УДК 517.95

Априорные оценки для вырождающихся эллиптических операторов в обобщенных пространствах С.Л.Соболева

© **Г. А. Смолкин**[1]

Аннотация. В работе получены априорные оценки в пространствах С. Л. Соболева для дифференциальных операторов второго порядка с неотрицательной характеристической формой специального вида. Указаны возможные обобщения.

Ключевые слова: пространства С. Л. Соболева, априорные оценки, теория псевдодифференциальных операторов, левый параметрикс.

Будем использовать общепринятые обозначения из работ [1], [2]. Пусть R^n - n - мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, ..., x_n), n > 1,\ x' = (x_2, ..., x_n),\ \xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in R^n$, $\xi' = (\xi_2, ..., \xi_n),\ i-$ мнимая единица ($i^2 = -1),\ x\xi = x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n$. Если $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ - мультииндекс с целочисленными неотрицательными координатами и $k-$ целое неотрицательное число, то положим

$$\partial_x^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} f(x),\ \ |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n,$$

$$\partial_j^k f(x) = \frac{\partial^k f(x)}{\partial x_j^k},\ D_j^k f(x) = (-i)^k \partial_j^k f(x),\ j = 1, \ldots, n.$$

Равенствами

$$\widehat{V}(\xi) = \int e^{-ix\xi} V(x) dx,\ \widehat{V}(x_1, \xi') = \int e^{-ix'\xi'} V(x) dx'$$

определяем преобразования Фурье $\widehat{V}(\xi),\ \widehat{V}(x_1, \xi')$ функции $V(x)$ по переменным x, x' соответственно.

Далее, через $[A, B] = AB - BA$ коммутатор операторов A, B. Наконец, буквой C, часто с индексами, будем обозначать положительные постоянные, возникающие в неравенствах в качестве коэффициентов. Их существование будет вытекать из контекста. При этом особые случаи оговариваются.

Пусть t, ρ, δ - вещественные постоянные. Пусть функция (символ) $p(x, \xi) \in C^\infty(R^n \times R^n)$ и для всех мультииндексов α, β, каждого компакта $K \subset R^n$ справедливы неравенства

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta p(x, \xi)| \leq C_{\alpha,\beta,K} (1 + |\xi|)^{t - \rho|\alpha| + \delta|\beta|}(\xi), \quad x \in K. \tag{1.1}$$

Если при этом $1 \geq \rho > \delta \geq 0$, то, следуя работе [4], будем говорить, что символ $p(x, \xi)$ принадлежит классу $S^t_{\rho,\delta}(R^n)$. Отнесем к классу $S^t_\delta(R^n)$ все функции $p(x, \xi)$, для которых справедливо (1.1) при $1 > \rho = \delta \geq 0$. Символу $p(x, \xi) \in S^t_{\rho,\delta}$ или S^t_δ отвечает псевдодифференциальный оператор $p(x, D)$, определенный по формуле:

$$p(x, D) V(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\xi} p(x, \xi) \tilde{V}(\xi) d\xi.$$

[1]Доцент кафедры дифференциальных уравнений, Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева, г. Саранск; gsmolkin@mail.ru

Число t называется порядком оператора $p(x, D)$.

Пусть $s \in R$, вещественная функция $g(\xi)$ на R^n такова, что найдутся постоянные L_j, принадлежащие отрезку $[0,1]$, $j = 1, ..., n$ и существуют положительные константы C_1, C_2, не зависящие от $\xi \in R^n$ такие, что

$$C_1(1 + \sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^{L_j}) \le g(\xi) \le C_2(1 + \sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^{L_j}).$$

Определим норму $\|g^s(D)V\|$ функции $V(x)$ из $C_0^\infty(R^n$ равенством

$$\|g^s(D)V\| = (\int |\tilde{V}(\xi)|^2 g^{2s}(\xi) d\xi)^{1/2}.$$

Пополнение пространства $C_0^\infty(R^n)$ по норме $\|g^s(D)V\|$ назовем обобщенным пространством С.Л.Соболева с весовой функцией $g(\xi)$. В случае когда $L_j = 1$, $j = 1, ..., n$, вместо $\|g^s(D)V\|$ пишем, как обычно $\|V\|_s$, а само пространство обозначаем $H^s(R^n)$.

Далее всюду предполагаем, что функция $H \in C_0^\infty(|\, x_1 \,| \le 2)$, $0 \le H(x_1) \le 1$, $H(x_1) = 1$, если $|\, x_1| \le 1$, H четная и полагаем $h_0 = h_0(x) = H(|x'|)H(x_1)$, $h_1 = h_0(x/4)$, $h_2 = h_0(x/8)$, $h(x_1) = H(4x_1)$,

$$p(x, D) = D_1^2 + x_1^{2m}(D_2^2 + \cdots + D_n^2),$$

где m -целое неотрицательное число. В качестве весовой функции $g(\xi)$ чаще всего будем рассматривать функции $\lambda(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{1/2}$, $\Lambda(\xi) = (1 + \xi_1^{2(m+1)} + |\xi'|^2)^{1/2/(m+1)}$, $q(\xi') = (1 + |\xi'|^2)^{1/2/(m+1)}$.

Основными результатами данной работы являются, излагаемые ниже, теоремы 1-2. Содержание этих теорем составляют следующие оценки норм.

$$\|D_1 h_0 U\|^2 + \|h_0 U\|^2_{1/(m+1)} \le C_1(Re(p(x, D)h_0 U, h_0 U) + \|h_0 U\|^2), \tag{1.2}$$

$$\|h_0 U\|_{s+2/(m+1)} \le C_2(\|h_0 p(x, D)U\|_s + \|h_1 U\|_{s+1/(m+1)}),\ s \in R, \tag{1.3}$$

$$\|q^{s+2}(D')h_0 U\| \le C_3(\|q^s(D')h_0 p(x, D)U\| + \|a(D)h_1 U\|),\ s \ge 0, \tag{1.4}$$

$$\|\Lambda^{s+2}(D)h_0 U\| \le C_4(\|\Lambda^s(D)h_0 p(x, D)U\| + \|\Lambda^{s+1}(D)h_1 U\|),\ s \ge 0, \tag{1.5}$$

где константы $C_1, ..., C_4$, не зависят от $U \in C^\infty(R^n)$,
$a(\xi) = (1 + \xi_1^2 + |\xi'|^{2M})^{(s+1)/2/M/(m+1)}$, $M = [s] + 2$.

Вкратце обсудим эти неравенства и методы их доказательства.

Так как

$$p(x, \xi) = \xi_1^2 + x_1^{2m}|\xi'|^2 = \sum_{j=1}^{n} (X_j, \xi)^2,$$

где векторные поля

$$X_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ X_2 = (0, x_1^m, 0, \ldots, 0), \ldots, X_n = (0, \ldots, 0, x_1^m)$$

определены на R^n, то оператор $p(x, D)$ принадлежит классу операторов, исследованию которого посвящены работы [2], [3], [5]. Поскольку алгебра Ли, порожденная полями $X_1, \ldots, X_n$ над $C^\infty(R^n)$, совпадает с пространством всех векторных полей на R^n, то из [2], [5] вытекает справедливость оценки вида (1.2), в которой вместо $\|D_1 h_0 U\|^2 + \|h_0 U\|^2_{1/(m+1)}$ фигурирует $\|h_0 U\|^2_\nu$, ν - некоторое положительное число. Вполне очевидно, что две любые близко лежащие точки x, y из R^n можно соединить дугами интегральных линий полей $X_1, \dots, X_n$ и их линейных комбинаций, при этом сумма длин дуг не превышает $const \cdot |x-y|^{1/(m+1)}$. Поэтому из [3] следует, что максимальное возможное значение $\nu = 1/(m+1)$. Заметим, что доказательства соответствующих неравенств, приведенных в работах Л. Хермандера [5], Е.В. Радкевича [2], автора [3], из которых следует оценка (1.2), являются достаточно сложными.

В данной работе показано, что специальный вид оператора $p(x,D)$ с символом $p(x,\xi) = \xi_1^2 + x_1^{2m}|\xi'|^2$, позволяет указать простое непосредственное доказательство оценки (1.2), опирающееся на равенство Парсеваля и формулу Ньютона-Лейбница (более подробно см. вывод теоремы 1) .

Оценки (1.3), (1.4) получаются затем из (1.2) средствами исчисления псевдодиффренциальных операторов и неравенства Шварца. Оператор $a(D)$ в (1.4) при этом является вспомогательным и введен только из-за того, что $q^s(\xi')$ не принадлежит ни одному из классов $S^t_{\rho,\delta}(R^n)$. Важно, что неравенство (1.4) позволяет оценивать производные функции U вдоль касательных направлений к плоскости $\{x : x_1 = 0\}$. Наконец, оценка (1.5) является обобщением оценки (1.3). Доказательство (1.5) опирается на лемму 2 и одну конструкцию, часто используемую при построении параметриксов для псевдодифференциальных операторов.

В наши цели работы не входит охват как можно более широкого класса дифференциальных и пседодифференциальных операторов, для которых неравенства типа (1.2)-(1.5) получаются методами этой статьи. Наоборот, рассмотрен простой оператор $p(x,D)$. Его исследование вполне проясняет суть дела и демонстрирует одну из методик получения оценок вида (1.2)-(1.5) для дифференциальных и псевдодифференциальных операторов.

Тем не менее укажем на некоторые возможные обобщения. Результаты статьи можно обобщить например, на класс вырождающихся квазиэллиптических операторов по части переменных как со знакоопределенной характеристической формой, так и со знакопеременной характеристической формой. Характерным примером здесь являются операторы вида:

$$p_1(x,D) = a_1(x)D_1^{2\nu_1} + a_2(x)x_1^{2m_1}\sum_{j=2}^{n_1} D_j^{2\nu_j} + a_3(x)x_1^{2m_2}\sum_{j=n_1+1}^{n_2} D_j^{2\nu_j} + \cdots ,$$

$$p_2(x,D) = a_1(x)D_1^{2\nu_1-1} + ia_2(x)x_1^{2m_1+1}\sum_{j=2}^{n_1} D_j^{2\nu_j} + ia_3(x)x_1^{2m_2+1}\sum_{j=n_1+1}^{n_2} D_j^{2\nu_j} + \cdots ,$$

где $a_1(x), ...-$ положительные функции,числа $\nu_1, ...-$ натуральные, а $m_1, ...-$ целые и неотрицательные.

Для оператора $p_2(x,D)$ возможные оценки норм функции h_0U в пространствах С.Л.Соболева через соответствующие нормы функции $h_0p_2(x,D)U$ получаются из неравенства

$$Re(p_2(x,D)h_0U, D_1h_0U) \geq$$
$$\geq C_6(\|a_1^{1/2}(x)D_1^{\nu_1}h_0U\|^2 + \sum_{j=2}^{n_1}\|x_1^{m_1}a_2^{1/2}(x)D_j^{\nu_j}h_0U\|^2 + \cdots).$$

Методы, изложенные в данной работе, позволяют, кроме того, получить энергетические и априорные оценки в R^n и в том случае, когда в операторе $p(x,D)$ вместо x_1^{2m} используется произвольная функция $F^2(x_1)$, не равная тождественно нулю ни в одном интервале, но для которой нуль может быть как изолированной точкой, так и предельной точкой нулей, а порядок нуля необязательно конечный.

Нам потребуются следующие известные леммы 1, 2, (см. [1], [5]).

Лемма 1. Пусть $a(x,\xi)\in S^{m_1}_{\rho,\delta}(R^n)$, $b(x,\xi)\in S^{m_2}_{\rho,\delta}(R^n)$, $\varphi(x)\in C_0^\infty(R^n)$, $c(x,D)=a(x,D)\varphi(x)b(x,D)$, $(\varphi(x)a(x,D))^*$ - формально сопряженный оператор к оператору $\varphi(x)a(x,D)$. Тогда $c(x,\xi)\in S^{m_1+m_2}_{\rho,\delta}(R^n)$, $(\varphi(x)a(x,\xi))^*\in S^{m_1}_{\rho,\delta}(R^n)$,

$$c(x,\xi)=\sum_{|\alpha|=0}^{N}\frac{(-i)^{|\alpha|}}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha a(x,\xi)\partial_x^\alpha(\varphi(x)b(x,\xi))+r_{1,N}(x,\xi),$$

$$(h(x)a(x,\xi))^*=\sum_{|\alpha|=0}^{N}\frac{(-i)^{|\alpha|}}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha\partial_x^\alpha\overline{\varphi(x)a(x,\xi)}+r_{2,N}(x,\xi),$$

порядки операторов $r_{1,N}(x,D)$, $r_{2,N}(x,D)$ стремятся к $-\infty$ при $N\to+\infty$.

Лемма 2. Если $a(x,\xi)$ принадлежит классам символов $S^t_\delta(R^n)$, $S^t_{\rho,\delta}(R^n)$, то для всякого компакта $K\subset R^n$ существует не зависящая от $U=U(x)\in C_0^\infty(K)$ такая постоянная C_K, что

$$\|a(x,D)U\|_s\le C_K\|U\|_{t+s}.$$

Теорема 1. Существует, не зависящая от выбора функции $U=U(x)\in C^\infty(R^n)$, такая постоянная C, что верно неравенство

$$\|D_1h_0U\|^2+\|h_0U\|^2_{1/(m+1)}\le C(Re(p(x,D)h_0U,h_0U)+\|h_0U\|^2).$$

Доказательство. Пусть $\mu=(1+|\xi'|)^{-1/(m+1)}$, $V=V(x)=h_0U(x)$. Из равенства

$$Re(p(x,D)V,V)=\|D_1V\|^2+\sum_{j=2}^{n}\|x_1^mD_jV\|^2$$

и равенства Парсеваля имеем

$$\|D_1V\|^2+\int\int x_1^{2m}|\xi'|^2|\widehat{V}(x_1,\xi')|^2dx_1d\xi'\le C_1Re(p(x,D)V,V). \tag{1.6}$$

Поэтому существуют такая постоянная C_2, зависящая от C_1 и диаметра носителя функции $\widehat{V}(x_1,\xi')$ по переменной x_1, что

$$\int\int x_1^{2m}(1+|\xi'|)^2|\widehat{V}(x_1,\xi')|^2dx_1d\xi'\le C_2(Re(p(x,D)V,V)+\|V\|^2). \tag{1.7}$$

Так как по построению $H\in C_0^\infty(|\ x_1\ |\le 2)$, $H(x_1)=1$ при $|x_1|\le 1$, то из формулы Ньютона-Лейбница и неравенства Шварца имеем

$$\int_{|x_1|\le\mu}\mu^{-2}|\widehat{V}(x_1,\xi')|^2dx_1\le\int_{|x_1|\le\mu}\mu^{-2}|H(x_1\mu^{-1})\widehat{V}(x_1,\xi')|^2dx_1$$
$$=\int_{|x_1|\le\mu}\mu^{-2}|\int_{-2\mu}^{x_1}\partial_t(H(t\mu^{-1})\widehat{V}(t,\xi'))dt|^2dx_1\le C_3\int|\partial_t(H(t\mu^{-1})\widehat{V}(t,\xi'))|^2dt$$
$$\le C_4(\int_{|x_1|\ge\mu}\mu^{-2}|\widehat{V}(x_1,\xi')|^2dx_1+\int|\partial_t\widehat{V}(t,\xi')|^2dt).$$

Следовательно, из неравенства

$$\int_{|x_1|\ge\mu}\mu^{-2}|\widehat{V}(x_1,\xi')|^2dx_1\le\int x_1^{2m}(1+|\xi'|)^2|\widehat{V}(x_1,\xi')|^2dx_1$$

получаем

$$\int \mu^{-2}|\widehat{V}(x_1,\xi')|^2dx_1 \le C_5(\int x_1^{2m}(1+|\xi'|)^2|\widehat{V}(x_1,\xi')|^2dx_1 + \int |\partial_t\widehat{V}(t,\xi')|^2dt).$$

Этим, в силу оценок (1.6), (1.7), завершается доказательство теоремы 1.

Теорема 2. Существуют константы $C_1 = C_1(s), C_2 = C_2(s), C_3 = C_3(s)$, не зависящие от $U \in C^\infty(R^n)$ и такие, что

$$\|h_0U\|_{s+2/(m+1)} \le C_1(\|h_0p(x,D)U\|_s + \|h_1U\|_{s+1/(m+1)}),\ s \in R, \tag{1.8}$$

$$\|q^{s+2}(D')h_0U\| \le C_2(\|q^s(D')h_0p(x,D)U\| + \|a(D)h_1U\|),\ s \ge 0, \tag{1.9}$$

$$\|\Lambda^{s+2}(D)h_0U\| \le C_3(\|\Lambda^s(D)h_0p(x,D)U\| + \|\Lambda^{s+1}(D)h_1U\|),\ s \ge 0, \tag{1.10}$$

где функции $h_0, h_1, q, \lambda, \Lambda, a$ описаны во введении.

Доказательство. Пусть, либо $\mu(\xi) = \lambda^{s+1/(m+1)}(\xi)$, либо $\mu(\xi) = a(\xi)$.

Из теоремы 1 следует неравенство

$$\|\lambda^{1/(m+1)}(D)h_1\mu(D)h_0U\|^2 \le C_4(Re(p(x,D)h_1\mu(D)h_0U, h_1\mu(D)h_0U) + \|h_1\mu(D)h_0U\|^2). \tag{1.11}$$

Так как $h_k(x) = 1$ в окрестности носителя функции $h_{k-1}(x)$, $k = 1, 2$, то

$$\begin{aligned}(p(x,D)h_1\mu(D)h_0U, h_1\mu(D)h_0U) &= (h_1\mu(D)h_2p(x,D)h_0U, h_1\mu(D)h_0U)\\ &+([h_2p(x,D), h_1\mu(D)]h_0U, h_1\mu(D)h_0U)\\ &= (h_1\mu(D)h_0p(x,D)U, h_1\mu(D)h_0U)\\ &+(h_1\mu(D)[h_2p(x,D), h_0]h_1U, h_1\mu(D)h_0U)\\ &+([h_2p(x,D), h_1\mu(D)]h_0U, h_1\mu(D)h_0U).\end{aligned} \tag{1.12}$$

Заметим, что главные символы операторов

$$[h_1p(x,D), h_0(x)],\ [(h_2p(x,D), h_1\mu(D)]$$

чисто мнимые. Поэтому, используя лемму 1, нетрудно доказать неравенство

$$\begin{aligned}&|Re(h_1\mu(D)[h_1p(x,D), h_0(x)]h_1U, h_1\mu(D)h_0U)|\\ &+|Re([(h_2p(x,D), h_1\mu(D)]h_0U, h_1\mu(D)h_0U) \le C_5\|\mu(D)h_1U\|^2,\end{aligned}$$

откуда, учитывая (1.12), на основании леммы 1 (о символе сопряженного оператора) и неравенства Шварца имеем

$$\begin{aligned}&Re(p(x,D)h_1(x)\mu(D)h_0U, h_1\mu(D)h_0U)\\ &\le C_6|Re(\lambda^{-1/(m+1)}(D)h_1\mu(D)h_0p(x,D)U, \lambda^{1/(m+1)}(D)h_1\mu(D)h_0U)|\\ &+C_7\|\mu(D)h_1U\|^2 \le (1/2/C_4)|\lambda^{1/(m+1)}(D)h_1\mu(D)h_0U\|^2\\ &+C_8\|\lambda^{-1/(m+1)}(D)h_1\mu(D)h_0p(x,D)U\|^2 + C_9\|\mu(D)h_1U\|^2.\end{aligned}$$

Следовательно, из (1.11) получается неравенство:

$$\begin{aligned}&\|\lambda^{1/(m+1)}(D)h_1\mu(D)h_0U\|^2\\ &\le C_{10}(\|\lambda^{-1/(m+1)}(D)h_1\mu(D)h_0p(x,D)h_1U\|^2 + \|\mu(D)h_1U\|^2),\end{aligned}$$

из которого следует

$$\|\lambda^{1/(m+1)}(D)\mu(D)h_0U\|^2$$
$$\le C_{11}(\|\lambda^{-1/(m+1)}(D)\mu(D)h_0p(x,D)h_1U\|^2 + \|\mu(D)h_1U\|^2).$$

Теперь, если положить $\mu(\xi) = \lambda^{s+1/(m+1)}(\xi)$, то придем к оценке (1.8).

Если же $\mu(\xi) = a(\xi)$, то оценка (1.9) вытекает из неравенств

$$\lambda^{1/(m+1)}(\xi)\mu(\xi) \ge C_{12}q^{s+2}(\xi'),\ \lambda^{-1/(m+1)}(\xi)\mu(\xi) \le C_{13}q^s(\xi').$$

Этим завершается доказательство теоремы 2 при $m = 0$, так как в этом случае оценка (1.10) совпадает с оценкой (1.8).

Теперь пусть $m > 0$. Положим

$$p_1(x,\xi) = p(x,\xi) + \lambda^{2/(m+1)}(\xi),\ \ a_j(x,\xi) = \Lambda^{s+2-j}\lambda^{j/(m+1)}(\xi)p_1^{-1}(x,\xi),$$

где $j-$ целое неотрицательное число. Легко проверить, что

$$\partial_x^\alpha p(x,\xi) = 0 \text{ при } |\alpha| > 2m,$$
$$|\partial_\xi^\alpha \Lambda(\xi)| \le C_\alpha \Lambda^{1-|\alpha|}(\xi), \tag{1.13}$$
$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta p_1(x,\xi)| \le C_{\alpha,\beta,x} p_1(x,\xi)\lambda^{(|\beta|-|\alpha|)/(m+1)}(\xi), \tag{1.14}$$

постоянные $C_\alpha,\ C_{\alpha,\beta,x}$ при любых мультииндексах $\alpha,\ \beta$ не зависят от $\xi \in R^n,\ C_{\alpha,\beta,x} < \infty$ при $|x| < \infty$. Поэтому из леммы 1 (о символе композиции операторов) имеем

$$h_0\Lambda^{s+2-j}\lambda^{j/(m+1)}(D) = h_1a_j(x,D)h_0p_1(x,D)$$
$$-h_0(x)q_j(x,D) - t_{1,j}(x,D) + r_{1,j}(x,D), \tag{1.15}$$
$$h_0q_j(x,D) = h_1q_j(x,D)h_0 - t_{2,j}(x,D) + r_{2,j}(x,D) \tag{1.16}$$

где

$$q_j(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=1}^N (-i)^{|\alpha|}\partial_\xi^\alpha a_j(x,\xi)\partial_x^\alpha p_1(x,\xi)/\alpha!,$$

$$t_{1,j}(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=1}^N (-i)^{|\alpha|}\partial_\xi^\alpha a_j(x,\xi)[\partial_x^\alpha, h_0(x)]p_1(x,\xi)/\alpha!,$$

$$t_{2,j}(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=1}^N (-i)^{|\alpha|}\partial_\xi^\alpha q_j(x,\xi)\partial_x^\alpha h_0(x)/\alpha!,$$

число N выбираем так, чтобы выполнялись неравенства:

$$\|r_{1,j}(x,D)h_1U\| + \|r_{2,j}(x,D)h_1U\| \le C_{1,j}\|\Lambda^{s+1}h_1U\|.$$

.

Следовательно, из равенств (1.15)-(1.16) получаем

$$\|h_0\Lambda^{s+2-j}\lambda^{j/(m+1)}(D)h_1U\|$$
$$\le C_{14}(\|h_1(x)a_j(x,D)h_0p_1(x,D)h_1U\| + \|h_1(x)q_j(x,D)h_0U\|$$
$$+\|t_{1,j}(x,D)h_1U\| + \|t_{2,j}(x,D)h_1U\| + \|\Lambda^{s+1}h_1U\|). \tag{1.17}$$

Используя неравенства (1.13)-(1.14), простой проверкой убеждаемся в том, что символы

$$a_j(x,\xi)\Lambda^{-s+j}(\xi)\lambda^{-j/(m+1)}(\xi), q_j(x,\xi)\Lambda^{-s-1+j}(\xi)\lambda^{-(j+1)(m+1)}(\xi),$$
$$t_{1,j}(x,\xi)\Lambda^{-s-1+j}(\xi)\lambda^{-j/(m+1)}(\xi), t_{2,j}(x,\xi)\Lambda^{-s-1+j}(\xi)\lambda^{-j/(m+1)}(\xi)$$

принадлежат классу $S^0_{1/(m+1)}(R^n)$.

Поэтому на основании лемм 1, 2, определения функции $p_1(x,\xi)$ получаем из оценки (1.17) неравенства:

$$\begin{aligned}\|h_0\Lambda^{s+2-j}\lambda^{j/(m+1)}(D)h_1U\| \leq C_{15}(\|\Lambda^{s-j}\lambda^{j/(m+1)}(D)h_0p(x,D)U\|\\ +\|\Lambda^{s-j}\lambda^{j/(m+1)}(D)h_0\lambda^{2/(m+1)}(D)h_1U\|\\ +\|\Lambda^{s+1-j}\lambda^{(j+1)(m+1)}(D)h_0U\| + \|\Lambda^{s+1}h_1U\|),\\ \|\Lambda^{s+2-j}\lambda^{j/(m+1)}(D)h_0U\|\\ \leq C_{16}(\|h_0\Lambda^{s+2-j}\lambda^{j/(m+1)}(D)h_1U\| + \|\Lambda^{s+1}h_1U\|),\\ \|\Lambda^{s-j}\lambda^{j/(m+1)}(D)h_0\lambda^{2/(m+1)}(D)h_1U\|\\ \leq C_{17}(\|\Lambda^{s-j}\lambda^{(j+2)/(m+1)}(D)h_0U\| + \|\Lambda^{s+1}h_1U\|),\end{aligned}$$

из которых следует

$$\begin{aligned}\|\Lambda^{s+2-j}\lambda^{j/(m+1)}(D)h_0U\| \leq C_{18}(\|\Lambda^{s}(D)h_0p(x,D)U\|\\ +\|\Lambda^{s+2-(j+1)}\lambda^{(j+1)/(m+1)}(D)h_0U\| + \|\Lambda^{s+1}h_1U\|).\end{aligned}$$

Повторяя эту оценку для $j=0,\ldots,[s]+2$, получим

$$\begin{aligned}\|\Lambda^{s+2}\lambda^{j/(m+1)}(D)h_0U\| \leq C_{19}(\|\Lambda^{s}(D)h_0p(x,D)U\|\\ +\|\lambda^{(s+2)/(m+1)}(D)h_0U\| + \|\Lambda^{s+1}h_1U\|).\end{aligned}$$

Из этой оценки в силу (1.8) следует окончание доказательства теоремы 2.

Список литературы

1. Егоров Ю.В. Линейные дифференциальные уравнения главного типа.// - М.: Наука, 1984. - 360 с.;

2. Радкевич Е.В. Гипоэллиптические операторы с кратными характеристиками// Мат. сб. - 1969. - Т.79. - С.193-216.;

3. Смолкин Г.А. Априорные оценки, связанные с дифференциальными операторами типа Купцова - Хермандера. Дифференциальные уравнения. 2004. Т.40. N 2. С. 242-250.;

4. Хермандер Л. Псевдодифференциальные операторы и гипоэллиптические уравнения// Псевдодифференциальные операторы. - М.: Мир, 1967. - С.297-367.;

5. Хермандер Л. Гипоэллиптические дифференциальные операторы второго порядка// Периодический сб. пер. иностранных ст.-1968. - Т.12. - №2.: Математика. - С.88 - 109.;

A priori estimates for degenerate elliptic operators in generalized Sobolev spaces

© G.A. Smolkin[2]

Abstract. In this paper we find a priori estimates in Sobolev spaces for second order differential operators with nonnegative characteristic form of a special form. The possible generalizations.

Key Words: Sobolev spaces, a priori estimates, the theory pseudodifferential operators, left perametriks.

[2] Associate Professor of Differential Equations Chair, Mordovian State University after N. P. Ogarev, Saransk; gsmolkin@mail.ru.