в (2.1). Если уравнения движения справедливы с точностью до Q, то

$$\eta_0\Delta W_i = \frac{\partial\Pi}{\partial x_i} + 2\alpha\eta_0E_{ij}^{(0)}T_j,\ \mathrm{div}\vec{W} = 0 \tag{4.3}$$

Здесь $E_{jk}^{(0)}$ – симметричная часть градиента скорости $C_{jk}^{(0)}$. Дополнительным условием для определения $\vec{W}$ и Π может служить заданный вдали от частицы тензор напряжений в присутствии градиента температуры.

5. Постановка гидродинамической задачи

Теперь, когда распределение температуры (3.1) и основное течение (4.2) известны, необходимо найти возмущение, вносимое в поток частицами.

С учетом (4.1) и (4.2) граничные условия (2.7) преобразуются к виду:

$$v_i + E_{ij}^{(0)} x_j + \Omega_{ij}^{(0)} x_j + W_i = V_i + \Gamma_{ij} x_j,\ |\vec{x}| = a \tag{5.1}$$

Величина $\Omega_{ij}^{(0)}$ (аналогично $E_{ij}^{(0)}$) есть антисимметричная часть градиента скорости.

Из (2.6) следует, что вдали от частицы и в отсутствие градиента температуры возмущения скорости затухают:

$$v_i \to 0,\ |\vec{x}| \to \infty,\ \vec{T} = 0 \tag{5.2}$$

В задаче без частиц неизвестные функции раскладывались в ряд по параметру Q; в задаче с частицей введем малый безразмерный параметр $\delta = \Theta a / T_0$, где $\Theta = |\vec{T}|$. Тогда

$$\begin{aligned} &\vec{v} = \vec{v}^{(0)} + \vec{v}^{(1)}\delta + \ldots, p' = p^{(0)} + p^{(1)}\delta + \ldots, \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \sigma_{ij}^{(1)}\delta + \ldots, \\ &V_i = V_i^{(0)} + V_i^{(1)}\delta + \ldots, \Gamma_{ij} = \Gamma_{ij}^{(0)} + \Gamma_{ij}^{(1)}\delta + \ldots, \\ &W_i = C_{ijk}^{(1)} x_j x_k \delta + \ldots, \Pi = P^{(1)}\delta + \ldots \end{aligned} \tag{5.3}$$

Последние два равенства обусловлены тем, что вблизи частицы введенный ранее параметр Q имеет порядок δ. Тензор $C_{ijk}^{(1)}$ задает квадратичную часть невозмущенного потока. Его можно считать симметричным по второму и третьему индексам, кроме того, в силу условия $\mathrm{div}\vec{U} = 0$ должно быть $C_{iik} = C_{iki} = 0$.

Подстановка (3.1) в (2.3) приводит к следующему выражению для вязкости:

$$\eta = \eta_0 \Big[1 - \frac{\alpha}{\Theta a} T_f(\vec{x}) \delta \Big] \tag{5.4}$$

Чтобы найти $\vec{v}$ и p', необходимо в уравнения (2.1), (2.2) и граничные условия (5.1), (5.2) подставить разложения (4.1), (4.2), (5.3) и (5.4) и учесть соотношения (4.3).

При $\delta = 0$ и вектор $\vec{T}$ равен нулю, поэтому

$$\begin{aligned} &-\frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i} + \eta_0 \Delta v_i^{(0)} = 0,\ \mathrm{div}\, \vec{v}^{(0)} = 0, \\ &v_i^{(0)} + E_{ij}^{(0)} x_j + \Omega_{ij}^{(0)} x_j = V_i^{(0)} + \Gamma_{ij}^{(0)} x_j,\ |\vec{x}| = a;\ \vec{v}^{(0)} \to \vec{0},\ |\vec{x}| \to \infty \end{aligned}$$

Решение этой задачи линейно по $E_{ij}^{(0)}$, $V_i^{(0)}$ и $\Gamma_{ij}^{(0)} - \Omega_{ij}^{(0)}$. Однако в отсутствие внешних сил и моментов $V_i^{(0)} = 0$ и $\Gamma_{ij}^{(0)} = \Omega_{ij}^{(0)}$, поэтому $\vec{v}^{(0)}$ и $p^{(0)}$ выглядят так [3]:

$$\begin{aligned} v_i^{(0)}(\vec{x}) &= -\frac{5}{2} a^3 E_{jk}^{(0)} M_{ijk}(\vec{x}) - \frac{1}{6} a^5 E_{jk}^{(0)} L_{ijk}(\vec{x}), \\ p^{(0)}(\vec{x}) &= -\frac{5}{3} \eta_0 a^3 E_{jk}^{(0)} L_{jk}(\vec{x}), \end{aligned} \tag{5.5}$$

где $M_{ijk}(\vec{x}) = x_i x_j x_k / |\vec{x}|^5$.

Далее слагаемые $\Omega_{ij}^{(0)}$, $\Gamma_{ij}^{(0)}$ и $V_i^{(0)}$ не учитываются. Поэтому разложение линейной и угловой скорости частиц начинается со слагаемых порядка δ.

Функции первого приближения $\vec{v}^{(1)}$ и $p^{(1)}$ удовлетворяют уравнениям:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_i}+\eta_0\Delta v_i^{(1)}=\frac{\eta_0\alpha}{\Theta a}\frac{\partial}{\partial x_j}\Big[T_f\Big(2E_{ij}^{(0)}+\frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j^{(0)}}{\partial x_i}\Big)-2E_{ij}^{(0)}T_sx_s\Big],\\
&\operatorname{div}\vec{v}^{(1)}=0
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

Условие на поверхности частицы является следствием (5.1) и (5.3):

$$v_i^{(1)}+C_{ijk}^{(1)}x_jx_k=V_i^{(1)}+\Gamma_{ij}^{(1)}x_j,\ |\vec{x}|=a$$

Отсюда и из (5.6) вытекает, что $V_i^{(1)}$ и $\Gamma_{ij}^{(1)}$ должны быть линейными либо по $E_{ij}^{(0)}$ и T_k, либо по $C_{ijk}^{(1)}$. Однако нельзя составить тензор Γ_{ij}, линейный только по компонентам тензора третьего ранга или вектора и еще одного тензора второго ранга. Т.о., с точностью до δ получаем $\Gamma_{ij}=0$. Однако с помощью тех же тензоров можно построить вектор абсолютной скорости частицы $\vec{V}$:

$$V_i^{(1)}=\xi_C C_{iss}^{(1)}+\frac{\alpha}{\Theta a}\xi_E E_{ij}^{(0)}T_j \tag{5.7}$$

Коэффициенты ξ_C и ξ_E должны быть найдены из условия, что на частицу не действует внешняя сила (а значит, и гидродинамическая равна нулю).

Окончательно, в первом приближении частица не вращается, но может двигаться с некоторой линейной скоростью:

$$v_i^{(1)}+C_{ijk}^{(1)}x_jx_k=V_i^{(1)},\ |\vec{x}|=a \tag{5.8}$$

Условия на бесконечности для $\vec{v}^{(1)}$ и $p^{(1)}$ нельзя получить непосредственно из (2.6). Однако из (5.5) следует, что $v_i^{(0)}\sim|\vec{x}|^{-2}$. Подставляя эту оценку в (5.6) и учитывая, что дифференцирование понижает порядок на 1, получим $v_i^{(1)}\sim|\vec{x}|^{-1}$ и $p^{(1)}\sim|\vec{x}|^{-2}$. Т.о., в первом приближении по δ возмущения затухают вдали от частицы.

6. Вычисление возмущений в первом приближении

Подставим в первое уравнение (5.6) выражения T_f из (3.1), $v_i^{(0)}$ из (5.5) и подействуем на обе части равенства оператором div. После перегруппировки слагаемых получим

$$
\begin{aligned}
\Delta p^{(1)} \;=\; &\frac{\eta_0\alpha}{\Theta a}\Big[E_{ij}^{(0)}T_i\Big(48\kappa a^8\frac{x_j}{|\vec{x}|^{10}}-10\kappa a^6\frac{x_j}{|\vec{x}|^8}\Big)+E_{ij}^{(0)}T_k\Big(60\kappa a^8\frac{x_ix_jx_k}{|\vec{x}|^{12}}\\
&-20\kappa a^6\frac{x_ix_jx_k}{|\vec{x}|^{10}}\Big)+\frac{1}{3}(10+6\kappa)a^3E_{ij}^{(0)}T_kL_{ijk}(\vec{x})\Big]
\end{aligned}
$$

Представим возмущения давления и скорости в виде

$$p^{(1)}=p_*^{(1)}+p_H^{(1)},\ \vec{v}^{(1)}=\vec{v}_*^{(1)}+\vec{v}_H^{(1)}, \tag{6.1}$$

Здесь $p_*^{(1)}$ – частное решение уравнения Пуассона, а $p_H^{(1)}$ – общее решение уравнения Лапласа. Векторы $\vec{v}_*^{(1)}$ и $\vec{v}_H^{(1)}$ удовлетворяют соотношениям

$$
\begin{aligned}
\eta_0\Delta v_{*i}^{(1)} &= \frac{\partial p_*^{(1)}}{\partial x_i}+\frac{\eta_0\alpha}{\Theta a}\Big[T_f\Big(\frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j^{(0)}}{\partial x_i}\Big)-2E_{ij}^{(0)}T_sx_s\Big],\\
\eta_0\Delta v_{iH}^{(1)} &= \frac{\partial p_H^{(1)}}{\partial x_i},\\
\operatorname{div}(\vec{v}_*^{(1)}+\vec{v}_H^{(1)}) &= 0.
\end{aligned}
\tag{6.2}
$$

Процедура поиска частных решений уравнений Пуассона описана в [4]. С ее помощью можно определить $p_*^{(1)}$:

$$p_*^{(1)} = \frac{\eta_0\alpha}{\Theta a}\Big\{E_{ij}^{(0)}T_i x_j \kappa\Big(\frac{a}{|\vec{x}|}\Big)^8 + E_{ij}^{(0)}T_k\frac{x_i x_j x_k}{|\vec{x}|^2}\Big[2\kappa\Big(\frac{a}{|\vec{x}|}\Big)^8 - \frac{5}{2}\kappa\Big(\frac{a}{|\vec{x}|}\Big)^6\Big] - \frac{5+3\kappa}{15}a^3 E_{ij}^{(0)}T_k L_{ijk}(\vec{x})|\vec{x}|^2\Big\}$$

Следуя этой же процедуре и подставив уже известную функцию $p_*^{(1)}$ в (6.2), найдем

$$\begin{gathered}\eta_0 v_{*i}^{(1)} = \frac{\eta_0\alpha}{\Theta a}a^2\Big\{E_{ij}^{(0)}T_j\Big[\frac{1}{7}\Big(\frac{a}{|\vec{x}|}\Big)^3 - \frac{5}{12}\kappa\Big(\frac{a}{|\vec{x}|}\Big)^4\Big] + E_{ij}^{(0)}T_k\frac{x_j x_k}{|\vec{x}|^2}\Big[\frac{\kappa}{2}\frac{a}{|\vec{x}|} - \\ -\frac{5}{7}\Big(\frac{a}{|\vec{x}|}\Big)^3 + \frac{5}{4}\kappa\Big(\frac{a}{|\vec{x}|}\Big)^4 - \frac{\kappa}{2}\Big(\frac{a}{|\vec{x}|}\Big)^6\Big] + E_{jk}^{(0)}T_j\frac{x_k x_i}{|\vec{x}|^2}\Big[-\Big(1+\frac{\kappa}{10}\Big)\frac{a}{|\vec{x}|} - \frac{5}{7}\Big(\frac{a}{|\vec{x}|}\Big)^3 + \\ +\frac{5}{4}\kappa\Big(\frac{a}{|\vec{x}|}\Big)^4\Big] + E_{jk}^{(0)}T_i\frac{x_j x_k}{|\vec{x}|}\Big[-\frac{5+3\kappa}{12}\frac{a}{|\vec{x}|} - \frac{5}{14}\Big(\frac{a}{|\vec{x}|}\Big)^3 - \frac{5}{24}\kappa\Big(\frac{a}{|\vec{x}|}\Big)^4 + \\ +\frac{\kappa}{4}\Big(\frac{a}{|\vec{x}|}\Big)^6\Big] + E_{jk}^{(0)}T_l\frac{x_i x_j x_k x_l}{|\vec{x}|^4}\Big[-\frac{5-3\kappa}{4}\frac{a}{|\vec{x}|} + \frac{5}{2}\Big(\frac{a}{|\vec{x}|}\Big)^3 - \frac{25}{8}\kappa\Big(\frac{a}{|\vec{x}|}\Big)^4 + \frac{\kappa}{2}\Big(\frac{a}{|\vec{x}|}\Big)^6\Big]\end{gathered} \tag{6.3}$$

Чтобы найти $\vec{v}_H^{(1)}$ и $p_H^{(1)}$, надо решить систему уравнений, получаемую подстановкой (5.7) и (6.3) в (5.8) и (6.2):

$$\begin{aligned}&\eta_0\Delta v_{iH}^{(1)} = \frac{\partial p_H^{(1)}}{\partial x_i},\ \Delta p_H^{(1)} = 0,\\ &\mathrm{div}\vec{v}_H^{(1)} + \mathrm{div}\vec{v}_*^{(1)} = 0,\\ &v_{Hi}^{(1)} + v_{*i}^{(1)} + C_{ijk}^{(1)}x_j x_k = \xi_C C_{iss}^{(1)} + \frac{\alpha}{\Theta a}\xi_E E_{ij}^{(0)}T_j, |\vec{x}| = a\end{aligned}$$

Поскольку $\vec{v}_*^{(1)}$ и $p_*^{(1)}$ затухают на бесконечности, то $\vec{v}_H^{(1)}$ и $p_H^{(1)}$ при $|\vec{x}| \to \infty$ также должны стремиться к нулю.

Считая величины $C_{ijk}^{(1)}$ и $E_{ij}^{(0)}$ независимыми, представим $\vec{v}_H^{(1)}$ и $p_H^{(1)}$ в виде суммы решений двух задач, обозначаемых далее буквами C и E.

Задача C формулируется с помощью уравнений:

$$\begin{aligned}&\eta_0\Delta v_{iH}^{(1)} = \frac{\partial p_H^{(1)}}{\partial x_i},\ \mathrm{div}\vec{v}_H^{(1)} = 0,\ \Delta p_H^{(1)} = 0,\\ &v_{Hi}^{(1)} + C_{ijk}^{(1)}x_j x_k = \xi_C C_{iss}^{(1)}, |\vec{x}| = a;\ v_{Hi}^{(1)} \to 0,\ p_H^{(1)} \to 0,\ |\vec{x}| \to \infty\end{aligned}$$

Т.о., получены те же уравнения, что и для одиночной частицы в квадратичном потоке жидкости с постоянной вязкостью. Поэтому возмущения имеют вид [3]

$$\begin{aligned}p_H^{(1)} &= H_i L_i(\vec{x}) + G_{ijk}L_{ijk}(\vec{x}) + T_{ijklm}L_{ijklm}(\vec{x}),\\ \eta_0 v_{Hi}^{(1)} &= -\frac{1}{2}H_i L_0(\vec{x}) - \frac{1}{2}H_j K_{ij}(\vec{x}) - \frac{4}{7}G_{ijk}L_{jk}(\vec{x}) - \frac{1}{14}G_{jkl}L_{ijkl}(\vec{x})|\vec{x}|^2 - \\ &\quad -\frac{6}{11}T_{ijklm}L_{jklm}(\vec{x}) - \frac{1}{22}T_{jklms}L_{ijklms}(\vec{x})|\vec{x}|^2\end{aligned} \tag{6.4}$$

Здесь $K_{ij}(\vec{x}) = x_i x_j/|\vec{x}|^3$. Тензорные коэффициенты H_i, G_{ijk}, T_{ijklm} должны быть линейны по $C_{ijk}^{(1)}$ и симметричны по индексам, начиная со второго. Для их построения, кроме тензора $\vec{C}^{(1)}$, мы располагаем лишь символом Кронекера (его можно использовать лишь однажды в каждом тензорном произведении):

$$\begin{aligned} H_i &= \eta_0 HA\cdot C^{(1)}_{iss},\ G_{ijk}=\eta_0\Big[GA\Big(\delta_{ij}C^{(1)}_{kss}+\delta_{ik}C^{(1)}_{jss}\Big)+GB\cdot C^{(1)}_{ijk}\Big],\\ T_{ijklm} &= \eta_0 TA\Big[\delta_{ij}\Big(C^{(1)}_{klm}+C^{(1)}_{lkm}+C^{(1)}_{mkl}\Big)+\delta_{ik}\Big(C^{(1)}_{jlm}+C^{(1)}_{ljm}+C^{(1)}_{mjl}\Big)+\\ &\quad+\delta_{il}\Big(C^{(1)}_{jkm}+C^{(1)}_{kjm}+C^{(1)}_{mjk}\Big)+\delta_{im}\Big(C^{(1)}_{jkl}+C^{(1)}_{kjl}+C^{(1)}_{ljk}\Big)\Big] \end{aligned} \tag{6.5}$$

Граничные условия задачи C дают такие значения скалярных параметров:

$$HA=\frac{a^3}{2}\Big(1-\frac{3}{a^2}\xi_C\Big),\ GA=-\frac{7a^5}{96}\Big(1-\frac{3}{a^2}\xi_C\Big),\ GB=\frac{7}{12}a^5,\ TA=-\frac{11a^7}{1728} \tag{6.6}$$

При $\xi_C=0$ (частица неподвижна) соотношения (6.6) сводятся к уже известным [3].

Условия задачи E таковы:

$$\begin{aligned} &\eta_0\Delta v^{(1)}_{iH}=\frac{\partial p^{(1)}_H}{\partial x_i},\ \Delta p^{(1)}_H=0,\\ &\mathrm{div}\vec{v}^{(1)}_H+\mathrm{div}\vec{v}^{(1)}_*=0,\\ &v^{(1)}_{Hi}+v^{(1)}_{*i}=\frac{\alpha}{\Theta a}\xi_E E^{(0)}_{ij}T_j,\,|\vec{x}|=a;\ v^{(1)}_{Hi}\to 0,\ p^{(1)}_H\to 0,\ |\vec{x}|\to\infty \end{aligned}$$

Для упрощения системы подберем вектор $\vec{w}$ такой, что $\mathrm{div}(\vec{w}+\vec{v}^{(1)}_*)=0$, но $\Delta\vec{w}=\vec{0}$. Поскольку $\mathrm{div}\vec{v}^{(1)}_*$ содержит слагаемые порядка $|\vec{x}|^{-2}$ и $|\vec{x}|^{-4}$, то гармонические функции w_i содержат слагаемые порядка $|\vec{x}|^{-1}$ и $|\vec{x}|^{-3}$. С учетом линейности по $E^{(0)}_{ij}$ и T_k получим

$$w_i=\alpha_{-1}E^{(0)}_{ij}T_jL_0(\vec{x})+\alpha_{-3}T_iE^{(0)}_{jk}L_{jk}(\vec{x}) \tag{6.7}$$

Значения α_{-1} и α_{-3} легко находятся из условия $\mathrm{div}(\vec{w}+\vec{v}^{(1)}_*)=0$:

$$\alpha_{-1}=-\frac{\alpha}{\Theta a}\Big(\frac{11}{6}+\frac{\kappa}{10}\Big)a^3,\ \alpha_{-3}=\frac{4}{21}\frac{\alpha}{\Theta a}a^5$$

Теперь, заменив $\vec{v}^{(1)}_H$ на сумму $\vec{v}^{(1)}_H+\vec{w}$, для нового вектора $\vec{v}^{(1)}_H$ получим задачу:

$$\begin{aligned} &\eta_0\Delta v^{(1)}_{iH}=\frac{\partial p^{(1)}_H}{\partial x_i},\ \Delta p^{(1)}_H=0,\ \mathrm{div}\vec{v}^{(1)}_H=0,\\ &v^{(1)}_{Hi}+v^{(1)}_{*i}+w_i=\frac{\alpha}{\Theta a}\xi_E E^{(0)}_{ij}T_j,\,|\vec{x}|=a;\ v^{(1)}_{Hi}\to 0,\ p^{(1)}_H\to 0,\ |\vec{x}|\to\infty \end{aligned}$$

Общий вид возмущения по-прежнему задается выражениями (6.4), но теперь тензорные коэффициенты должны быть линейны не по $C^{(1)}_{ijk}$, а по $E^{(0)}_{ij}$ и T_k:

$$\begin{aligned} H_i &= \frac{\eta_0\alpha}{\Theta a}HB\cdot E^{(0)}_{ij}T_j,\\ G_{ijk} &= \frac{\eta_0\alpha}{\Theta a}\Big[GC\Big(\delta_{ij}E^{(0)}_{ks}+\delta_{ik}E^{(0)}_{js}\Big)T_s+GD\cdot T_iE^{(0)}_{jk}+GE\Big(E^{(0)}_{ij}T_k+E^{(0)}_{ik}T_j\Big)\Big],\\ T_{ijklm} &= \frac{\eta_0\alpha}{\Theta a}TB\Big[\delta_{ij}\Big(T_kE^{(0)}_{lm}+T_lE^{(0)}_{km}+T_mE^{(0)}_{kl}\Big)+\delta_{ik}\Big(T_jE^{(0)}_{lm}+T_lE^{(0)}_{jm}+T_mE^{(0)}_{jl}\Big)+\\ &\quad+\delta_{il}\Big(T_jE^{(0)}_{km}+T_kE^{(0)}_{jm}+T_mE^{(0)}_{jk}\Big)+\delta_{im}\Big(T_jE^{(0)}_{kl}+T_kE^{(0)}_{jl}+T_lE^{(0)}_{jk}\Big)\Big] \end{aligned} \tag{6.8}$$

Из граничных условий следует, что

$$HB = a^3\Big[\frac{1}{20}(-70+\kappa) - \frac{3}{2}\frac{\xi_E}{a^2}\Big],\ GC = a^5\Big[\frac{11}{192}(2+3\kappa) + \frac{7}{32}\frac{\xi_E}{a^2}\Big],$$
$$GD = -\frac{1}{72}a^5(1+20\kappa),\ GE = \frac{5}{48}a^5(-1+2\kappa),\ TB = \frac{11}{2592}a^7(1-\kappa) \tag{6.9}$$

Окончательно, с точностью до слагаемых порядка δ получаем:

$$\begin{aligned} u_i &= \Big[\Big(E^{(0)}_{ij} + \Omega^{(0)}_{ij}\Big)x_j + v^{(0)}_i\Big] + \Big[C^{(1)}_{ijk}x_jx_k + v^{(1)}_{*i} + w_i + v^{(1)}_{Hi}(C) + v^{(1)}_{Hi}(E)\Big]\delta, \\ p &= \Big[P^{(0)} + p^{(0)}\Big] + \Big[P^{(1)} + p^{(1)}_* + p^{(1)}_H(C) + p^{(1)}_H(E)\Big]\delta \end{aligned} \tag{6.10}$$

Величины $v^{(1)}_{Hi}(C)$ и $p^{(1)}_H(C)$, $v^{(1)}_{Hi}(E)$ и $p^{(1)}_H(E)$ суть решения задач С и Е, соответственно. Их общий вид описывается равенством (6.4), а тензорные коэффициенты – соотношениями (6.5), (6.6) и (6.8), (6.9).

7. Линейная скорость частицы

Силы и моменты, действующие на частицу Ω, вычисляются по формулам:

$$\mathcal{F}_i = \oint_{\partial\Omega} \sigma_{ij}(\vec{x})n_j dS,\ \mathcal{T}_i = e_{ijk}\oint_{\partial\Omega} x_j\sigma_{kl}(\vec{x})n_l dS \tag{7.1}$$

Поскольку ее поверхность $\partial\Omega$ центрально симметрична, то в гидродинамическую силу вносит вклад лишь та часть σ_{ij}, которая является нечетной по $\vec{x}$, а в гидродинамический момент – наоборот, четная часть.

Согласно (5.5), в нулевом приближении по δ возмущение скорости нечетно, а давления – четно. Поэтому $\sigma^{(0)}_{ij}(\vec{x})$ является четной функцией. Это значит, что на частицу действует только момент (он вычислен в [3]). Напротив, из (6.3), (6.4) и (6.7) следует, что $p^{(1)}$ – нечетна, а $\vec{v}^{(1)}$ и $\vec{w}$ четны по $\vec{x}$. Поэтому в первом приближении на частицу может действовать только сила: $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}^{(1)}_i\delta + \dots$. Подставляя в (7.1) выражение $\sigma^{(1)}_{ij}$ из (2.2), вязкость η из (5.4), а также $\vec{u}$ и p из (6.10), получим после упрощений:

$$\mathcal{F}^{(1)}_i = -\frac{\eta_0\alpha}{\Theta a}3\pi a^3\Big(2+\kappa+2\frac{\xi_E}{a^2}\Big)E^{(0)}_{ij}T_j + 2\pi a^3\eta_0\Big(1-3\frac{\xi_C}{a^2}\Big)C^{(0)}_{iss}$$

Если гидродинамическая сила равна нулю, а $C^{(1)}_{ijk}$ и $E^{(0)}_{ij}$ независимы, то

$$\xi_E = -a^2\Big(1+\frac{\kappa}{2}\Big),\ \xi_C = \frac{a^2}{3}$$

Тогда из (5.7) следует, что линейная скорость частицы равна

$$V_i = \Big[-\frac{\alpha}{\Theta a}a^2\Big(1+\frac{\kappa}{2}\Big)E^{(0)}_{ij}T_j + \frac{a^2}{3}C^{(1)}_{iss}\Big]\delta$$

Значение ξ_C согласуется с выводами [3] о силе, действующей на одиночную сферу в параболическом течении. Если квадратичная часть «фонового» потока, вызванная неоднородностью температурного поля, отсутствует, то скорость частицы пропорциональна $E^{(0)}_{ij}T_j$. Угол, который она составит с вектором $\vec{T}$, зависит от вида потока $C^{(0)}_{ij}$.

Список литературы

1. Рид Р. Свойства газов и жидкостей: Справочное пособие / Р. Рид, Дж. Праусниц, Т. Шервуд ; пер. с англ. под ред. Б.И. Соколова. – 3-е изд., перераб. и доп. – Л. : Химия, 1982. – 592 с.

2. Ландау Л.Д. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – 3-е изд., перераб. – М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1986. – 736 с.

3. Мартынов С.И. Взаимодействие частиц в суспензии / С.И. Мартынов. – Казань : Изд-во Казан. матем. о-ва, 1998. – 135 с.

4. Сыромясов А.О. Частные решения уравнения Пуассона с правой частью специального вида / А.О. Сыромясов // Журнал Средневолжского математического общества. – Саранск, 2010. – Т.12. – N3. – С.129–134.

Influence of rigid sphere on linear flow of the fluid with temperature-dependent viscosity.

© A. O. Syromyasov[2]

Abstract. Stokes approximation is used to solve a problem about a rigid sphere in linear shear flow of fluid with variable viscosity. Temperature gradient far from the particle is assumed to be constant. The interaction of thermodynamic and hydrodynamic effects is considered. It is shown that in linear flow of such a fluid the force may act on the particle.
Key Words: Viscous fluid, variable viscosity, Stokes approximation, asymptotic methods, suspension.

[2]Reader of Mathematics and Theoretical Mechanics Chair, Mordovian State University named after N. P. Ogaryov, Saransk; syal1@yandex.ru.