В Средневолжском математическом обществе

УДК 517.9

Альтернативные системы дифференциальных уравнений плотности дислокаций для крутильной жёсткости стержней

© С. Н. Алексеенко [1], С. Н. Нагорных [2]

Аннотация. На основе диффузионной теории упругости выведены дифференциальные уравнения, описывающее динамику крутильной жесткости стержней. Изложена принципиальная схема применения метода дополнительного аргумента к нелинейному дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка, предназначенному в рамках данного подхода для описания стационарных диссипативных структур

Ключевые слова: плотность дислокаций, диффузионная неупроугость, нелинейное уравнение первого порядка в частных производных, метод дополнительного аргумента

Известно, что упругая крутильная жесткость (КЖ) тонких стержней вычисляется как количество вязкой жидкости, протекающей через трубу соответствующего сечения [1]. Роль такой жидкости в твёрдом поликристаллическом стержне могут играть дислокации - элементарные носители деформации, динамикой которых описывают многие механические свойства [1].

Целью настоящей работы является разработка метода вычисления КЖ тонких стержней на основе диффузионной дислокационной модели [3] и теории упругости [1].

Диффузионная модель дислокаций основана на кинетике скалярных плотностей скользящих ν_δ и переползающих ν дислокаций [3]:

$$\dot{nu}_\delta = G - a_\delta\nu_\delta - b\nu_\delta\nu, \tag{1.1}$$

$$\dot{nu} = b\nu_\delta\nu - a_M(\nu)\nu + Sdiv[(\nu_\kappa - \nu)\nabla\nu], \tag{1.2}$$

где $\nu_\kappa, G, a_\delta, b, S$ - постоянные величины, $a_M(\nu)$ - сток переползающих дислокаций, ∇ - трёхмерный градиент. Через ν_δ, ν определяются деформация, напряжение материала, а также в точке переключения $\nu_\delta = a_M b^{-1}$ около однородного решения определяется зарождение продольных и поперечных трещин, как неустойчивый рост ν до критического значения ν_κ при равенстве нулю потоков на внешней поверхности стержня

$$\frac{\partial\nu}{\partial z}\Big|_{\substack{z=0\\ z=l}} = 0, \qquad \frac{\partial\nu}{\partial r}\Big|_{r=R} = 0. \tag{1.3}$$

где l - расстояние вдоль оси, R - радиус стержня. В данной статье рассматриваются возможности расщепления решения системы (1.1) - (1.2)

$$\nu(x,y,z) = \tilde{\nu}(x,y) + \bar{\nu}(z) \tag{1.4}$$

[1]Профессор кафедры прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е.Алексеева, г. Нижний Новгород; sn-alekseenko@yandex.ru

[2]Доцент кафедры теоретической физики, Нижегородский педуниверситет, г. Нижний Новгород; algoritm@sandy.ru

в стационарном случае.

Подставив (1.4) в (1.1) - (1.2) и исключив ν_δ, получим

$$S\nu_\kappa\Delta(\bar{\nu}+\tilde{\nu})-S(\bar{\nu}+\tilde{\nu})\Delta(\bar{\nu}+\tilde{\nu})-S(\nabla(\bar{\nu}+\tilde{\nu}))^2+\left[\frac{bG}{a_\delta+b(\bar{\nu}+\tilde{\nu})}-a_M(\bar{\nu}+\tilde{\nu})\right](\bar{\nu}+\tilde{\nu})=0. \quad (1.5)$$

В первом варианте расщепления вида (1.4) допустим, что $\tilde{\nu}$ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta\tilde{\nu}=-1, \quad (1.6)$$

где $\tilde{\nu}=const$ на контуре сечения стержня радиуса R. Оставшиеся слагаемые в (1.5) составят уравнение

$$-S\nu_\kappa+S\nu_\kappa\Delta\bar{\nu}-S(\bar{\nu}+\tilde{\nu})\Delta\bar{\nu}+S(\bar{\nu}+\tilde{\nu})-S(\nabla(\bar{\nu}+\tilde{\nu}))^2+\left[\frac{bG}{a_\delta+b(\bar{\nu}+\tilde{\nu})}-a_M(\bar{\nu}+\tilde{\nu})\right](\bar{\nu}+\tilde{\nu})=0. \quad (1.7)$$

Примем в рамках этого подхода, что $\tilde{\nu}<<\bar{\nu}$, поэтому слагаемыми с $\tilde{\nu}$ в (1.7) можно пренебречь. Тогда получим

$$-S\nu_\kappa+S\nu_\kappa\Delta\bar{\nu}-S\bar{\nu}\Delta\bar{\nu}+S\bar{\nu}-S(\nabla(\bar{\nu}))^2+\left[\frac{bG}{a_\delta+b\bar{\nu}}-a_M(\bar{\nu})\right]\bar{\nu}=0. \quad (1.8)$$

Предполагая, что $\nu_\kappa>>\bar{\nu}$ и $(\nabla\bar{\nu})^2=(C_1^2+2C_1\delta\bar{\nu}')(1-\delta^2)^{-1}$, где C_1,δ - постоянные, получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с бифуркацией Богданова - Такенса [4]:

$$\bar{\nu}''-(\mu_1+\mu_2\bar{\nu})\bar{\nu}'+f_1(\bar{\nu})=0, \quad (1.9)$$

где $\mu_1:=\frac{2C_1\delta}{(1-\delta^2)\nu_\kappa}$, $\quad \mu_2:=\frac{4C_1\delta}{(1-\delta^2)\nu_\kappa^2}$, $\quad f_1:=A\bar{\nu}+B\bar{\nu}^2-C_2$, $\quad A,B,C_2$ - постоянные.

Вычтя из (1.5) уравнение (1.7), получим

$$(\triangle\tilde{\nu}+1)(\nu_\kappa-\nu)=0. \quad (1.10)$$

Выражение (1.10) описывает два события: либо возникновение распределения дислокаций при упругом кручении, либо при неупругом кручении. Последнее проистекает ввиду зануления квазилинейной диффузии дислокаций сразу по двум причинам: равенство нулю коэффициента диффузии и лапласиана от ν. Чтобы раздельно исследовать роли того и другого явления, допустим $\nu\approx\nu_\kappa$. Значение символа ν_κ состоит в том, что плотность дислокаций имеет критическое значение, при котором материал стержня течёт подобно жидкости. В [3] исследовалось дислокационное зарождение трещин при циклическом кручении стержней, причем $\nu_\kappa^\top$ имел смысл критической плотности дислокаций, вызывающей зарождение продольных или поперечных трещин в стержне. Вообще, ν_κ является универсальной величиной во всех процессах стимулированной диффузии [3]. Этим и объясняется особый интерес изучения квазилинейного дифференциального уравнения (1.2), когда ν достаточно близко к ν_κ.

Так что, беря в другом варианте расщепления в (1.5) $\tilde{\nu}(x,y)+\bar{\nu}(z)\approx\nu_\kappa$, придём к уравнению:

$$S(\nabla(\bar{\nu}+\tilde{\nu}))^2=\left[\frac{bG}{a_\delta+b(\bar{\nu}+\tilde{\nu})}-a_M(\bar{\nu}+\tilde{\nu})\right](\bar{\nu}+\tilde{\nu}). \quad (1.11)$$

Допуская, кроме того, что $\tilde{\nu}>>\bar{\nu}$, раскладывая правую часть (1.11) в ряд Тейлора по $\bar{\nu}$ вблизи $\tilde{\nu}$ и ограничиваясь членами первого порядка малости по $\bar{\nu}$, получим:

$$(\nabla\tilde{\nu})^2=f(\tilde{\nu})\bar{\nu}, \quad (1.12)$$

$$\left(\frac{d\bar{\nu}}{dz}\right)^2 = \Phi\bar{\nu}, \tag{1.13}$$

где

$$f(\tilde{\nu}) = \frac{1}{S}\left[\frac{bG}{a_\delta + b\tilde{\nu}} - a_M(\tilde{\nu})\right],$$

$\Phi = f'(\nu_\kappa)\nu_\kappa + f(\nu_\kappa),\ f'(\nu_\kappa) = -\frac{1}{S}\left[\frac{b^2G}{(a_\delta+b\nu_\kappa)^2} - a'_M(\nu_\kappa)\right].$

Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка (1.13) при начальном условии $\bar{\nu}|_{z=0} = \bar{\nu}_0^2 = const > 0$ имеет решение

$$\bar{\nu} = \left(\frac{\sqrt{\Phi}}{2}z \pm \bar{\nu}_0\right)^2. \tag{1.14}$$

Система уравнений (1.6), (1.9) относится к упругому кручению со слабодиссипативной динамикой $\bar{\nu}$ вдоль оси кручения [4]. Уравнение (1.12) описывает движение $\tilde{\nu}$ с диссипативной динамикой, т.к. в соответствии с [5] величина $(\nabla\tilde{\nu})^2$ характеризует диссипацию.

Согласно [1] КЖ C при модуле сдвига μ будет равна:

$$\int_{\tilde{S}} \mu(\nabla\tilde{\nu})^2 dxdy = C. \tag{1.15}$$

Учитывая определение вектора Бюргерса $\vec{b}$ в [1]:

$$\int_{\tilde{S}} \tilde{\nu}dxdy = \vec{b},$$

имеем упругую C либо квазиупругую $\tilde{C}$ КЖ в линейном по $\tilde{\nu}$ приближении: $C = \mu\frac{\pi R^4}{2}$, $\tilde{C} = \frac{1}{S}\left(\frac{bG}{a_\delta} - a_M\right)\vec{b}$. Момент кручения $M = \tau C$ при $\tau = const$ будет определять упругое либо неупругое кручение. В общем случае КЖ C из (1.15) вычисляется на основе решения уравнения (1.12).

Сформулируем итог вышеприведенных выкладок в виде следующего утверждения: *Если в точке переключения* $\nu_\delta = a_M(\nu)b^{-1}$, $\nu = \tilde{\nu} + \bar{\nu}$, $\tilde{\nu}|_S \neq 0$, $\bar{\nu}(z_0) \neq 0$, *то стационарное трёхмерное уравнение стимулированной диффузии* (1.2) *при* $\nu \approx \nu_\kappa$, $\tilde{\nu} >> \bar{\nu}$ *сводится к системе дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных* (1.12) *и в обыкновенных производных* (1.13), *а при* $\tilde{\nu} << \bar{\nu} << \nu_\kappa$ *сводится к системе дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных* (1.6) *и в обыкновенных производных* (1.9).

Кроме В.И.Таланова в цитированной выше работе [5], величину $(\nabla\tilde{\nu})^2$ определяли как диссипацию Я.Б.Зельдович [2]и другие авторы. Так что мы можем с полным основанием называть уравнение (1.12), полученное в данной работе, уравнением *стационарных диссипативных структур.*

Применим для исследования уравнения (1.12) метод дополнительного аргумента (МДА) [6, 7, 8], который даёт возможность анализировать условия существования решений и строить численные решения в исходных координатах. Опишем принципиальную схему исследования задачи Коши для уравнения (1.12) с помощью МДА.

Так как уравнение (1.12) рассматривается в круге $x^2 + y^2 \leq R^2$ с дополнительными условиями на окружности, то вначале перейдём к полярным координатам. Обозначив $u(r,\varphi) = \tilde{\nu}(x,y)$, получим уравнение

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2 = f(u)u \tag{1.16}$$

с начальным условием

$$u|_{r=R} = g(\varphi), \tag{1.17}$$

причем функцию $g(\varphi)$ не будем предполагать периодической по φ, этим самым учитывая в плоской задаче изменение условий вдоль стержня.

Преобразуем уравнение (1.16) к системе квазилинейных уравнений. И, чтобы не менять структуру МДА, сделаем в задаче (1.16)-(1.17) замену независимой переменной: $\rho = R-r$. В результате придем к задаче Коши:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{(R-\rho)^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2 = f(u)u, \tag{1.18}$$

$$u|_{\rho=0} = g(\varphi). \tag{1.19}$$

Дальнейшие преобразования нелинейного уравнения (1.18) зависят от предположений о знаках $\partial_\rho u$ и $\partial_\varphi u$. В данной работе будем исходить их того, что в направлении от границы вглубь стержня $\tilde{\nu}$ уменьшается. Тогда из (1.18) следует

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = -\sqrt{f(u)u - \frac{1}{(R-\rho)^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2}. \tag{1.20}$$

Обозначив $q = \frac{1}{R-\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}$ и продифференцировав (1.18) по φ , получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \varphi} = \frac{f'(u)u\frac{\partial u}{\partial \varphi} + f(u)\frac{\partial u}{\partial \varphi} - 2q\frac{\partial q}{\partial \varphi}}{-2\sqrt{f(u)u - q^2}}.$$

Разделив последнее равенство на $R-\rho$ и учитывая, что

$$\frac{1}{R-\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{R-\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right) - \frac{1}{(R-\rho)^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi},$$

придем к уравнению

$$\frac{\partial q}{\partial \rho} - \frac{q}{(R-\rho)\sqrt{f(u)u-q^2}}\frac{\partial q}{\partial \varphi} = -\left[\frac{f'(u)u + f(u)}{2\sqrt{f(u)u-q^2}} - \frac{1}{R-\rho}\right]q. \tag{1.21}$$

Обозначив

$$A(\rho,u,q) = \frac{q}{(R-\rho)\sqrt{f(u)u-q^2}},$$

$$B(\rho,u,q) = \frac{f'(u)u + f(u)}{2\sqrt{f(u)u-q^2}},$$

перепишем уравнение (1.21)в виде:

$$\frac{\partial q}{\partial \rho} - A(\rho,u,q)\frac{\partial q}{\partial \varphi} = -\left[B(\rho,u,q) - \frac{1}{R-\rho}\right]q. \tag{1.22}$$

С учетом (1.20) "сконструируем"уравнение для u с тем же самым дифференциальным оператором:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} - A(\rho,u,q)\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\sqrt{f(u)u-q^2} - A(\rho,u,q)q. \tag{1.23}$$

Из (1.17) для $u(\rho,\varphi)$ вытекает начальное условие

$$u|_{\rho=0} = g(\varphi). \tag{1.24}$$

Соответственно, для $u(\rho,\varphi)$ в качестве начального условия возьмём

$$q|_{\rho=0} = \frac{1}{R}g(\varphi). \tag{1.25}$$

Составим для задачи (1.22) - (1.25) расширенную характеристическую систему с дополнительным аргументом:

$$\frac{d\eta(s,\rho,\varphi)}{ds} = A(s,w_1,w_2), \qquad \eta|_{s=\rho} = \varphi, \tag{1.26}$$

$$\frac{dw_1(s,\rho,\varphi)}{ds} = -\sqrt{f(w_1)w_1 - w_2^2} - A(s,w_1,w_2)w_2, \tag{1.27}$$

$$w_1|_{s=0} = g(\eta(0,\rho,\varphi)), \tag{1.28}$$

$$\frac{dw_2(s,\rho,\varphi)}{ds} = -\left[B(s,w_1,w_2) - \frac{1}{R-s}\right]w_2, \tag{1.29}$$

$$w_2|_{s=0} = \frac{1}{R}g'(\eta(0,\rho,\varphi)). \tag{1.30}$$

Предположим, что

$$f(g(\varphi))g(\varphi) - \frac{(g'(\varphi))^2}{R^2} > 0 \tag{1.31}$$

для всех $\varphi \in (-\infty,\infty)$.

Преобразуем задачу (1.26) - (1.30) в систему интегральных уравнений. Так как в правую часть (1.26) искомая функция $\eta(s,\rho,\varphi)$ не входит, то для неё получим не уравнение, а выражение. В результате придём к системе двух интегральных уравнений:

$$w_1(s,\rho,\varphi) = g(\varphi - \int_0^\rho A(\nu,w_1,w_2)d\nu) - \int_0^s \left[\sqrt{f(w_1)w_1 - w_2^2} - A(\tau,w_1,w_2)w_2\right]d\tau, \tag{1.32}$$

$$w_2(s,\rho,\varphi) = \frac{g'(\varphi - \int_0^\rho A(\nu,w_1,w_2)d\nu)}{R-\rho}\exp\left(-\int_0^s B(\tau,w_1,w_2)d\tau\right) \tag{1.33}$$

относительно двух неизвестных функций $w_1(s,\rho,\varphi), w_2(s,\rho,\varphi)$.

Доказательство существования локального решения системы интегральных уравнений (1.32) - (1.33) и построение для неё численного решения в достаточно узкой полоске вблизи окружности $x^2+y^2=R^2$ может быть осуществлено с помощью метода последовательных приближений. Путем непосредственных оценок доказывается, что существует такая постоянная величина T, что при $0<\rho\le T$ последовательные приближения сходятся. Дифференцируя рекуррентные соотношения для последовательных приближений, можно убедиться, что при достаточно малом T решение системы (1.32) - (1.33) будет дифференцируемо по всем своим аргументам. Функции $u(\rho,\varphi) = w_1(\rho,\rho,\varphi), q(\rho,\varphi) = w_2(\rho,\rho,\varphi)$. дадут решение задачи Коши (1.22) - (1.25), а функция $u(\rho,\varphi)$ будет непрерывно дифференцируемым решением задачи (1.18) - (1.19), где $f(u) = \frac{1}{S}\left[\frac{bG}{a_\delta+bu} - a_M(u)\right]$.

Т е о р е м а 1.2. *Пусть a_M дважды непрерывно дифференцируемая функция, $g(\varphi)\in C^2(-\infty,\infty)$, выполнено условие* (1.31)*. Тогда задача* (1.16) - (1.17) *имеет непрерывно дифференцируемое ограниченное решение $u(\rho,\varphi)$ в области $R-T\le r\le R, -\infty<\varphi<\infty$, где число T определяется явным образом из исходных данных.*

Список литературы

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. М. Наука.1987.- 245 с.
2. Зельдович Я.Б. Предельный закон теплопередачи во внутренней задаче при малых скоростях. ЖЭТФ,1937, т.7, в.12, с.1466 - 1468.
3. Крупкин П.Л., Куров И.Е., Нагорных С.Н., Цыванюк К.И. Феноменологическая модель эволюции дислокационных структур при циклическом кручении. ФММ, 1988, т.66, в.5, с. 978-984.
4. Богданов Р.И. Нелинейные динамические системы на плоскости и их приложения. - М. "Вузовская наука"2003, - 376 с.
5. Таланов В.И. Стимулированная диффузия и кооперативные эффекты в распределенных кинетических ситемах. Сб."нелинейные волны". - М. Наука, 1983, с 47 - 56.
6. Иманалиев М.И., Алексеенко С.Н. К теории нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема. Доклады Академии наук, 1992, т.323, №3. -5с.
7. Иманалиев М.И., Алексеенко С.Н. К вопросу существования гладкого ограниченного решения для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Доклады РАН, 2001, т.379, №1. - 5 с.
8. Алексеенко С.Н., Нагорных С.Н. Нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка плотности дислокаций// Журнал СВМО, 2010, т. 12, №1. С.41-45.

Alternative systems of the dislocation density partial differential equation for the torsional stiffness of rods

© S. N. Alekseenko[3], S. N. Nagornyh[4]

Abstract. On the base of the theory of elasticity, the equations governing a dynamics of the dislocation density for the torsional stiffness of rods is obtained. In is presented a basic scheme to apply the method of additional argument for solving a first-order nonlinear partial differential equation assigned within the framework of an approach under consideration to describe pseudoequilibrated dissipative structures.

Key Words: dislocation density, diffusion unelasticity, nonlinear first-order partial differential equations, method of additional argument.

[3]The professor of the applied mathematics chair, Nizhniy Novgorod State Technical University, Nizhniy Novgorod; sn-alekseenko@yandex.ru

[4]The senior lecture of the theoretical physics chair, Nizhniy Novgorod State Pedagogical University, Nizhniy Novgorod; algoritm@sandy.ru