УДК УДК 517.948.35

О вычислении кратных фредгольмовых точек дискретного спектра линейных оператор-функций методом ложных возмущений

© **Д. Г. Рахимов**[1]

Аннотация. В работе рассматривается нахождение фредгольмовых точек дискретного спектра линейных оператор-функций и соответствующих собственных векторов, для упрощения вычислений, специальным образом строится оператор, для которого исходное кратное собственное значение окажется простым собственным значением. Предлагается также более упрощенный вариант нахождения соответствующих собственных векторов.
Ключевые слова: дискретный спектр, метод ложных возмущений, метод Стеффенсена, оператор ложного возмущения.

1. Введение

В работах [2], [3] рассматривалась задача уточнения приближенно заданных кратных собственных значений и соответствующих собственных векторов линейных оператор-функций спектрального параметра методом ложных возмущений с последующим применением метода Стеффенсена для кратных корней. Здесь для этой задачи строится возмущенный оператор, для которого искомое кратное собственное значение оказывается простым. Предложен также упрощенный вариант определения соответствующих собственных векторов. Тем самым дано развитие метода ложных возмущений [1].

2. Постановка задачи

В 1961 году М.К.Гаврин предложил метод уточнения приближенно заданных собственных чисел и собственных векторов самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве основанный на введении оператора ложного возмущения (ЛВ), такого, что приближения к собственным числам и элементам становились точными для возмущенного оператора. В дальнейшем ЛВ метод получил развитие для операторов и оператор-функций спектрального параметра в банаховых пространствах (см. обзорную статью [8]). В настоящей работе предлагается прием, позволяющий свести задачу определения кратного собственного значения и отвечающих ему собственных элементов к случаю простого собственного значения. Использованы терминологии и обозначения [6], [8].

Пусть λ - изолированная фредгольмовская точка дискретного спектра достаточно гладкой по t в некоторой области $G \subset C$ оператор-функции $T(t) \in L(E_1, E_2)$. E_1, E_2 - некоторые банаховы пространства; $N(T(\lambda)) = span\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, $N(T^*(\lambda)) = span\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$, причем $k = det\| \langle T'(\lambda)\varphi_i, \psi_j\rangle \| \neq 0$. Пусть известны достаточно хорошие приближения φ_{i0}, ψ_{i0} и Λ к собственным элементам φ_i, ψ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ и собственному числу λ , соответственно:

$$\|\varphi_j - \varphi_{j0}\| \leq \varepsilon, \|\psi_j - \psi_{j0}\| \leq \varepsilon, | \lambda - \Lambda | \leq \varepsilon.$$

[1]Ведущий научный сотрудник, Институт математики и информационных технологий Академии наук Республики Узбекистан, г. Ташкент; Davranaka@yandex.ru.

В качестве приближения λ_0 выбираем приближенное значение одного из решений уравнения

$$F^0(t-\Lambda) \equiv f^0(t) \equiv det\|\langle T(t)\varphi_{i0}, \psi_{j0}\rangle\| = 0, \tag{2.1}$$

имеющего в окрестности Λ n близких по модулю корней.

Действительно, для функций $\Phi_{ij}^{(0)} \equiv \langle T(t)(\varphi_{io}-\varphi_i), \psi_{j0}\rangle - \langle T(t)\varphi_i, \psi_j - \psi_{j0}\rangle$ справедлива оценка $\mid \Phi_{ij}^{(0)}(t) \mid \leq (\| \psi_{j0} \| \| T(t) \| + \| T(t)\varphi_i \|)\varepsilon$. Применяя неравенство Адамара, определяем постоянную C, такую, что на некотором контуре Γ, содержащем внутри себя точки λ и Λ, при достаточно малом ε

$$\mid \Phi^{(0)}(t) \mid = det\|\Phi_{ij}^{(0)}(t)\| = \mid f^{(0)}(t) - g(t) \mid \leq \varepsilon C < \mu = \inf_{\Gamma} \mid g(t) \mid \leq \mid g(t) \mid,$$

где $g(t) = det \parallel \langle T(t)\varphi_i, \psi_j\rangle \parallel$. Тогда согласно теореме Руше [5] уравнение (2.1) внутри Γ, имеет столько же корней, сколько функция $g(t)$, для которой по условию

$$g^{(i)}(\lambda) = 0, i = 0, 1, \ldots, n-1, \;\; g^{(n)}(\lambda) = k \neq 0.$$

В силу малости ε

$$k_0 = det\|\langle T'(\lambda_0)\varphi_{i0}, \psi_{j0}\rangle\| \neq 0. \tag{2.2}$$

Поэтому биортогональные системы элементов к $\{\varphi_{i0}\}_1^n$ и $\{\psi_{i0}\}_1^n$ можно построить следующим образом:

$$\gamma_{j0} = \frac{1}{k_0}\sum_{i=1}^{n} K_{ij}^0 T^{*'}(\lambda_0)\psi_{i0}, \;\; z_{j0} = \frac{1}{k_0}\sum_{s=1}^{n} K_{sj}^0 T'(\lambda_0)\varphi_{s0},$$

где K_{is}^0 - алгебраическое дополнение элемента $k_{is}^0 = \langle T'(\lambda_0)\varphi_{s0}, \psi_{i0}\rangle$. Так как $k \neq 0$, найдется номер i_0, такой что $k_{i_0 1}^0 = \langle T'(\lambda_0)\varphi_{10}, \psi_{i_0 0}\rangle \neq 0$.

Целью работы является сведение задачи ложного возмущения для кратного собственного значения к случаю простого собственного значения.

3. Сведение к одномерному случаю

Введем оператор-функцию $\overline{T(t)} = T(t) + \sum\limits_{s=2}^{n} \langle \cdot, \gamma_{s0}\rangle z_{s0}$.

Т е о р е м а 3.1. *Точное собственное значение λ оператора $T(t)$ является простой изолированной фредгольмовой точкой дискретного спектра оператора $\overline{T(t)}$, причем соответствующие собственный вектор и дефектный функционал имеют вид*

$$\tilde{\varphi} = \varphi_1 + \sum_{s=2}^{n} c_s\varphi_s, \;\; \tilde{\psi} = \psi_{i_0 0} + \sum_{s \neq i_0} d_s\psi_s. \tag{3.1}$$

При этом элементы $\varphi_{10}, \psi_{i_0 0}$ оказываются достаточно хорошими приближениями элементов $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\psi}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фредгольмовость оператора $\overline{T(\lambda)}$ следует из теоремы С. М. Никольского [6]. Из его определения следует, что $N(\overline{T(\lambda)}) \subset N(T(\lambda))$ и нули оператора $\overline{T(\lambda)}$ можно искать в виде (3.1).

Тогда

$$\overline{T(\lambda)}\,\tilde{\varphi} = \sum_{s=2}^{n} \langle \varphi_1, \gamma_{s0}\rangle z_{s0} + \sum_{s=2}^{n}\sum_{k=2}^{n} c_k \langle \varphi_k, \gamma_{s0}\rangle z_{s0} = 0,$$

откуда в силу линейной независимости системы векторов $\{z_{i0}\}_1^n$ возникает система

$$\sum_{k=2}^{n} c_k \langle \varphi_k, \gamma_{s0} \rangle = -\langle \varphi_1, \gamma_{s0} \rangle, \ s = \overline{2,n}, \tag{3.2}$$

решения которой определяются по формулам Крамера. Двойственным образом устанавливается, что дефектный функционал $\overline{T(\lambda)}$ имеет вид (3.1), где коэффициенты d_k определяются из системы вида (3.2) по Крамеру. Поскольку при $j \neq i$ $|\langle \varphi_j, \gamma_{i0} \rangle| = |\langle \varphi_j - \varphi_{j0}, \gamma_{i0} \rangle| \leq \varepsilon \, \|\gamma_{i0}\|$ и соответственно $|\langle z_{i0}, \psi_j \rangle| \leq \varepsilon \, \|z_{i0}\|$,то из вида решений системы (3.2) следует, что $|c_k|, |d_k| \leq K\varepsilon, \, k = \overline{2,n}$. Элементы $\varphi_{10}, \psi_{i_0 0}$ являются приближениями $\tilde{\varphi} \in N(\overline{T(\lambda)})$ и $\tilde{\psi} \in N(\overline{T^*(\lambda)})$, так как $\|\varphi_{10} - \tilde{\varphi}\| \leq (1 + (n-1)K)\,\varepsilon$, $\left\|\psi_{i_0 0} - \tilde{\psi}\right\| \leq (1 + (n-1)K)\,\varepsilon$.

В силу малости коэффициентов $c_k, \, d_k, \, k = \overline{2,n}$, $\tilde{k} = \langle \overline{T'(\lambda)} \tilde{\varphi}, \tilde{\psi} \rangle \neq 0$.

Для уточнения собственного значения λ применим метод ложных возмущений в одномерном варианте к задаче

$$\overline{T(t)}\, x = 0. \tag{3.3}$$

с последующим использованием итерационного процесса Эйткена-Стеффенсена [7] к уравнению $f(t) \equiv \langle \overline{T(t)} \varphi_{10}, \psi_{i_0 0} \rangle = 0$:

$$\lambda^{(m+1)} = \lambda^{(m)} - \left[f(\lambda^{(m)}, \, \Phi(\lambda^{(m)}) \right]^{(-1)} f(\lambda^{(m)}), \ m = 0, 1, 2, \ldots, \lambda^{(0)} = \Lambda. \tag{3.4}$$

где $\Phi(t) = t - f(t), \ f(t', t'') = (f(t') - f(t''))/\,(t' - t'')$.

Теорема 3.2. *Если начальные приближения достаточно хороши, то найдутся числа* C, C_1, L_1 *и* K *такие, что при* $h = C\varepsilon \left(|k_{i_0 0}| - C_1 \varepsilon \right)^{-1} (1 + L_1)\, K < 1$ *уравнение* $f(t) = 0$ *имеет единственный корень, который можно найти с помощью формулы (3.4).*

Доказательство. Заметим, что $\left(\overline{T(t)}\right)' = T'(t), \left(\overline{T(t)}\right)'' = T''(t)$.

$$a) f(\Lambda) = \langle \overline{T(\Lambda)} \varphi_{10}, \psi_{i_0 0} \rangle = \langle \overline{T(\Lambda)} \varphi_{10} - \overline{T(\lambda)} \tilde{\varphi}, \psi_{i_0 0} \rangle =$$

$$= \langle \overline{T(\Lambda)} (\varphi_{10} - \tilde{\varphi}) + (\overline{T(\Lambda)} - \overline{T(\lambda)}) \tilde{\varphi}, \psi_{i_0 0} \rangle, |f(\Lambda)| \leq \varepsilon \left\| \overline{T(\Lambda)} \right\| + \varepsilon \sup_{\theta \in [0;1]} \overline{T'\left(\Lambda + \theta(\lambda - \Lambda)\right)} = C\varepsilon.$$

$$b) f(t', t'') = f'(t'') + f''\left(t'' + \theta(t' - t'')\right)(t' - t'') = f'(\lambda) +$$

$$+ f''\left(\lambda + \theta_1(t'' - \lambda)\right)(t'' - \lambda) + f''\left(t'' + \theta(t' - t'')\right)(t' - t''),$$

где $f'' = (\psi_{i_0 0}, T''(t)\varphi_{10})$,

$$|f(t', t'')| \geq |k_{i_0 0}| - |f''\left(\lambda + \theta_1(t'' - \lambda)\right)| \, |t'' - \lambda| -$$

$$- |f''\left(t'' + \theta(t' - t'')\right)| \, |t' - t''| \geq |k_{i_0 0}| - 3C_1\varepsilon,$$

где $C_1 = \sup\limits_{t \in G_0} T''(t)$;

c) $\Phi(t) = t - f(t), \, \Phi(t', t'') = 1 - f(t', t''), \, |\Phi(t', t'')| \leq 1 + |f(t', t'')| \leq 1 + L_1$;

$$d) |\Phi(t', t'') - \Phi(t'', t''')| = |f(t', t'') - f(t'', t''')| \leq L_2 \left(|\ t' - t''\ | + |\ t'' - t'''\ | \right) = K\ |\ t' - t'''\ | \ .$$

Теперь, если $h = C\varepsilon \left(|k_{i_0 0}| - 3C_1\varepsilon \right)^{-1} (1 + L_1) K < 1$, то уравнение $f(t) = 0$ имеет единственный корень, который можно найти методом Эйткена-Стеффенсена (3.4) (см. [7]).

Определим элементы

$$\tilde{\gamma}_0 = 1/k_{i_0 1}\overline{T'^*(\lambda_0)}\psi_{i_0 0} \in E^*,\ \tilde{z}_0 = 1/k_{i_0 1}\overline{T'(\lambda_0)}\varphi_{10} \in F,$$

биортогональные к φ_{10} и $\psi_{i_0 0}$ соответственно.

Построим оператор ложного возмущения в виде

$$D_0 x = \langle x, \tilde{\gamma}_0\rangle \overline{T^(\lambda_0)}\varphi_{10} + \langle x, \overline{T^*(\lambda_0)}\psi_{i_0 0}\rangle \tilde{z}_0.$$

Тогда $Ker(\overline{T^(\lambda_0)} - D_0) = \{\varphi_{10}\}$, $Ker(\overline{T^*(\lambda_0)} - D_0^*) = \{\psi_{i_0 0}\}$.

Применяя лемму Шмидта [6] сводим (3.3) к системе

$$\begin{cases} x = \xi\left[I + \overline{\Gamma_0}\left(D_0 + \overline{T(t)} - \overline{T(\lambda^0)}\right)\right]^{-1}\varphi_{10}, \\ \xi = \langle x, \tilde{\gamma}_0\rangle. \end{cases} \tag{3.5}$$

Здесь $\overline{\Gamma_0} = \left[\overline{T(\lambda^0)} - D_0 + \langle\cdot, \tilde{\gamma}_0\rangle\tilde{z}_0\right]^{-1}$.

Подставляя первое уравнение (3.5) во второе, получим уравнение разветвления, простым корнем которого является исходное собственное значение λ:

$$F(t-\lambda^0) \equiv \langle (D_0 + \overline{T(t)} - \overline{T(\lambda^0)})\left[I + \overline{\Gamma_0}(D_0 + \overline{T(t)} - \overline{T(\lambda^0)})\right]^{-1}\varphi_{10}, \psi_{i_0 0}\rangle = 0. \tag{3.6}$$

Т е о р е м а 3.3. *Если начальные приближения достаточно хороши, то к уравнению (3.6) можно применить метод Эйткена-Стеффенсена (3.4).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проверим условия применимости метода Стеффенсена:

$$a) f(\lambda_0) = \langle D_0[I + \Gamma_0 D_0]^{-1}\varphi_0, \psi_0\rangle), |f(\lambda_0)| \le \|D_0\|^2\|\Gamma_0\|[1 - \|\Gamma_0\|\|D_0\|]^{-1} = C_1(\|D_0\|);$$

$$b)\ |f(t', t'')| \ge |\ k_0\ | - C_2(\|D_0\|, \varepsilon),$$

$$C_2(\|D_0\|, \varepsilon) = L_1\|\Gamma_0\|\|D_0\|[1 - \|\Gamma_0\|\|D_0\|]^{-1}\left\{1 + [1 - \|\Gamma_0\|\|D_0\|]^{-1}\right\} +$$
$$+\frac{\varepsilon}{2}\left\{2\left(L_2 + 2L_1^2\|\Gamma_0\|[1 - \|\Gamma_0\|(\|D_0\| + \varepsilon L_1)]^{-1}\right)[1 - \|\Gamma_0\|(\|D_0\| + \varepsilon L_1)]^{-1} +\right.$$
$$+\varepsilon L_3 + 6L_1L_2\|\Gamma_0\|[1 - \|\Gamma_0\|(\|D_0\| + \varepsilon L_1)]^{-1} +$$
$$\left. +6L_1^3\|\Gamma_0\|^2[1 - \|\Gamma_0\|(\|D_0\| + \varepsilon L_1)]^{-2}[1 - \|\Gamma_0\|(\|D_0\| + \varepsilon L_1)]^{-2}\right\};$$

$$L_1 = \sup_{t\in G}\left\|T^{(i)}(t)\right\|,\ i = 1, 2, 3;$$

$$c)\Phi(t) = t - g(t),\ |\Phi(t', t'')| \le C_3,\ C_3 = L_1[1 - \|\Gamma_0\|(\|D_0\| + \varepsilon L_1)]^{-2};$$

$$d)\ |\Phi(t', t'') - \Phi(t'', t''')| = |f''(t'' + \theta(t' - t''))(t' - t'') -$$
$$- f''(t'' + \theta_1(t''' - t''))(t''' - t'')| \le C_4(\|D_0\|, \varepsilon)(|t' - t''| + |t'' - t'''|) \le$$
$$\le K|t' - t'''|, t', t'', t''' \in G_0,$$

$$C_4(\|D_0\|, \varepsilon) = [1 - \|\Gamma_0\|(\|D_0\| + \varepsilon L_1)]^{-2}\left\{L_2 + 2L_1^2\|\Gamma_0\|[1 - \|\Gamma_0\|(\|D_0\| + \varepsilon L_1)]^{-1}\right\}.$$

Теперь, если $h = C_1C_3K(|\ k_0\ | - C_2)^{-1} < 1$, то λ можно вычислить из уравнения (3.6) методом Стеффенсена (3.4), для реализации которого требуется решить два линейных уравнения $\left[\overline{T(\lambda^{(m)})} + \langle\cdot, \tilde{\gamma}_0\rangle\tilde{z}_0\right]x = \tilde{z}_0$, $\left[\overline{T(\Phi(\lambda^{(m)}))} + \langle\cdot, \tilde{\gamma}_0\rangle\tilde{z}_0\right]y = \tilde{z}_0$.

Т е о р е м а 3.4. *Собственные вектора φ_i, ψ_i, $i=1,2,\ldots,n$ соответствующие собственному значению λ оператора $T(\lambda)$ являются решениями уравнений*

$$\left[T(\lambda)+\sum_{i=1}^{n}\langle\cdot,\gamma_{i0}\rangle z_{i0}\right]x=z_{j0},\ \left[T^{*}(\lambda)+\sum_{i=1}^{n}\langle z_{i0},\cdot\rangle\gamma_{i0}\right]y=\gamma_{j0},\ j=\overline{1,n}. \tag{3.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. К исходной задаче $T(\lambda)x=0$ применяем метод ложных возмущений, для чего вводим оператор ложного возмущения:

$$D_0=-\sum_{i=1}^{n}\langle\cdot,\gamma_{i0}\rangle T(\lambda)\varphi_{i0}.$$

Тогда приближения φ_{i0}, $i=1,2,\ldots,n$ окажутся нулями оператора $T(\lambda)+D_0$.

Запишем уравнение $T(\lambda)x=0$ в виде

$$\left[T(\lambda)+\ D_0+\sum_{i=1}^{n}\langle\cdot,\gamma_{i0}\rangle z_{i0}\right]x=D_0x\ +\sum_{i=1}^{n}\langle x,\gamma_{i0}\rangle z_{i0}$$

или

$$\begin{cases}x=\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i\left[I-\Gamma_0D_0\right]^{-1}\varphi_{i0},\\ \xi_i=\langle x,\gamma_{i0}\rangle, i=\overline{1,n},\end{cases}$$

где $\Gamma_0=\left[T(\lambda)+\ D_0+\sum_{i=1}^{n}\langle\cdot,\gamma_{i0}\rangle z_{i0}\right]^{-1}$. Подставляя первое во второе получим

$$\sum_{i=1}^{n}\xi_i a_{ij}\equiv\sum_{i=1}^{n}\xi_i\langle\Gamma_0D_0\left[I-\Gamma_0D_0\right]^{-1}\varphi_{i0},\gamma_{j0}\rangle=0,\ j=\overline{1,n}.$$

По условию эта система имеет n линейно независимых решений, т.е. ранг матрицы составленной из коэффициентов, равен нулю. Следовательно, система разрешима для любых ξ_i, и φ_i можно выбрать в виде

$$\varphi_i=\left[I-\Gamma_0D_0\right]^{-1}\varphi_{i0},\ i=1,2,\ldots,n,$$

которые являются решениями уравнения (3.7).

4. Случай кратного собственного значения с ОЖН.

Пусть λ - изолированная фредгольмовская точка дискретного спектра оператор-функции $T(t)\in L(E_1,E_2)$ – аналитической по t в некоторой области $G\subset C$, $KerT(\lambda)=\{\varphi_i\}_1^n$, $KerT^{*}(\lambda)\ =\ \{\psi_i\}_1^n$, $\left\{\varphi_i^{(j)}\right\}_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{2,p_i}}$, $\left\{\psi_i^{(j)}\right\}_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{2,p_i}}$ соответствующие им присоединенные элементы. Через $\{\gamma_i\}_1^n$ и $\{z_j\}_1^n$ обозначим системы векторов, биортогональные к $\{\varphi_i\}_1^n$ и $\{\psi_i\}_1^n$ соответственно.

Предполагаются известными некоторые достаточно хорошие приближения:
Λ, $\varphi_{i0}^{(s)}$, $\psi_{i0}^{(s)}:\mid\lambda-\Lambda\mid\leq\varepsilon$, $\parallel\varphi_i^{(s)}-\varphi_{i0}^{(s)}\parallel\leq\varepsilon$, $\parallel\varphi_i^{(s)}-\psi_{i0}^{(s)}\parallel\leq\varepsilon$.

Как и выше введем оператор

$$\overline{T(t)}=T(t)+\sum_{i=2}^{n}\langle\cdot,\gamma_{i0}\rangle z_{i0}, \tag{4.1}$$

здесь через $\{\gamma_{i0}\}_1^n$ обозначена система векторов, биортогональных к $\{\varphi_{i0}\}_1^n$, а через $\{z_{i0}\}_1^n$ - биортогональных $\{\psi_{i0}\}_1^n$.

Без ограничения общности можно предположить, что $p_1 = \max\limits_{1\le i\le n} p_i$. Тогда оператор $\overline{T(\lambda)}$ имеет один собственный вектор вида

$$\tilde{\varphi} = \varphi_1 + d_2\varphi_2 + \ldots d_n\varphi_n. \tag{4.2}$$

и p_1 присоединенных элементов вида $\tilde{\varphi}^{(j)} = \varphi_1^{(j)} + \sum\limits_{i=2}^{n} d_i\varphi_i^{(j)}$. Доказательство проделывается аналогично доказательству теоремы 1. Ввиду малости коэффициентов d_i, $i=\overline{1,n}$, в качестве приближений к $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\varphi}^{(j)}$, $j=\overline{2,p_i}$, можно брать приближения φ_{10} и $\varphi_{10}^{(j)}$, $j=\overline{2,p_i}$, соответственно.

Мы находимся в условиях задачи, рассмотренной в работе [8], для оператора $\overline{T(\lambda)}$. Как и в [8] применяя к оператору $\overline{T(\lambda)}$ процесс линеаризации, задачу сводим к линейной задаче, рассмотренной там же. Используя дальше метод ложных возмущений к линеаризованной задаче находим собственное значение λ и соответствующие собственный элемент $\tilde{\varphi}$ и присоединенные к нему элементы $\tilde{\varphi}^{(j)}$, $j=\overline{2,p_i}$.

Определив λ соответствующие собственные элементы $\varphi_i, i=\overline{1,n}$, находим как решения уравнений:

$$\left[T(\lambda) + \sum_{i=1}^{n}(\gamma_{i0},\cdot)z_{i0}\right]x = z_{j0},\ j=1,2,\ldots,n.$$

Присоединенные элементы определяются из реккурентной системы:

$$\left[T(\lambda) + \sum_{i=1}^{n}(\gamma_{i0},\cdot)z_{i0}\right]x_s = \sum_{j=1}^{s} T_j x_{s+1-j},\ s=\overline{2,p_i},\ x_1=\varphi_i,\ x_{s+1}=\varphi_i^{(s)},\ i=\overline{1,n}.$$

Список литературы

1. Гавурин М. К. О методе ложных возмущений для разыскания собственных значений. ЖВМ и МФ, т.1, № 5, 1961, 757-770.

2. Логинов Б. В., Рахимов Д. Г. О методе ложных возмущений для уточнения приближенно заданных жордановых цепочек. Сб. "Вопросы вычисл. и прикл. математики № 52, «Фан», Ташкент, 1978, 37-39.

3. Рахимов Д. Г. О разыскании собственных чисел и векторов аналитической оператор-функции методом ложных возмущений. Сб. «Дифференц. ур-я с част. произв. и их прилож.», «Фан», Ташкент, 1977, 107- 120.

4. Рахимов Д. Г. Регуляризация в задачах на собственные значения для оператор-функций нелинейно зависящих от спектрального параметра методом линеаризации. Узб. мат. ж., 2009, № 3, с. 163-170.

5. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ, М., Наука, 1969.

6. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М., Наука, 1969.

7. Островский А. М. Решение уравнений и систем уравнений.М.: ИЛ, 1963, 220 с.

8. Loginov B. V., Rakhimov D. G., Sidorov N. A. Development of M. K. Gavurin's Pseudoperturbation Method, Fields Inst. Communs., 2000, v.25, p. 367-381.

On the calculation of multiple Fredholm's points of discrete spectra of linear operator functions by pseudoperturbation methods.

© D. G. Rakhimov[2]

Abstract. In present work considered a problem of finding multiple eigenvalues and corresponding eigenvectors of linear operator functions by pseudoperturbation method, in which process calculations eigenvalues became to finding roots with the same multiplicity of nonlinear equation. For this they apply Stephensen's method. In work for the simplification of calculations, specially constructed operator,for which initial eigenvalue is simple. We also suggest simpler variant for finding corresponding eigenvectors.

Key Words: discrete spectra, pseudoperturbation method, Stephensen's method, pseudoperturbation operators.

[2]Senior scientist, Institute of Mathematics and information texnologies of Academy scientifics of the Republik of Uzbekistan, Tashkent; davranaka@yandex.ru