УДК 517.9

Задача определения минимального числа управляющих воздействий

© Н. В. Зубов [1],В. В. Дикусар [2], С.А. Дутов [3]

Аннотация. Для линейных стационарных управляемых систем решена задача определения минимального числа управляющих воздействий, при которых открытую систему можно сделать полностью управляемой. Этот результат позволяет найти всю совокупность систем управления, при которых имеет место полная управляемость и обладающих при этом минимальной размерностью. В отличие от критерия Калмана предлагаемый подход позволяет рассматривать проблему полной управляемости еще на этапе создания управляемой системы. Кроме того, предлагаемый подход позволяет оценить избыточность систем управления.
Ключевые слова: управляемость, линейная комбинация, матрица оператора, сумма инвариантных подпространств, вектор.

Рассмотрим замкнутую линейную стационарную управляемую систему

$$\dot{X} = AX + BU + F(t), \tag{1.1}$$

где A и $B = \{B_1, \ldots, B_m\}$ постоянные матрицы размера $(n \times n)$ и $(n \times m)$; $U = (u_1, \ldots, u_m)^T$ - вектор управлений $u_i \in L_2[0,T]$, $(i = \overline{1,m})$; $F(t) \in KC[0,T]$ - кусочно-непрерывный вектор функция, определенная на интервале $[0,T]$.

Известно (критерий Калмана), что для того, чтобы на интервале $[0,T]$ система (1.1) была полностью управляема необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы

$$\{B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B\} \tag{1.2}$$

был равен n, т. е. совокупность векторов

$$B_i, AB_i, \ldots, A^{n-1}B_i, \quad i = \overline{1,m} \tag{1.3}$$

содержала n линейно независимых.

Поставим задачу поиска минимального числа p управляющих воздействий, при которых открытая система

$$\dot{X} = AX + F(t) \tag{1.4}$$

может быть сделана полностью управляемой, путем выбора соответствующей матрицы $B = \{B_1, \ldots, B_p\}$ размера $(n \times p)$, т. е. задачу минимизации структуры системы управления, при которой замкнутая система (1.1) будет полностью управляемой.

Определение 1.3. *Назовем характеристикой полной управляемости системы (1.4) (системы (1.1)) величину* $p = \max\limits_{i=\overline{1,k}} p_i$, *где* p_i *- число линейно независимых собственных векторов соответствующих собственному числу* λ_i, $(i = \overline{1,k})$ *матрицы* A. *Иногда, для краткости, будем говорить о характеристике полной управляемости матрицы* A.

[1]Профессор Вычислительного Центра им. А.А. Дородницына РАН, г. Москва; zubovnv@mail.ru
[2]Профессор Вычислительного Центра им. А.А. Дородницына РАН, г. Москва; zubovnv@mail.ru
[3]Ассистент факультета ПМ-ПУ СПбГУ, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург; a_v_zubov@mail.ru.

Справедливы следующие теоремы.

Т е о р е м а 1.6. *(Алгоритм минимизации). Если характеристика полной управляемости матрицы* A *равна* p*, то всегда можно выбрать* p *линейно независимых векторов* $B_1, \ldots, B_p$*, являющихся столбцами матрицы* B *так, что система (1.1) будет полностью управляемой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть характеристика полной управляемости матрицы A равна p. Покажем, что можно построить p линейно независимых векторов $B_1, \ldots, B_p$, так, чтобы совокупность векторов

$$B_i, AB_i, \ldots, A^{n-1}B_i, \quad i = \overline{1, p} \tag{1.5}$$

содержала n линейно независимых. Так как между матрицами и операторами существует взаимно однозначное соответствие, то перенесем рассмотрение поставленной выше задачи, в комплексное пространство C^n, считая, что матрица A является матрицей оператора A действующего в этом комплексном пространстве.

Будем полагать, что оператор A имеет собственные значения λ_i, $(i = \overline{1, k})$, имеющие кратность k_i, $\sum_{i=1}^{k} k_i = n$. Обозначим через T^i, $i = \overline{1, k}$ корневые инвариантные подпространства оператора A соответствующие этим собственным значениям и имеющими размерности k_i, $\sum_{i=1}^{k} k_i = n$, дающим в прямой сумме все пространство C^n: $T^1 \oplus \ldots \oplus T^k = C^n$. Каждое из этих подпространств T^i содержит p_i корневых векторов X_j^i, $j = \overline{1, p_i}$, имеющих высоты $r_j^{(i)}$, $\sum_{j=1}^{p_i} = k_i$, а сами подпространства T^i представляют собой прямые суммы инвариантных подпространств T_j^i, $j = \overline{1, p_i}$ $(T^i = T_1^i \oplus \ldots \oplus T_{p_i}^i, i = \overline{1, k})$ порождаемых корневыми векторами X_j^i, $j = \overline{1, p_i}$ и имеющими циклические базисы

$$X_j^i, (A - \lambda_i E)X_j^i, \ldots, (A - \lambda_i E)^{r_j^{(i)}-1} X_j^i, \quad j = \overline{1, p_i}, i = \overline{1, k} \tag{1.6}$$

Таким образом, все пространство C^n представимо в форме прямой суммы непересекающихся инвариантных подпространств T_j^i, $j = \overline{1, p_i}$, $i = \overline{1, k}$, имеющих базисы (1.6). Заметим, что каждое инвариантное корневое подпространство T^i содержит p_i линейно независимых собственных векторов $(A - \lambda_i E)^{r_j^{(i)}-1} X_j^i$, $j = \overline{1, p_i}$.

Покажем, что можно выбрать $p = \max\limits_{i=\overline{1,k}} p_i$ линейно независимых векторов $B_1, \ldots, B_p$, так, чтобы совокупность из n векторов

$$B_i, AB_i, \ldots, A^{m_i-1}B_i, \quad i = \overline{1, p}, \quad \sum_{i=1}^{p} m_i = n \tag{1.7}$$

была линейно независимой.

Возьмем вектор B_1, как линейную комбинацию векторов принадлежащих корневым инвариантным подпространствам T_1^i, $i = \overline{1, k}$, причем все коэффициенты в этой линейной комбинации, стоящие при корневых векторах X_1^i, $i = \overline{1, k}$ отличны от нуля.

Тогда легко показать, что совокупность из m_1 векторов

$$B_1, AB_1, \ldots, A^{m_1-1}B_1, \qquad \sum_{i=1}^{k} r_1^{(i)} = m_1 \tag{1.8}$$

линейно независима и составляет базис в инвариантном подпространстве $T_1 = T_1^1 \oplus \ldots \oplus T_1^k$.

Действительно, любая линейная комбинация векторов из совокупности векторов (1.8) может быть записана в виде $\varphi_{m_1-1}(A)B_1$, где $\varphi_{m_1-1}(A)$ операторный многочлен степени $m_1 - 1$. Если предположить линейную зависимость этой совокупности, то это будет означать, что для некоторого операторного многочлена $\bar{\varphi}_{m_1-1}(A)$ степени $m_1 - 1$ справедливо равенство $\bar{\varphi}_{m_1-1}(A)B_1 = 0$. Так как в разложении вектора B_1 присутствуют все корневые векторы X_1^i, $i = \overline{1,k}$, каждый из которых имеет высоту $r_1^{(i)}$, $i = \overline{1,k}$, то многочлен $\bar{\varphi}_{m_1-1}(A)$ для того, чтобы обнулить все компоненты вектора B_1 должен иметь сомножители $(A - \lambda_i E)^{r_1^{(i)}}$, т. е. иметь степень больше чем $m_1 - 1$, ибо $\sum_{i=1}^{k} r_1^{(i)} = m_1$.

С другой стороны, любой вектор из совокупности (1.8) принадлежит инвариантному подпространству T_1 имеющему размерность m_1. Это и означает, что совокупность из m_1 векторов (1.8) линейно независима и составляет базис в инвариантном подпространстве T_1.

Исключим из дальнейшего рассмотрения подпространства T_1^k, $i = \overline{1,k}$.

Возьмем вектор B_2, как линейную комбинацию векторов, паринадлежащих корневым инвариантным подпространствам T_2^i, $i = \overline{1,k}$, причем все коэффициенты в этой линейной комбинации, стоящие при корневых векторах X_2^i, $i = \overline{1,k}$ отличны от нуля. Заметим, что в этой линейной комбинации может быть меньше корневых векторов, чем k, если какое либо корневое подпространство T^i содержало всего один корневой вектор X_1^i.

По аналогии с предыдущим можно показать, что совокупность из m_2 векторов

$$B_2, AB_2, \ldots, A^{m_2-1}B_2, \quad \sum_{i=1}^{k} r_2^{(i)} = m_2 \tag{1.9}$$

линейно независима и составляет базис в инвариантном подпространстве $T_2 = T_2^1 \oplus \ldots \oplus T_2^k$.

Действуя таким же образом и далее, пока все корневые подпространства T^i не будут исчерпаны, мы построим p векторов $B_1, \ldots, B_p$ таких, что совокупности векторов (1.7) образуют базис в C^n. Это вытекает из того, что каждая совокупность векторов

$$B_1, AB_1, \ldots, A^{m_1-1}B_1, \qquad \sum_{i=1}^{k} r_1^{(i)} = m_1$$

представляет собой базис инвариантного пространства T_i, $i = \overline{1,p}$, прямая сумма которых представляет собой все пространство C^n.

Заметим, что построенная совокупность $B_1, \ldots, B_p$ из p векторов является, вообще говоря, комплексной. Для того чтобы сделать ее вещественной, так чтобы совокупность из n вещественных векторов

$$B_i, AB_i, \ldots, A^{m_1-1}B_i, \qquad i = \overline{1,p}, \quad \sum_{i=1}^{p} m_i = n \tag{1.10}$$

была линейно независимой, достаточно при построении каждого из векторов B_j потребовать, чтобы его компоненты выбирались не только из подпространств T_j^i, порожденных комплексно сопряженными корневыми векторами X_j^i, но еще и были комплексно сопряжены. Это означает, что если одна из компонент Y_j вектора B_j выбирается из инвариантного подпространства T_j^i $(Y_j \in T_j^i)$, порожденного корневым вектором X_j^i, отвечающим комплексному числу λ_i, то другая компонента Z_j обязательно выбирается из инвариантного подпространства T_j^{i+1} ($Z_j \in T_j^{i+1}$), порожденного комплексно-сопряженным корневым вектором $\bar{X}_j^i$, отвечающим

комплексно-сопряженному числу $\bar{\lambda}_i$. Причем эти компоненты выбираются так, чтобы быть комплексными-сопряженными величинами $Y_j = \bar{Z}_j$. При таком построении каждый вектор B_j получается вещественным, совокупности векторов (1.10) линейно независимы и принадлежат различным инвариантным подпространствам, прямая сумма которых и представляет все пространство C^n.
Доказательство закончено.

Список литературы

1. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. - М.: Наука, 2002.
2. Гантмахер Ф.Д. Теория матриц. - М.: Наука, 1967. - 576 с.
3. В.В. Дикусар, Г.А. Зеленков, Н.В. Зубов. Методы анализа робастной устойчивости и неустойчивости. - М.: Изд. ВЦ РАН, 2007, 234 с.

The tasks of definition minimum number controlling action

© N.V. Zubov [4], V. V. Dicusar [5],S.A. Dutov [6]

Abstract. For linear stationary system is solves the task of definition minimum number control action, by that open system may be make fully controlling. This result is allows to find all totality of systems control, by that is take place fully controlling and is possess by this minimum dimensions. As distinct from criteria Kalman's proposed approach is allows to consider the problem fully controlling another on stage of foundation controlling system. Moreover, offered approach is allows to appreciate excess of system control.

Key Words: controlling, linear combination, matrix of operator, summa of invariant subspaces, vector.

[4]Professor of The computing center family A.A. Dorodnichina, Moscow, zubovnv@mail.ru

[5]Professor of The computing center family A.A. Dorodnichina, Moscow, a_v_zubov@mail.ru

[6]Assistant of faculty Applied Mathematics - Process Control SPbGU, Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg; a_v_zubov@mail.ru