

УДК 51.7:532.546

Математическое исследование системы уравнений газогидратных процессов в пористой среде

© Г. И. Казакевич¹, Л. В. Клочкова², Ю. А. Повещенко³, В.Ф. Тишкин⁴

Аннотация. В настоящее время газовые гидраты рассматриваются как потенциальные источники углеводородов. Методами математической физики исследована система массовых и энергетических балансов, описывающая динамику флюидов: совместного поведения свободных гидратов, воды, газа и их энергетическое взаимодействие с неподвижным скелетом. В результате исходная краевая задача расщеплена на основное диссипативное уравнение теории гидратов, определяющее "термодинамическую" эволюцию параметров системы, и сатурационную часть, описывающую "гиперболическое" поведение среды, насыщенной гидратом и флюидами.

Ключевые слова: газовые гидраты, углеводороды, методы математической физики

1. Введение

Газовым гидратам уделено большое внимание в литературе [1]. По имеющимся данным объем углеводородного газа, содержащегося в гидратах, значительно превосходит остальные его запасы. В основе математического описания процессов диссоциации газовых гидратов в пористой среде [2] - [4] лежат уравнения механики сплошной среды, выражающие законы сохранения массы, импульса и энергии.

Исходные уравнения неразрывности (по компонентный массовый флюидобаланс в свободном и связанном состояниях) могут быть записаны в форме

$$\frac{\partial}{\partial t} \{m(S_\nu S_w \rho_w + (1 - S_\nu) \rho_\nu \beta_w)\} + \operatorname{div} [\rho_w \vec{V}_w] + q_w = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \{m(S_\nu(1 - S_w)\rho_g + (1 - S_\nu) \rho_\nu(1 - \beta_w))\} + \operatorname{div} [\rho_g \vec{V}_g] + q_g = 0. \quad (1.2)$$

Здесь индексы g , w , ν относятся к газу, воде, гидрату, скелету пористой среды, т.е. соответствующие фазе l ; P - давление, S_w - водонасыщенность, ν - гидратонасыщенность, $S_\nu = 1 - \nu$ - растепленность, $\rho_l(P, T)$ - плотности фаз, β_w - массовая доля воды в гидрате, \vec{r} - радиус-вектор, t - время, $q_g(t, \vec{r}, S_w, S_\nu, P)$, $q_w(t, \vec{r}, S_w, S_\nu, P)$ - плотности источников соответствующих фаз, \vec{V}_w , \vec{V}_g - скорости фильтрации воды и газа, определяемые законом Дарси с учетом гравитации в среде с общим давлением P :

$$\vec{V}_w = -\frac{kk_{rw}}{\mu_w}(\nabla P - G\rho_w \vec{k}), \quad (1.3)$$

¹Старший научный сотрудник Института океанологии им. П.П. Ширшова РАН, г. Москва; gkazakevich@yandex.ru.

²Старший научный сотрудник Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, г. Москва; klud@imamod.ru.

³Ведущий научный сотрудник Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, г. Москва; poveshchenko@keldysh.ru.

⁴Заместитель директора Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, г. Москва; tishkin@imamod.ru.

$$\vec{V}_g = -\frac{k k_{rg}}{\mu_g} (\nabla P - G \rho_g \vec{k}), \quad (1.4)$$

где \vec{k} – вертикальный координатный орт, G – ускорение свободного падения, $k(\vec{r}, s_\nu, P)$ – абсолютная проницаемость, $k_{rg}(S_w)$, $k_{rw}(S_w)$ – фазовые проницаемости, $\mu_g(P, T)$, $\mu_w(P, T)$ – вязкости, $m(\vec{r}, P)$ – пористость.

Систему уравнений (1.1)–(1.2) при фиксированных значениях определяющих термодинамических переменных будем называть сатурационным блоком, имея в виду, что эти уравнения служат для определения влагонасыщенности S_w и растепленности S_ν .

Внутренняя энергия гидрата выражается через энергии создающих его газа и воды следующим образом:

$$\beta_w i_w + (1 - \beta_w) i_g = i_\nu + h, \quad (1.5)$$

где h – скрытая теплота фазового перехода единицы массы гидрата, i_g , i_ν – энтальпии газа и воды соответственно.

Пусть l – индекс, указывающий фазу, то $i_l = \varepsilon_l + P/\rho_l$ – энтальпии фаз, $\varepsilon_l(P, T)$ – внутренние энергии фаз; $\lambda_l(P, T)$ – коэффициенты теплопроводности фаз.

Уравнение энергии имеет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \{m(S_\nu(S_w \rho_w \varepsilon_w + (1 - S_w) \rho_g \varepsilon_g) + (1 - S_\nu) \rho_\nu \varepsilon_\nu) + (1 - m) \rho_s \varepsilon_s\} + \\ & + \operatorname{div} \left\{ \rho_w \varepsilon_w \vec{V}_w + \rho_g \varepsilon_g \vec{V}_g + P(\vec{V}_w + \vec{V}_g) \right\} + \operatorname{div} \vec{W} + q_\varepsilon = 0, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $\vec{W} = -(m(S_\nu(S_w \lambda_w + (1 - S_w) \lambda_g) + (1 - S_\nu) \lambda_\nu) + (1 - m) \lambda_s) \nabla T$.

2. Постановка задачи

Состояние гидрата описывается соотношением фазового равновесия

$$T = A \ln P + B, \quad (2.1)$$

где A и B – эмпирические константы.

В силу этого соотношения, в выражениях для всех параметров, где встречается зависимость от T , ее можно свести к зависимости от P .

Выше приведенная система (1.1)–(1.6) является сложной квазилинейной системой уравнений математической физики смешанного типа. Для математического исследования и численного решения в случае двухфазной фильтрации применяется расщепление ее на уравнение относительно насыщенности одной из фаз и уравнение для давления [5]. В рассматриваемой задаче также удастся провести подобное расщепление.

3. Общий подход к решению системы (1.1)–(1.6)

Система (1.1)–(1.6) состоит из функционального блока, отвечающего за характеристический перенос сатурационных возмущений (в математическом плане – это гиперболичность в независимых переменных S_ν , S_w на фоне фиксированных давлений P) и функционального блока, описывающего диссипативные характеристические гидратные процессы переноса, обусловленные нестационарным во времени давлением P (первого порядка

$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ над пространственными дифференциальными операциями второго порядка в терминах вектора ∇). В последнем случае независимой переменной является давление P при фиксированных сатурациях S_ν и S_w .

Оказалось, что полученное диссипативное гидратное уравнение содержит в своей структуре "термодинамические" блоки с некоторыми интегрирующими множителями $\frac{\psi}{m\rho_\nu}$ и δ_ε в виде скачков удельных (на единицу массы) объемов и внутренней энергии при фазовом переходе. Эти неотрицательные множители или их аддитивные компоненты, отсутствующие в исходной дивергентной форме записи гидратных уравнений (1.1) – (1.6), могут быть использованы как для корректного физического анализа параметров задачи (например, $(S_w)_{\min}$, $(S_w)_{\max}$ для относительных фазовых проницаемостей), так и для численного явного выделения эволюционно устойчивых аппроксимируемых блоков.

4. Вывод диссипативного уравнения теории гидратов

Из уравнений массовых флюидобалансов (1.1) – (1.2) следует

$$\frac{S_w}{\rho_w} \frac{\partial}{\partial t} (m S_\nu \rho_w) + \frac{1 - S_w}{\rho_g} \frac{\partial}{\partial t} (m S_\nu \rho_g) + \left(\frac{\beta_w}{\rho_w} + \frac{1 - \beta_w}{\rho_g} \right) \frac{\partial}{\partial t} [m(1 - S_\nu) \rho_\nu] + DIG = 0, \quad (4.1)$$

где

$$DIG = \frac{1}{\rho_w} \operatorname{div} (\rho_w \vec{V}_w) + \frac{1}{\rho_g} \operatorname{div} (\rho_g \vec{V}_g) + \left(\frac{q_w}{\rho_w} + \frac{q_g}{\rho_g} \right). \quad (4.2)$$

Из уравнения баланса внутренней энергии (1.6) системы (1.1) – (1.6) с учетом (1.1) – (1.2) аналогично следует

$$m S_\nu \left[S_w \rho_w \frac{\partial \varepsilon_w}{\partial t} + (1 - S_w) \rho_g \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial t} \right] + \frac{\partial}{\partial t} [m(1 - S_\nu) \rho_\nu \varepsilon_\nu + (1 - m) \rho_s \varepsilon_s] - [\varepsilon_w \beta_w + \varepsilon_g (1 - \beta_w)] \frac{\partial}{\partial t} [m(1 - S_\nu) \rho_\nu] + DIG_\varepsilon = 0, \quad (4.3)$$

где

$$DIG_\varepsilon = \left[\operatorname{div} (\rho_w \varepsilon_w \vec{V}_w) - \varepsilon_w \operatorname{div} (\rho_w \vec{V}_w) \right] + \left[\operatorname{div} (\rho_g \varepsilon_g \vec{V}_g) - \varepsilon_g \operatorname{div} (\rho_g \vec{V}_g) \right] + \operatorname{div} \left[P (\vec{V}_w + \vec{V}_g) \right] + \operatorname{div} \vec{W} + (q_\varepsilon - \varepsilon_w q_w - \varepsilon_g q_g) = \\ = \rho_w \vec{V}_w \nabla \varepsilon_w + \rho_g \vec{V}_g \nabla \varepsilon_g + \operatorname{div} \left[P (\vec{V}_w + \vec{V}_g) \right] + \operatorname{div} \vec{W} + (q_\varepsilon - \varepsilon_w q_w - \varepsilon_g q_g). \quad (4.4)$$

В уравнениях (4.1), (4.3) влагонасыщенность S_w уже не содержится под знаком дифференцирования по времени.

Действуя аналогичным образом и вводя при фазовом переходе неотрицательные:
– скачок удельного объема (на единицу массы)

$$\frac{\psi}{m\rho_\nu} = \left(\varphi - \frac{1}{\rho_\nu} \right) \geq 0, \quad \varphi = \frac{\beta_w}{\rho_w} + \frac{1 - \beta_w}{\rho_g}; \quad (4.5)$$

– скачок удельной внутренней энергии (на единицу массы)

$$\delta_\varepsilon = \beta_w \varepsilon_w + (1 - \beta_w) \varepsilon_g - \varepsilon_\nu \geq 0, \quad (4.6)$$

исключим из под знака дифференцирования по времени в уравнениях (2.1), (4.2) и вторую сатурационную переменную – растепленность S_ν . Получим

$$\begin{aligned}
& m\delta_\varepsilon \left\{ S_\nu \left[S_w \frac{(\rho_w)_t}{\rho_w} + (1 - S_w) \frac{(\rho_g)_t}{\rho_g} \right] + (1 - S_\nu) \frac{(\rho_\nu)_t}{\rho_\nu} + \frac{m_t}{m} \right\} + \\
& + \frac{\psi}{m\rho_\nu} \{ m \{ S_\nu [S_w \rho_w (\varepsilon_w)_t + (1 - S_w) \rho_g (\varepsilon_g)_t] + (1 - S_\nu) \rho_\nu (\varepsilon_\nu)_t \} + [(1 - m) \rho_s \varepsilon_s]_t + \\
& + \delta_\varepsilon DIG + \frac{\psi}{m\rho_\nu} DIG_\varepsilon = 0.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Выражение (4.7) – основное диссипативное уравнение теории гидратов для определения давления P .

Таким образом, система свелась к сатурационному блоку (4.1), (4.3) и диссипативному уравнению (4.7).

При численном решении этой системы для сатурационного блока можно адаптировать методы, разработанные для систем гиперболического типа, а для диссипативного уравнения – методы решения параболических уравнений.

5. Заключение

Теоретически методами математической физики исследована система массово-энергетических балансов, описывающая флюидодинамику совместного поведения свободных гидратов, воды, газа и их энергетическое взаимодействие с неподвижным скелетом. В результате исходная краевая задача расщеплена на основное диссипативное уравнение теории гидратов, определяющее "термодинамическую" эволюцию параметров системы, и сатурационную часть, описывающую "гиперболическое" поведение насыщенностей среды гидратом и флюидами. Результаты этих исследований дают возможность корректно строить вычислительные алгоритмы для соответствующих типов задач математической физики и адаптивно привлекать ранее существовавшие наработки в вычислительной физике применительно к численному моделированию гидратно-флюидодинамических пластовых явлений.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 11-01-00444-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гинсбург Г.Д., Соловьев В.А. Субмаринные газовые гидраты. – С-Пб.: ВНИИ Океанология, 1994. – 200 с.
2. Цыпкин Г.Г. Течения с фазовыми переходами в пористых средах. – М.: Физматлит, 2009. – 232 с.
3. Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М. Подземная гидромеханика. – М.: Недра, 1993. – 416 с.
4. Басниев К.С., Нифантов А.В. Трехмерная математическая модель разложения гидратов метанов в пористой среде под действием тепла // Наука и техника в газовой промышленности. – М., 2004. № 1-2. – С. 61-67.
5. Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем. – М.: Недра, 1982. – 408 с.

Mathematical research of system of equations of processes in the porous environment

© G.I. Kazakevich⁵, L.V. Klochkova⁶, J.A. Poveshchenko⁷, V.F. Tishkin⁸

Abstract. Now gas hydrates are considered as potential sources of hydrocarbons. Methods of mathematical physics investigate the system of mass and power balances describing dynamics of fluids: joint movement of free hydrates, water, gas and their power interoperability with a stationary skeleton. As a result the initial boundary value problem is split on the core dissipation equation of the hydrates theory, defining "thermodynamic" evolution of system parameters, and a saturations part describing "hyperbolic" movement of environment, saturations by hydrate and fluids.

Key Words: gas hydrates, hydrocarbons, mathematical physics methods.

⁵Senior Researcher of the Institute of oceanology by name P.P.Shirshov of RAS, Moscow; gkazakevich@yandex.ru.

⁶Senior Researcher of the Institute of applied mathematics by name M.V.Keldysh of RAS, Moscow; klud@imamod.ru.

⁷Senior Researcher Officer of the Institute of applied mathematics by name M.V.Keldysh of RAS, Moscow; poveshchenko@keldysh.ru.

⁸Deputy Director of the Institute of applied mathematics by name M.V.Keldysh of RAS, Moscow; tishkin@imamod.ru.