

УДК 519.6538.945

Численное моделирование гармоник намагниченности диска из жесткого сверхпроводника второго рода в приближении экранировки поля в центре образца

© Н. Д. Кузьмичев¹ А. А. Федченко²

Аннотация. В работе выполнено математическое моделирование отклика жесткого сверхпроводника второго рода на приложенное внешнее гармонически модулированное магнитное поле. Сверхпроводник имел форму короткого цилиндра (таблетки). В рамках модели Кима и в приближении экранировки поля в центре образца рассчитаны гистерезисные кривые и гармоники намагниченности. Результаты расчета сравниваются с результатами ранее выполненного эксперимента на поликристаллах высокотемпературного сверхпроводника.

Ключевые слова: высокотемпературный сверхпроводник, критическое состояние, вихри Абрикосова, модель Кима, гармоники намагниченности

1. Введение

Интерес к магнитным свойствам различной структуры высокотемпературных сверхпроводников (ВТСП) не угасает из-за их практической важности и сложности строения. В плане применений в электро- и радиоизмерительной технике необходимо знать отклик различной геометрической формы ВТСП на переменное и постоянное магнитные поля. Данной проблеме посвящено много работ, как в отечественной, так и зарубежной литературе [1]. Известно, что при воздействии внешнего магнитного поля на ВТСП, образец откликается сигналом сложной формы, и намагниченность сверхпроводника зависит от предыстории его состояния, т.е. обнаруживает гистерезис.

2. Постановка задачи и модель расчета

В работе рассматривается процесс проникновения магнитного поля в жесткий сверхпроводник второго рода в форме короткого цилиндра находящегося в критическом состоянии в рамках приближения Кима [1]. Магнитное поле в такие сверхпроводники проникает в виде потока, образованного нитями Абрикосова и распространяется фронтом внутрь сверхпроводника, преодолевая силу пиннинга. Изменение магнитного потока внутри указанного сверхпроводника вызывает в области проникновения вихрей Абрикосова электрическое поле, которое в свою очередь, мгновенно создает экранирующий сверхпроводящий ток (сверхток) с критической плотностью J_c . Расчет распределения сверхтока и магнитного поля в образце, а также намагниченности и восприимчивости сверхпроводника представляет собой непростую задачу. Это связано с несколькими причинами. Во-первых, необходимо для каждой геометрии учитывать размагничивающее поле; во-вторых, процесс намагничивания сверхпроводника будет гистерезисным из-за разбиения

¹Заведующий кафедрой общенаучных дисциплин, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; kuzmichevnd@yandex.ru.

²Аспирант, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; starlightalex@gmail.com.

сверхпроводника на области с противоположно текущими экранирующими сверхтоками; в-третьих, внутри сверхпроводника требуется учитывать текущую плотность потока поля на границах областей разбиения.

Использовалось приближение полной экранировки магнитного поля в центре цилиндра и модель Кима [1, 2]: $J_c(B) = \alpha / (|B| + B_0)$. Данное приближение игнорирует радиальную составляющую магнитного поля и соответственно кривизну нитей Абрикосова. В этом случае уравнение критического состояния для цилиндра радиуса R и длины d в аксиальном внешнем поле имеет вид [6]:

$$\frac{dH}{dr} = \pm \frac{\alpha}{(|H| + H_0) \sqrt{1 + \left(\frac{2r}{d}\right)^2}}. \quad (2.1)$$

Здесь r – есть текущий радиус цилиндра, $H(r)$ представляет собой осевую составляющую напряженности магнитного поля, α – объемная плотность силы пиннинга ($\alpha = const$), а H_0 (или B_0) – некоторое характерное поле. Уравнение (2.1) решается с граничным условием $H(R) = H_{ex}$. Где H_{ex} – напряженность внешнего магнитного поля. Знак «+» соответствует растущему магнитному полю, а знак «-» убывающему полю. Следовательно, в переменном магнитном поле ($H_{ex}(t) = H_d + h \cdot \cos(\omega t)$) сверхпроводник разбивается на области с противоположно текущими экранирующими сверхтоками. Это приводит к гистерезису в намагничивании жесткого сверхпроводника.

Численный расчет распределения магнитного поля и сверхтока внутри сверхпроводника необходимо производить отдельно для каждой области, используя уравнение (2.1) с учетом текущих граничных условий. Полученные распределения сверхтока используются в дальнейшем для вычисления петли намагниченности жесткого сверхпроводника в рамках вышеотмеченных приближений.

Уравнение (2.1) решается аналитически, но дальнейшее использование полученных формул для вычисления петли гистерезиса намагниченности и гармоник намагниченности приводит к чрезвычайной громоздкости функций выраженных через интегралы неудобных для дальнейшего анализа и сравнения с экспериментом.

Намагниченность \mathbf{M} цилиндрического сверхпроводника вычислялась согласно формуле используемой для определения магнитного момента системы токов [4, 5] учитывая, что экранирующий ток в силу цилиндрической симметрии является азимутальным:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2V} \int_{\rho}^R [\mathbf{r}, \mathbf{J}_c] dV \quad (2.2)$$

Здесь V – объем сверхпроводника, ρ – радиус внутренней части цилиндра, куда поле не проникло. Интеграл (2.2) разбивается на сумму нескольких интегралов с противоположно текущими сверхтоками J_c . Число областей с противоположными сверхтоками в случае одновременного присутствия переменного и постоянного полей достигает четырех.

В эксперименте при изучении магнитных свойств измеряется напряжение сигнала отклика сверхпроводника на переменное магнитное поле в присутствии постоянного поля [4-7]. Указанное напряжение возникает на концах приемной катушки, внутри которой помещен сверхпроводник. Напряжение сигнала отклика будет периодической негармонической функцией времени имеющее в своем составе большое количество синфазных и квадратурных составляющих гармоник. Гармоники напряжения пропорциональны соответствующим гармоникам намагниченности или восприимчивости: $\varepsilon_n^{i, \omega} \propto M_n^{i, \omega}$.

Здесь синфазные (действительные) M_n^i и квадратурные (мнимые) $M_n^{\text{“}}$ составляющие гармоник порядка n намагниченности вычислялись согласно формулам [3]:

$$M_n^i = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} M(t) \cos(n\omega t) d(\omega t), \quad (2.3)$$

$$M_n^{\text{“}} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} M(t) \sin(n\omega t) d(\omega t). \quad (2.4)$$

Величина $M(t) = M(H_d + h \cdot \cos(\omega t))$ – модуль намагниченности сверхпроводящего цилиндра, определяемый выражением (2.2).

С целью более детального изучения поведения ВСТП была разработана специальная программа. В основе этого приложения лежат алгоритмы расчета гармоник намагниченности и ключевых параметров сверхпроводника на основе численных методов.

3. Структура и алгоритм работы программы

Программа позволяет провести исследование поведения ВСТП в переменных и постоянных магнитных полях, изучить интересующие зависимости и анализировать имеющуюся модель в сравнении с экспериментальными данными. Алгоритм позволяет вычислять гистерезисные и нелинейные процессы путем изучения синфазных и квадратурных частей амплитуд гармоник напряженности отклика сверхпроводника. Программа вычисляет зависимости намагниченности образца ВСТП от внешнего магнитного поля, комбинирующего воздействие двух составляющих: постоянного H_d и переменного амплитудой h , не ограничивая их величин.

При решении задачи моделирования поведения сверхпроводника важная роль отводилась так называемому принципу объектно-ориентированного программирования.

Алгоритм действия программы включает в себя несколько шагов. На этапе препроцессинга формируются объекты классов «сверхпроводник» и «магнитное поле».

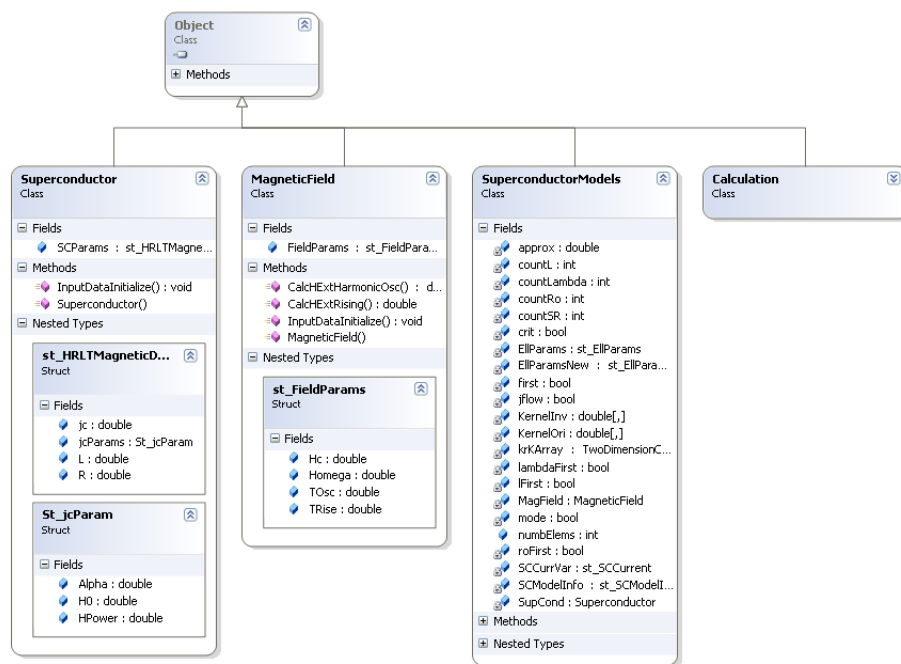
Дифференциальное уравнение, задающее распределение величины магнитного поля в сверхпроводнике решается численно методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности. В качестве такого уравнения выступает уравнение критического состояния для короткого цилиндра в модели Кима (2.1).

Расчет намагниченности образца начинается с вычисления величины радиуса ρ , на глубину которого проникло внешнее магнитное поле, и радиусов λ и ζ , в которых направление течения тока критической плотности меняет свой знак. Вычисление производится для каждого момента времени в течение всего периода изменения магнитного поля с учетом предыдущего воздействия на образец. Проблема нахождения значений радиусов ρ , λ и ζ , которая программно может быть сведена к задаче нахождения нуля функции, решена при помощи алгоритма, реализованного на базе метода Брэндта [8]. Он оказался наиболее эффективным по соотношению быстрота–точность–надежность в сравнении с остальными методами (Ньютона, Миллера, Аتكена и др. [9, 10]). Намагниченность всего образца рассчитывается путем интегрирования уравнений, полученных для нескольких частей с учетом направления течения тока.

На этом этапе конечным результатом является массив, содержащий текущее значение времени и соответствующие ему величины напряженности поля, 3-х радиусов и критической плотности тока.

Проведение гармонического анализа для такого большого объема данных оказалось достаточно трудоемкой и затратной по времени задачей. С помощью алгоритма быстрых преобразований Фурье удалось с достаточно высокой точностью вычислить значения действительных и мнимых составляющих гармоник с первой до одиннадцатой. Расчет происходит следующему принципу: один из параметров магнитного поля (амплитуда переменной составляющей) принимается неизменной, другой параметр изменяется от некоторого стартового значения до конечного. С некоторым шагом для каждого сочетания компонентов поля рассчитываются составляющие гармоник.

Свернутая классовая диаграмма программы выглядит следующим образом:



Р и с у н о к 3.1

Классовая диаграмма проекта в свернутом виде.

Программа написана на языке программирования C# (C Sharp) с использованием средств разработки Microsoft Visual Studio 2005.

4. Результаты расчета

Такие параметры как критическая плотность тока j_c и объемная плотность силы пиннинга α , являются важными характеристиками сверхпроводника и факторами, влияющими на форму кривых гармоник.

Были вычислены оптимальные величины вышеперечисленных и других параметров, при которых модель, определяемая уравнением (2.1), наилучшим образом сходилась бы с результатами эксперимента, представленного в работе [7]. Расчет производился для используемых в эксперименте поликристаллических образцов ВТСП $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ в виде коротких цилиндров («таблетка») с соотношением $L/D = 0,12$ (для образца №1) и $L/D = 0,18$ (для образца №2), где $D = 20$ mm – диаметр образца, L – его высота. Получены следующие параметры:

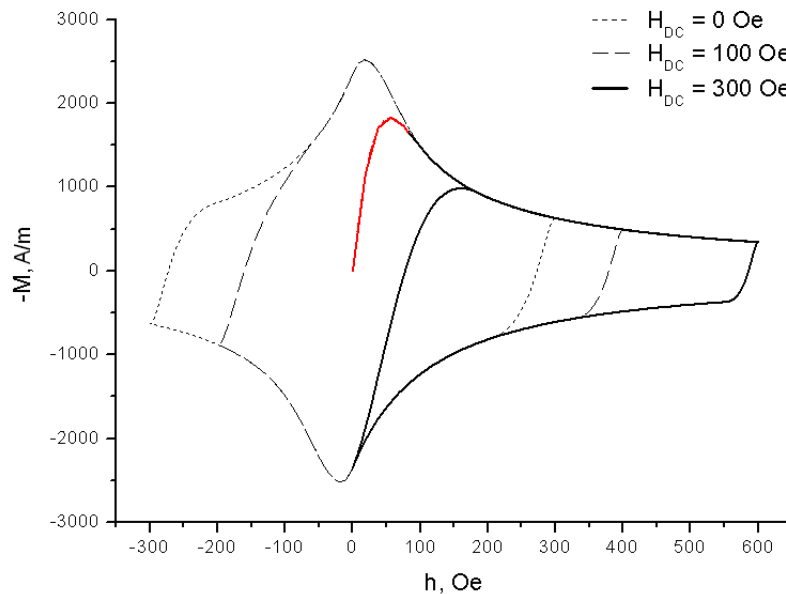
для образца №1:

$$\alpha = 19 \cdot 10^9 \text{ A}^2/\text{m}^3, H_0 = 6000 \text{ A/m} \text{ и } j_c(0) = 3,167 \cdot 10^6 \text{ A/m}^2;$$

для образца №2:

$$\alpha = 22 \cdot 10^9 \text{ A}^2/\text{m}^3, H_0 = 8000 \text{ A/m} \text{ и } j_c(0) = 2,75 \cdot 10^6 \text{ A/m}^2.$$

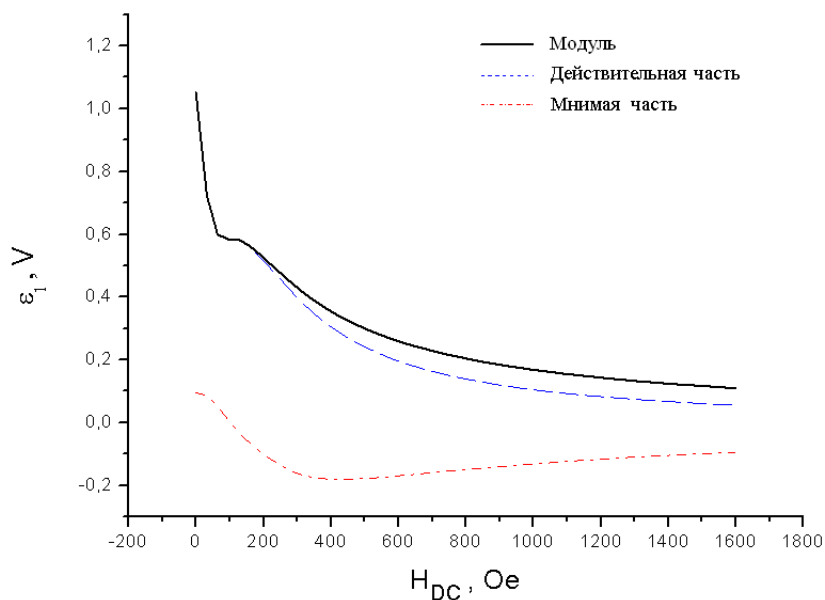
Для образца №2 с такими характеристиками была рассчитана гистерезисная петля намагниченности при амплитуде модуляции переменного магнитного поля 300 Oe (рис. 4.1).



Р и с у н о к 4.1

Петли намагниченности, рассчитанные программой.

На рисунке 4.2 представлена первая гармоника, ее действительная и мнимая части, рассчитанная для образца №2 при больших амплитудах модуляции.



Р и с у н о к 4.2

Первая гармоника намагниченности.

На рисунке 4.3 показаны кривые, построенные по экспериментальным [7] и расчетным данным для амплитуд модуляций 100, 300 и 470 Oe для второй гармоники (образец №2).

Изображенная кривая вычисляется следующим образом:

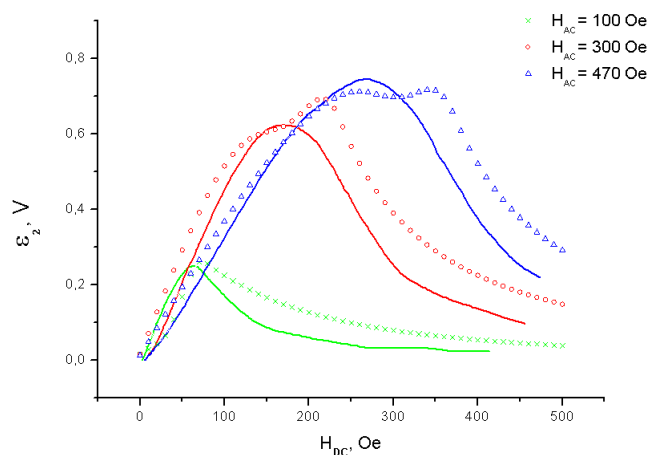
$$M_n = \sqrt{(M_n^i)^2 + (M_n^c)^2}, \quad (4.1)$$

$$\varepsilon_n = K \cdot M_n, \quad (4.2)$$

$$K = \mu_0 \cdot N \cdot S \cdot \omega \cdot n. \quad (4.3)$$

Здесь μ_0 – магнитная постоянная, N – число витков, S – площадь поперечного сечения сверхпроводящего образца, ω – частота колебаний переменной составляющей магнитного поля, n – номер гармоники. Значение K/n для экспериментальной работы [7] есть: $K/n \approx 6,42 \cdot 10^{-4} \text{ A/V} \cdot \text{m}$.

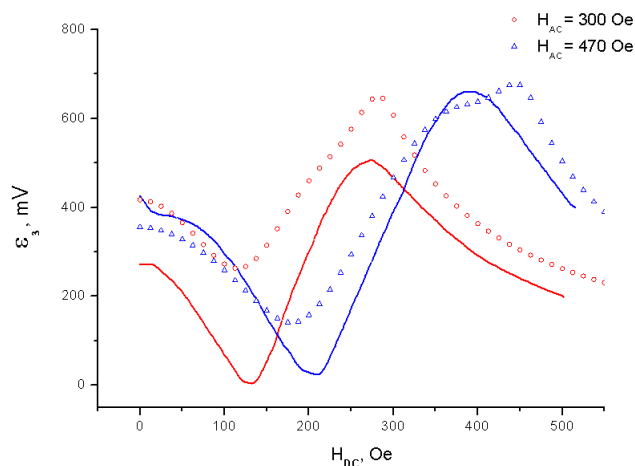
Для сравнения, символами выделены кривые, построенные программой при таких же условиях.



Р и с у н о к 4.3

Сравнение экспериментальных [7] и расчетных данных второй гармоники для больших амплитуд модуляции. Сплошные линии – данные, полученные в ходе эксперимента; линии, выделенные символами – данные, рассчитанные программой.

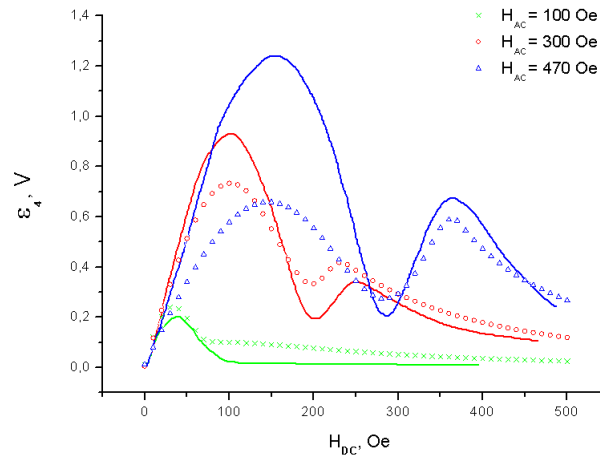
Экспериментальные и расчетные данные для третьей (образец №1) и четвертой (образец №2) гармоники представлены на рисунках 4.4 и 4.5.



Р и с у н о к 4.4

Сравнение экспериментальных [7] и расчетных данных третьей гармоники.

Однако четвертая и последующие гармоники демонстрируют некоторые расхождения. Хотя результаты эксперимента и результаты работы программы имеют сходство в точках экстремума и формах кривых. По всей видимости, это может быть обусловлено пренебрежением искривления линий магнитного потока, проникающего в образец ВТСП.



Р и с у н о к 4.5

Сравнение экспериментальных [7] и расчетных данных четвертой гармоники.

5. Заключение

В статье на основе разработанной программы рассматривается нелинейный отклик жесткого сверхпроводника 2-го рода в виде короткого цилиндра на основе модели Кима в рамках приближения полной экранировки магнитного поля в центре цилиндра. Получены кривые намагниченности и гармоник. Низкие данные получены ввиду того, что используемые в эксперименте образцы содержат большое количество слабых связей. Если считать, что образцы состоят из отдельных изолированных сверхпроводящих гранул в виде столбиков диаметром $d \sim 1 \mu$, то параметры будут иметь значение $j_c(0) \approx 10^{10} \text{ A/m}^2 (10^6 \text{ A/cm}^2)$. Это говорит о том, что среднее значение j_c гранул поликристалла близко к соответствующему параметру монокристалла $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$ ($\sim 10^7 \text{ A/cm}^2$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kim Y.B., Heampstead C.F., Strnad A.R. Critical persistent currents in hard superconductors// Phys. Rev. Lett. – 1962. – V. 9. – P. 306-309.
2. Anderson P.W., Kim Y.B. Hard superconductivity: Theory of the motion of Abrikosov flux line// Rev. Mod. Phys. – 1964. – V. 36. – P. 39-46.
3. Кузьмичев Н.Д. Гистерезисная намагниченность и генерация гармоник магнитными материалами: Анализ спектра гармоник намагниченности на примере высокотемпературных сверхпроводников// ЖТФ. – 1994. – Т. 64., Вып. 12. – С. 63-74.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред// М.: Наука – 1982. – 620 с.

5. Кугушев А.М., Голубева Н.С. Основы радиоэлектроники// М.: Энергия – 1969. – 880 с.
6. Кузьмичев Н.Д. Нелинейные магнитные свойства и вольтамперные характеристики высокотемпературного сверхпроводника $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ // М.: Докт. дисс. – 2002. – 288 с.
7. Кузьмичев Н.Д., Славкин В.В. Генерация гармоник поликристаллическими $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ в сильных переменных магнитных полях// Письма в ЖТФ. – 1992. – Т. 18., Вып. 8. – С. 11-15.
8. Forsythe G.E., Malcolm M.A., Moler C.B. Computer Methods for Mathematical Computations.// Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall – 1977. – 354 с.
9. Турчак Л.И., Плотников П.В. Основы численных методов, 2-е изд., перераб. и доп.// М.: ФИЗМАТЛИТ – 2005. – 304 с.
10. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы. Том 1. 2// Изд-во «Наука» – 1976. – 304 с.

Numerical simulation of magnetization harmonics of disc-shaped hard type-II superconductor with approximation of magnetic field screening in the sample center.

© N. D. Kuzmichev³ A. A. Fedchenko⁴

Abstract. Article include mathematical model of the response of disk-shaped hard superconductor to an applied external harmonically modulated magnetic field. In solution which gives Kim model and in approximation of magnetic field screening in the sample center were calculated hysteretic magnetization curves, the first and higher harmonics of magnetization. Calculation results are compared with data of previously performed experiments on polycrystals of high-temperature superconductor.

Key Words: high-temperature superconductor, critical state, Abrikosov vortices, Kim model, magnetization harmonics.

³Head of sub-department of general scientific disciplines, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; kuzmichevnd@yandex.ru.

⁴Postgraduate student, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; starlightalex@gmail.com