

УДК 517.9

Неклассические разностные схемы для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (начальная задача)

© М. В. Булатов¹, Т. В. Амосова², Г. Ванден Берге³

Аннотация. В статье рассмотрена начальная задача для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, которые не содержат первую производную. Для численного решения таких задач предложены новые двушаговые разностные схемы четвертого порядка. Проведен анализ свойств таких схем и их сравнение с известными методами на модельных примерах.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка, начальная задача, разностные схемы, метод Нумерова.

1. Введение

В работе рассмотрены численные методы решения начальной задачи для линейных дифференциальных уравнений

$$y''(t) = A(t)y(t) + f(t), y(0) = y_0, y'(0) = y'_0, t \in [0, 1], \quad (1.1)$$

где $A(t)$ — матрица размерности $(n \times n)$, $f(t)$ — заданная, а $y(t)$ — искомая вектор-функция. В дальнейшем изложении предполагается, что элементы матрицы $A(t)$ и вектор-функции $f(t)$ обладают той гладкостью, которая необходима для проведения рассуждений.

В статье представлены новые двушаговые методы решения задачи (1.1) и проведено сравнение этих методов с известными разностными схемами на модельном примере.

2. Двушаговые схемы

Зададим на отрезке $[0, 1]$ равномерную сетку $t_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, h = 1/N$ и обозначим $A_i = A(t_i)$, $f_i = f(t_i)$, а y_i как аппроксимацию точного решения $y(t_i)$.

Для задачи (1.1) разработаны классические линейные k — шаговые методы

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{i+1-j} = h^2 \sum_{j=0}^k \beta_j (A_{i+1-j} y_{i+1-j} + f_{i+1-j}). \quad (2.1)$$

Известно [2], что максимальный порядок устойчивых разностных схем равен $k+2$, если k — четное число, и $k+1$ в противном случае. Из двушаговых схем (2.1) максимальный порядок, четвертый, имеет метод Нумерова

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} = h^2/12(A_{i+1}y_{i+1} + f_{i+1} + 10(A_i y_i + f_i) + A_{i-1}y_{i-1} + f_{i-1}).$$

¹Главный научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления СО РАН, г. Иркутск; mvbul@icc.ru

²Аспирант, Восточно-Сибирская государственная академия образования, г. Иркутск; tatjanaams@ Rambler.ru

³Профессор, Университет Гента, г. Гент; Guido.VandenBerghe@Gent.be

Вводя разностные операторы

$$\Delta[y_i] = y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}, \quad \xi_j[y_i] = \beta_0^j y_{i+1} + \beta_1^j y_i + \beta_2^j y_{i-1}, \quad j = 1, 2, \quad (2.2)$$

двухшаговые линейные методы для задачи (1.1) можно записать

$$\Delta[y_i] = h^2 \xi_1[(A_i + f_i)]. \quad (2.3)$$

Эти методы устойчивы и имеют как минимум первый порядок, если выполнено условие

$$\beta_0^1 + \beta_1^1 + \beta_2^1 = 1. \quad (2.4)$$

Возьмем аналогичную схему (одноопорный вариант), имеющую вид

$$\Delta[y_i] = h^2(A(\xi_2[t_i]\xi_2[y_i] + f(\xi_2[t_i])), \quad (2.5)$$

где коэффициенты $\beta_0^2, \beta_1^2, \beta_2^2$ также удовлетворяют условию первого порядка, т.е.

$$\beta_0^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 = 1. \quad (2.6)$$

Учитывая уравнение (2.6) и тот факт, что $t_{i+1} = t_i + h$ схемы (2.5) перепишем

$$\Delta[y_i] = h^2(A_\varepsilon \xi_2[y_i] + f_\varepsilon), \quad (2.7)$$

здесь мы использовали следующие обозначения $t_{i-1} + (\beta_1^2 + 2\beta_0^2)h = t_\varepsilon$, $\varepsilon = \beta_1^2 + 2\beta_0^2$, $A_\varepsilon = A(t_\varepsilon)$, $f_\varepsilon = f(t_\varepsilon)$. Объединим формулы (2.3) и (2.7) в переопределенную систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\begin{pmatrix} E - h^2\beta_0^1 A_{i+1} \\ E - h^2\beta_0^2 A_\varepsilon \end{pmatrix} y_{i+1} = \begin{pmatrix} 2E + h^2\beta_2^1 A_i \\ 2E + h^2\beta_1^2 A_\varepsilon \end{pmatrix} y_i + \begin{pmatrix} -E + h^2\beta_2^1 A_{i-1} \\ -E + h^2\beta_2^2 A_\varepsilon \end{pmatrix} y_{i-1} + h^2 \begin{pmatrix} \psi_i \\ \varphi_\varepsilon \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

где E – единичная матрица порядка n , а $\psi_i = \xi_i[f_i]$, $\varphi_\varepsilon = f(t_\varepsilon)$. В общем случае СЛАУ (2.8) может не иметь классического решения. Найти «решение» этой системы можно следующим образом: умножим обе части (2.8) на прямоугольную матрицу $(V|W)$ размерности $(n \times 2n)$ такую, чтобы матрица $V(E - h^2\beta_0^1 A_{i+1}) + W(E - h^2\beta_0^2 A_\varepsilon)$ – была невырожденной, а далее будем находить решение уже полученной системы. В самом простом случае матрицы V и W можно выбирать соответственно $c_1 E$, $c_2 E$ где c_1 и c_2 – скалярные параметры. В этом случае мы получаем линейную комбинацию методов (2.3) и (2.7), которая является хорошо изученной. В данной работе предлагаем умножить обе части системы (2.8) на прямоугольную матрицу размерности $(n \times 2n)$ вида

$$L_{i+1} = (E - h^2\beta_0^1 A_{i+1} | d(E - h^2\beta_0^2 A_\varepsilon)),$$

где d – свободный параметр. В итоге предложенной матричной комбинации получим разностную схему

$$M_{i+1} y_{i+1} = P_i y_i + Q_{i-1} y_{i-1} + g_{i+1}, \quad (2.9)$$

где

$$M_{i+1} = L_{i+1} \begin{pmatrix} E - h^2\beta_0^1 A_{i+1} \\ E - h^2\beta_0^2 A_\varepsilon \end{pmatrix}, \quad P_i = L_{i+1} \begin{pmatrix} 2E + h^2\beta_2^1 A_i \\ 2E + h^2\beta_1^2 A_\varepsilon \end{pmatrix},$$

$$Q_{i-1} = L_{i+1} \begin{pmatrix} -E + h^2 \beta_2^1 A_{i-1} \\ -E + h^2 \beta_2^2 A_\varepsilon \end{pmatrix}, g_{i+1} = h^2 L_{i+1} \begin{pmatrix} \psi_i \\ \varphi_\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Будем рассматривать интерполяционный случай таких схем, т.е. $t_\varepsilon \in [t_{i-1}, t_{i+1}]$, учитывая, что $t_\varepsilon = t_{i-1} + (\beta_1^2 + 2\beta_0^2)h$, получим ограничения на параметр ε

$$\varepsilon \in [0, 2]. \quad (2.10)$$

Отметим [5], что если $A(t)$ — симметричная матрица, и $d = 1$ мы получаем нормальное решение системы (2.8).

Если выполнены условия (2.4) и (2.6), то схемы (2.3) и (2.7) имеют, как минимум, первый порядок. Схема (2.9) содержит семь свободных параметров $\beta_j^i, i = 1, 2; j = 0, 1, 2$ и d , и два уравнения на порядок (2.4) и (2.6). Таким образом, мы можем выбирать свободные параметры, чтобы схемы (2.9) имели как можно более высокий порядок, или обладали преимуществами над известными схемами.

В работе [1] выписаны условия четвертого порядка на схемы (2.9), которые имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_0^1 + \beta_1^1 + \beta_2^1 = 1 \\ \beta_0^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 = 1 \\ d + 1 = \beta_1^1 + 2\beta_0^1 + d\varepsilon \\ \frac{5}{6}(d + 1) = \beta_1^1 + d\beta_1^2 \\ \frac{5}{6}(d + 1) = \beta_1^1 - d\varepsilon^2 + 2d\varepsilon, \end{array} \right.$$

и выполнено условие (2.10).

В частности, эта система имеет следующее решение

$$d = 0, \quad \beta_1^1 = \frac{5}{6}, \quad \beta_0^1 = \frac{1}{12}, \quad \beta_2^1 = \frac{1}{12},$$

со свободными параметрами $\beta_1^2, \beta_0^2, \beta_2^2, \varepsilon$. Нетрудно убедиться, что при таких коэффициентах разностная схема (2.9) совпадает с методом Нумерова.

Общее решение выше представленной системы имеет вид

$$\begin{aligned} \beta_2^2 &= \frac{1}{2}\varepsilon^2 - \frac{3}{2}\varepsilon + 1, & \beta_0^2 &= \frac{1}{2}\varepsilon^2 - \frac{1}{2}\varepsilon, & \beta_1^2 &= -\varepsilon^2 + 2\varepsilon, \\ \beta_1^1 &= \frac{5}{6}(d + 1) + d\varepsilon^2 - 2d\varepsilon, & \beta_0^1 &= \frac{1}{12}(1 + d) - \frac{1}{2}d\varepsilon^2 + \frac{1}{2}d\varepsilon, \\ \beta_2^1 &= -\frac{11}{12}d + \frac{1}{12} - \frac{1}{2}d\varepsilon^2 + \frac{3}{2}d\varepsilon, \end{aligned} \quad (2.11)$$

со свободными параметрами ε , и $d \neq -1$.

Поясним, почему параметр $d \neq -1$. Если параметр $d = -1$, то это означает, что мы из разностной схемы (2.3) вычитаем разностную схему (2.7), т.е. в левой части (2.9) получаем ноль.

Вводя обозначения $S_{i+1} = E - h^2(\frac{1}{12}(d+1) - \frac{1}{2}d\varepsilon^2 + \frac{1}{2}d\varepsilon)A_{i+1}$, $U_{i+1} = E - h^2(\frac{1}{12}\varepsilon - \frac{1}{2}B)A_\varepsilon$, перепишем разностную схему (2.9) в виде

$$\begin{aligned} (S_{i+1}^2 + dU_{i+1}^2)y_{i+1} &= (S_{i+1}(2E + h^2(\frac{5}{6}(d+1) + d\varepsilon^2 - 2d\varepsilon)A_i) - \\ &- dU_{i+1}(2E + h^2(-\varepsilon^2 + 2\varepsilon)A_\varepsilon))y_i + (S_{i+1}(-E + h^2(\frac{1}{12}(1-11d) - \frac{1}{2}d\varepsilon^2 + \frac{3}{2}d\varepsilon)A_{i-1}) - \\ &- dU_{i+1}(-E + h^2(\frac{1}{2}\varepsilon^2 - \frac{1}{2}\varepsilon + 1)A_\varepsilon))y_{i-1} + h^2(S_{i+1}\xi_i[f_i] + dU_{i+1}f_\varepsilon), \end{aligned} \quad (2.12)$$

которая содержат два свободных параметра d и ε и имеет четвертый порядок.

В частности, при $\varepsilon = 1$ мы получим семейство симметричных разностных схем (2.9). Такие схемы были детально исследованы в статье [1]. Напомним, что разностная схема называется симметричной, если $\alpha_j = \alpha_{k-j}$ и $\beta_j = \beta_{k-j}$, $j = 0, 1, \dots, [k/2]$.

Для изучения свойств устойчивости различных разностных схем Ламберт и Ватсон [3] предложили использовать следующее простое модельное уравнение

$$y'' = -k^2 y. \quad (2.13)$$

Вводя обозначение $v = hk$ любой симметричный двушаговый метод, примененный к этому уравнению, можно записать в виде

$$y_{i+1} - 2R(v^2)y_i + y_{i-1} = 0.$$

Для симметричных двушаговых схем известно

О п р е д е л е н и е 2.1. [2] *Рациональная функция $R(v^2)$ называется функцией устойчивости метода. Интервал $(0, v_0^2)$, в котором $|R(v^2)| \leq 1$ для $v^2 \leq 0 \leq v_0^2$, называется интервалом устойчивости метода. Метод называется P -устойчивый, если $|R(v^2)| \leq 1$, для любых $v^2 > 0$.*

В следующем разделе проанализированы несимметричные разностные схемы вида (2.12) и приведены области устойчивости этих схем.

3. Несимметричные схемы

Рассмотрим случай, когда $\varepsilon \neq 1$. В этом случае мы имеем семейство несимметричных схем. Для изучения свойств устойчивости рассмотрим модельное уравнение (2.13).

В этом случае, обозначая $v = hk$ любой несимметричный двушаговый метод, примененный к уравнению (2.13), можно записать в виде

$$a(d, \varepsilon, v^2)y_{i+1} + b(d, \varepsilon, v^2)y_i + c(d, \varepsilon, v^2)y_{i-1} = 0. \quad (3.1)$$

Запишем характеристическое уравнение для (3.1)

$$a(d, \varepsilon, v^2)\lambda^2 + b(d, \varepsilon, v^2)\lambda + c(d, \varepsilon, v^2) = 0. \quad (3.2)$$

Коэффициенты $a(d, \varepsilon, v^2)$, $b(d, \varepsilon, v^2)$, $c(d, \varepsilon, v^2)$ имеют очень громоздкий вид, поэтому будем исследовать свойства устойчивости полинома (3.2), используя критерий Рауса-Гурвица [4]. Для этого в формуле (3.2) произведем замену переменных $\lambda = \frac{z+1}{z-1}$, которая отображает единичную окружность в левую полуплоскость. В итоге будем иметь характеристический полином

$$\alpha(d, \varepsilon, v^2)z^2 + \beta(d, \varepsilon, v^2)z + \gamma(d, \varepsilon, v^2) = 0. \quad (3.3)$$

Коэффициенты $\alpha(d, \varepsilon, v^2)$, $\beta(d, \varepsilon, v^2)$, $\gamma(d, \varepsilon, v^2)$ имеют менее громоздкий вид, чем коэффициенты $a(d, \varepsilon, v^2)$, $b(d, \varepsilon, v^2)$, $c(d, \varepsilon, v^2)$. Приведем их вид

$$\alpha(d, \varepsilon, v^2) = 1 + \frac{1}{12}v^2 + \frac{1}{12}v^2d + d,$$

$$\beta(d, \varepsilon, v^2) = 2d - 2d\varepsilon + \frac{1}{12}v^2d - \frac{7}{12}v^2d\varepsilon + \frac{1}{12}v^2d^2 + \frac{5}{12}v^2d^2\varepsilon - v^2d^2\varepsilon^2 + \frac{1}{12}v^2d^2\varepsilon^3 + \frac{3}{12}v^2d\varepsilon^2 - v^2d\varepsilon^3,$$

$$\gamma(d, \varepsilon, v^2) = 4 - \frac{1}{3}dv^2 - \frac{1}{3}v^2 - \frac{7}{36}v^4d - \frac{5}{36}v^4d^2 + \frac{8}{3}v^2d\varepsilon^2 + \frac{8}{3}v^2d^2\varepsilon^2 - \frac{1}{2}v^4d^2\varepsilon + v^4d^2\varepsilon^4 - 3v^4d^2\varepsilon^3 - \frac{1}{18}v^4 + 4d + dv^4\varepsilon^4 - dv^4\varepsilon^3 - \frac{1}{2}dv^4\varepsilon.$$

Корни характеристического уравнения (3.2) по модулю меньше единицы, т.е. выполнены неравенства [4]

$$\begin{cases} \alpha(d, \varepsilon, v^2) \geq 0 \\ \beta(d, \varepsilon, v^2) \geq 0 \\ \gamma(d, \varepsilon, v^2) \geq 0 \end{cases} . \quad (3.4)$$

Приведем области значений d и v при различных значениях ε при которых выполнена система неравенств (3.4). Эти области называются областями устойчивости, на рисунках они заштрихованы.

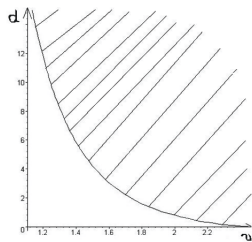


Рис. 1: Область устойчивости при $\varepsilon = 0$.

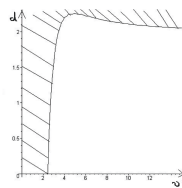


Рис. 2: Область устойчивости при $\varepsilon = 1$.

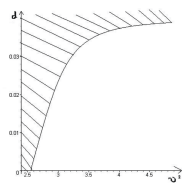


Рис. 3: Область устойчивости при $\varepsilon = 2$.

4. Численные эксперименты

В данном разделе приведены результаты численных расчетов тестовых примеров при различных параметрах d . При проведении этих расчетов стартовые значения y_0 и y_1 выбирались как точные значения $y(t_0)$ и $y(t_1)$ соответственно.

Пример 1. Рассмотрим задачу

$$y''(t) = \left(\frac{2a}{t^3} + \frac{a^2}{t^4}\right)y(t), t \in [1, 10], a = -20,$$

которое имеет точное решение

$$y(t) = e^{-20/t},$$

где $y_0 = y(1) = e^{-20}$ и $y_1 = y(1+h) = e^{-20/(1+h)}$.

На отрезке $[1, 10]$ зададим равномерные сетки с шагами $h_j = 0.2/2^j$, $j = 1, 2, 3$ и обозначим $er_j = |e^{-2} - y_{N_j}|$, $N_j = 9/h_j$. Результаты вычислений представлены в таблице 1 и таблице 2 при $\varepsilon = 1$ и $\varepsilon = 2$ соответственно.

d	h=0.1	h=0.05	h=0.025
0	$3 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-6}$
2	$5 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-5}$
3	$7 \cdot 10^{-3}$	$8 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^{-5}$
5	$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-4}$

Таблица 1: Результаты вычислений при $\varepsilon = 1$.

d	h=0.1	h=0.05	h=0.025
2	$1 \cdot 10^{-2}$	$6 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-4}$
3	$1 \cdot 10^{-2}$	$8 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$
5	$1 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-3}$

Таблица 2: Результаты вычислений при $\varepsilon = 2$.

Напомним, что при $d = 0$ мы имеем метод Нумерова. Как видно из таблиц при любых значениях h метод Нумерова предпочтительнее (дает более точные результаты вычислений) схем (2.12), но следующий пример иллюстрирует преимущества предложенных схем над методом Нумерова.

Пример 2. Рассмотрим модельную задачу [3]

$$y''(t) = -k^2 y(t), t \in [0, 4\pi], k = 5,$$

и в качестве точного решения возьмем

$$y(t) = \sin(5t),$$

где $y_0 = y(0) = 0$ и $y_1 = y(h) = \sin(5h)$.

На отрезке $[0, 4\pi]$ зададим равномерные сетки с шагами $h_j = \pi/2^j$, $j = 1, 2, 3, 4$ и обозначим $er_j = |\sin 20\pi - y_{N_j}| = |y_{N_j}|$, $N_j = 4\pi/h_j$. Результаты вычислений представлены в таблице 3 при $\varepsilon = 2$. Результаты вычислений при $\varepsilon = 1$ представлены в статье [1].

d	$h = \pi/2$	$h = \pi/4$	$h = \pi/8$	$h = \pi/16$
0	*	*	$6 \cdot 10^{-7}$	$4 \cdot 10^{-13}$
1	$2 \cdot 10^{-2}$	$8 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^{-13}$	$5 \cdot 10^{-14}$
3	$6 \cdot 10^{-1}$	$5 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-13}$	$5 \cdot 10^{-14}$
5	$1 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-14}$	$5 \cdot 10^{-14}$

Таблица 3: Результаты вычислений при $\varepsilon = 2$.

Из данной таблицы видно, что методы предложенные в статье, предпочтительнее метода Нумерова, т.к. справляются со вторым примером с более крупным шагом интегрирования.

Работа поддержана грантом РФФИ №11-01-00639-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bulatov M. V., Vanden Berge G. Two-step fourth order methods for linear ODEs of the second order // Vol. 51. № 4. 2009. – P. 449–460.
2. Ixaru L. Gr., Vanden Berghe G. Exponential Fitting. – Kluwer Academic Puplicher, Dordrevht, Boston, London, 2004. – 201 p.
3. Lambert J. D., Watson I. A. Symmetric multistep methods for periodic initial value problems. - -J. Inst. Math. Appl., 1976. – P. 189 – 202.
4. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1967.– С.483 - 488.
5. Тихонов А.Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986.– 112 с.

Not classic difference schemes for ordinary differential equations of the second order(initial value problems)

© M. V. Bulatov⁴, T. V. Amocova⁵, G. Vanden Berge⁶

Abstract. In this paper we consider the initial problem for systems of linear ordinary differential equations of second order which do not content the first derivative. To solve such problems numerically, we propose new two-step difference schemes of order 4-th. We give a thorough analysis of the schemes proposed, compare them with well-known ones, and test them on modal examples.

Key Words: ordinary differential equations of second order, initial value problems, difference schemes, Numerov method.

⁴Chif reseacher, ISDCT SB RAS, Irkutsk; mvbul@icc.ru.

⁵Post-graduate student Irkutsk State Pedagogical Academy, Irkutsk; tatjanaams@rambler.ru

⁶Professor, Gent University, Gent; Guido.VandenBerghe@Gent.be