

УДК 539.3: 533.6, 517.9

Математическое моделирование системы «трубопровод - датчик давления»

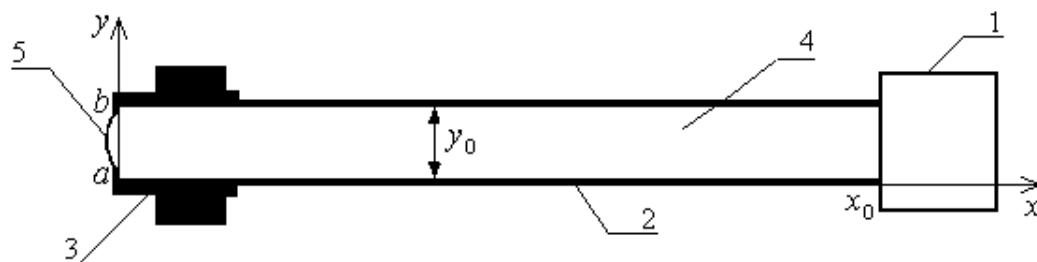
© П. А. Вельмисов,¹ Ю. В. Покладова,² Е. С. Серебрянникова³

Аннотация. Рассматриваются математические модели механической системы «трубопровод-датчик давления». Датчик закреплен на торцевой стенке трубопровода и предназначен для измерения давления рабочей среды в двигателе, которое изменяется по заданному закону. Предложены линейная и нелинейная модели, в которых динамика чувствительного элемента датчика давления описывается линейным и нелинейным уравнениями соответственно. На основе предложенных моделей проведено исследование динамики упругого элемента датчика.

Ключевые слова: аэрогидроупругость, упругий элемент, трубопровод, датчик давления, метод Галеркина, метод Фурье.

1. Математические модели механической системы «трубопровод - датчик давления»

Рассматривается математическая модель механической системы, включающей в себя трубопровод с рабочей средой и датчик. Аналогичные задачи рассматривались в [1] – [5]. Модель, представленная в этой статье, отличается от ранее исследовавшихся расположением упругого элемента датчика давления и нелинейностью уравнения, описывающего динамику упругого элемента. Датчик закреплен на торцевой стенке трубопровода и предназначен для измерения давления рабочей среды на другом конце трубопровода (например, на выходе из камеры сгорания двигателя), которое изменяется по заданному закону (Рис.1.1).



Р и с у н о к 1.1

Схема системы «трубопровод - датчик давления»

На рис.1.1: 1 - двигатель, 2 - трубопровод, 3 - датчик, 4 - рабочая среда, 5 - пластина (упругий элемент). Под рабочей средой понимается идеальная несжимаемая жидкость.

Предлагаемая математическая модель определяется следующими уравнениями и граничными условиями:

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \quad (x, y) : 0 < x < x_0, 0 < y < y_0; \quad (1.1)$$

¹Заведующий кафедрой «Высшая математика», Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; velmiso@ulstu.ru

²Доцент кафедры «Высшая математика», Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; pokladovau@inbox.ru

³Старший преподаватель кафедры «Высшая математика», Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; pokladovau@inbox.ru

$$\varphi_y(x, 0, t) = \varphi_y(x, y_0, t) = 0, \quad x \in (0, x_0); \quad (1.2)$$

$$\varphi_x(0, y, t) = \dot{\omega}(y, t), \quad y \in (a, b); \quad (1.3)$$

$$\varphi_x(0, y, t) = 0, \quad y \in (0, a) \cup (b, y_0); \quad (1.4)$$

$$\tilde{P} - \rho\varphi_t(x_0, y, t) = P(y, t), \quad y \in (0, y_0); \quad (1.5)$$

$$L(\omega) \equiv M\ddot{\omega} + D\omega'''' + N\omega'' + \alpha\dot{\omega}'''' + \beta\dot{\omega} + \gamma\omega = P_0(y, t) - \tilde{P} + \rho\varphi_t(0, y, t), \quad y \in (a, b). \quad (1.6)$$

Здесь (1.1) - уравнение Лапласа, описывающее движение рабочей среды в трубопроводе; (1.2)-(1.4) - условия непротекания; условие (1.5) задает закон изменения давления на входе в трубопровод; (1.6) - уравнение динамики пластины; $\varphi(x, y, t)$ - потенциал скорости среды; $\omega(y, t)$ - прогиб упругого элемента; $P(y, t)$ - закон распределения давления среды в сечении $x = x_0$ (на выходе из двигателя); $P_0(y, t)$ - распределенная внешняя нагрузка, действующая на упругий элемент; x_0, y_0 - продольный и поперечный размеры трубопровода; a, b - координаты концов упругого элемента; \tilde{P} - давление рабочей среды в трубопроводе в состоянии покоя; ρ - плотность среды; M - погонная масса; D - изгибная жесткость; N - сжимающее (растягивающее) усилие; α, β - коэффициенты внутреннего и внешнего демпфирования; γ - коэффициент жесткости основания; точка и штрих обозначают частную производную по t и y , соответственно.

На основе метода Фурье задача сведена к исследованию уравнения для функции деформации упругого элемента. Уравнение связывает закон изменения давления рабочей среды на входе в трубопровод и функцию прогиба упругого элемента датчика давления:

$$L(\omega) = P_0(y, t) - \frac{1}{y_0} \int_0^{y_0} P(y, t) dy - \frac{2\rho}{y_0} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\lambda_n y) \frac{\text{th}(\lambda_n x_0)}{\lambda_n} \int_a^b \ddot{\omega}(y, t) \cos(\lambda_n y) dy - \\ - \frac{2}{y_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\lambda_n y)}{\text{ch}(\lambda_n x_0)} \int_0^{y_0} P(y, t) \cos(\lambda_n y) dy - \frac{\rho x_0}{y_0} \int_a^b \ddot{\omega}(y, t) dy. \quad (1.7)$$

где оператор $L(\omega)$ определяется, согласно (1.6), выражением $L(\omega) \equiv M\ddot{\omega} + D\omega'''' + N\omega'' + \alpha\dot{\omega}'''' + \beta\dot{\omega} + \gamma\omega$.

Постановка задачи (1.1)-(1.6) соответствует линейной теории аэрогидроупругости, когда динамика жидкости (газа), а также динамика чувствительного элемента датчика описываются линейными уравнениями.

Предложим нелинейную модель, которая определяется приведенными выше уравнениями (1.1) - (1.5), при этом в уравнении (1.6), описывающем динамику пластины, интегро-дифференциальный оператор $L(\omega)$ заменяется следующим

$$L(\omega) \equiv M\ddot{\omega} + \left(\frac{D\omega''}{[1 + (\omega')^2]^{3/2}} \right)'' + N\omega'' + \alpha\dot{\omega}'''' + \beta\dot{\omega} + \mu\omega^3 + \gamma\omega + \varepsilon\dot{\omega}^3 - \\ - \delta\ddot{\omega}'' - \theta\omega'' \left(\int_a^b \sqrt{1 + (\omega')^2} dy + a - b \right).$$

Полагая прогибы малыми, заменим $[1 + (\omega')^2]^{-3/2}$ и $[1 + (\omega')^2]^{1/2}$ на $[1 - \frac{3}{2}(\omega')^2]$ и $[1 + \frac{1}{2}(\omega')^2]$ соответственно. Получим

$$L(\omega) \equiv M\ddot{\omega} + D\omega'''' - \frac{3}{2}D\omega''''(\omega')^2 - 9D\omega'\omega''\omega''' - 3D(\omega'')^3 + N\omega'' + \alpha\dot{\omega}'''' + \\ + \beta\dot{\omega} - \delta\ddot{\omega}'' + \gamma\omega + \mu\omega^3 + \varepsilon\dot{\omega}^3 - \frac{1}{2}\theta\omega'' \int_a^b (\omega')^2 dy. \quad (1.8)$$

Согласно методу Галеркина, решение $\omega(y, t)$ уравнения (1.7), (1.8) ищется в виде $\omega(y, t) = \sum_{k=1}^m \omega_k(t) g_k(y)$, где $\{g_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$ - полная на $[a, b]$ система базисных функций, удовлетворяющих граничным условиям, соответствующим условиям закрепления пластины.

Из условия ортогональности невязки уравнения (1.7) к системе базисных функций $\{g_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$ получим систему из m обыкновенных дифференциальных уравнений.

В частности, для шарнирного закрепления концов пластины ($\omega = 0, \omega'' = 0$ при $y = a, y = b$) можно положить $\omega(y, t) = \sum_{k=1}^m \omega_k(t) \sin \beta_k(y - a)$, где $\beta_k = \frac{\pi k}{b-a}$. В случае двух приближений ($m = 2$) получим систему из двух уравнений:

$$\begin{aligned} &A_{11}\ddot{\omega}_1(t) + A_{12}\ddot{\omega}_2(t) + B_1\dot{\omega}_1(t) + C_1\dot{\omega}_1(t)\dot{\omega}_2^2(t) + D_1\dot{\omega}_1^3(t) + \\ &+ E_1\omega_1(t) + G_1\omega_1^3(t) + H_1\omega_1(t)\omega_2^2(t) = F_1(t), \\ &A_{21}\ddot{\omega}_1(t) + A_{22}\ddot{\omega}_2(t) + B_2\dot{\omega}_2(t) + C_2\dot{\omega}_1^2(t)\dot{\omega}_2(t) + D_2\dot{\omega}_2^3(t) + \\ &+ E_2\omega_2(t) + G_2\omega_2^3(t) + H_2\omega_1^2(t)\omega_2(t) = F_2(t), \end{aligned}$$

где

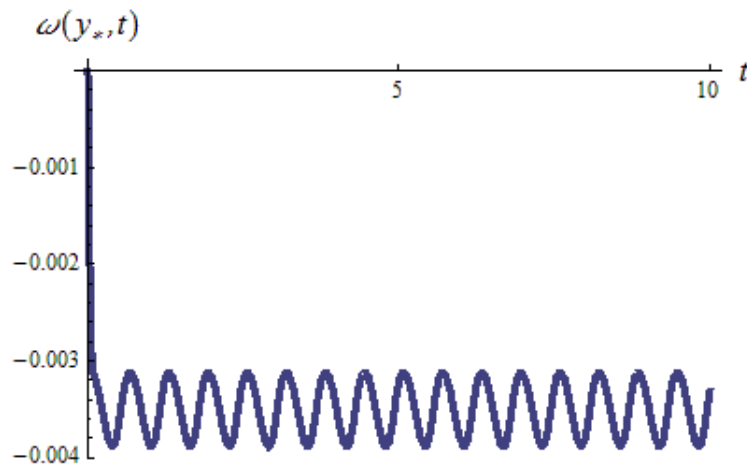
$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{b-a}{2}(M + \delta\beta_1^2) + \frac{4\rho x_0}{y_0\beta_1^2} + \frac{2\rho}{y_0} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{th(\lambda_n x_0)}{\lambda_n} \left(\frac{\beta_1}{\beta_1^2 - \lambda_n^2}\right)^2 (\cos(\lambda_n b) + \cos(\lambda_n a))^2, \\ A_{12} = A_{21} &= -\frac{2\rho}{y_0} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{th(\lambda_n x_0)}{\lambda_n} \frac{\beta_1}{\beta_1^2 - \lambda_n^2} \frac{\beta_2}{\beta_2^2 - \lambda_n^2} (\cos^2(\lambda_n b) - \cos^2(\lambda_n a)), \\ A_{22} &= \frac{b-a}{2}(M + \delta\beta_2^2) + \frac{2\rho}{y_0} \sum_{n=1, n \neq 2}^{\infty} \frac{th(\lambda_n x_0)}{\lambda_n} \left(\frac{\beta_2}{\beta_2^2 - \lambda_n^2}\right)^2 (\cos(\lambda_n b) - \cos(\lambda_n a))^2, \\ B_1 &= (\alpha\beta_1^4 + \beta) \frac{b-a}{2}, \quad B_2 = (\alpha\beta_2^4 + \beta) \frac{b-a}{2}, \\ C_1 = C_2 &= 3\varepsilon \frac{b-a}{4}, \quad D_1 = D_2 = 3\varepsilon \frac{b-a}{8}, \\ E_1 &= (D\beta_1^4 - N\beta_1^2 + \gamma) \frac{b-a}{2}, \quad E_2 = (D\beta_2^4 - N\beta_2^2 + \gamma) \frac{b-a}{2}, \\ G_1 &= (3\mu - 1.5D\beta_1^6 + (b-a)\theta\beta_1^4) \frac{b-a}{8}, \quad G_2 = (3\mu - 1.5D\beta_2^6 + (b-a)\theta\beta_2^4) \frac{b-a}{8}, \\ H_1 &= (3\mu - 1.5D\beta_1^4\beta_2^2 + \frac{b-a}{2}\theta\beta_1^2\beta_2^2) \frac{b-a}{4}, \quad H_2 = (3\mu - 1.5D\beta_2^4\beta_1^2 + \frac{b-a}{2}\theta\beta_1^2\beta_2^2) \frac{b-a}{4}, \\ F_1(t) &= \int_a^b P_0(y, t) \sin \beta_1(y - a) dy - \frac{2}{y_0\beta_1} \int_0^{y_0} P(y, t) dy - \\ &- \frac{2}{y_0} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{ch(\lambda_n x_0)} \frac{\beta_1}{\beta_1^2 - \lambda_n^2} (\cos(\lambda_n b) + \cos(\lambda_n a)) \int_0^{y_0} P(y, t) \cos(\lambda_n y) dy, \\ F_2(t) &= \int_a^b P_0(y, t) \sin \beta_2(y - a) dy + \\ &+ \frac{2}{y_0} \sum_{n=1, n \neq 2}^{\infty} \frac{1}{ch(\lambda_n x_0)} \frac{\beta_2}{\beta_2^2 - \lambda_n^2} (\cos(\lambda_n b) - \cos(\lambda_n a)) \int_0^{y_0} P(y, t) \cos(\lambda_n y) dy. \end{aligned}$$

2. Примеры исследования динамики упругого элемента датчика давления

На основе численного эксперимента с помощью системы Mathematica проведем исследование динамики упругого элемента в зависимости от закона изменения давления $P(y, t)$ в двигателе.

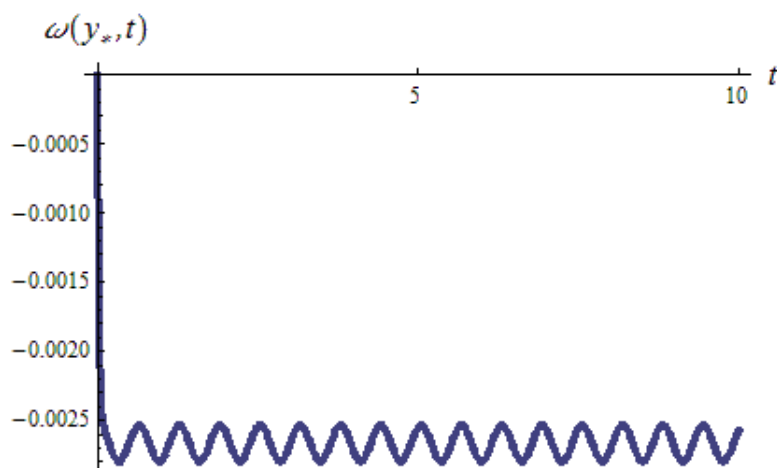
Пример 2.1. *Пример исследования динамики упругого элемента датчика давления, предназначенного для определения давления в двигателе.*

Рабочая среда - вода ($\rho = 10^3$), пластина изготовлена из стали ($E = 2 \cdot 10^{11}$, $\nu = 0,3$, $\rho_0 = 7,8 \cdot 10^3$, $h = 3 \cdot 10^{-4}$). Для значений параметров $x_0 = 0,3$, $y_0 = 0,015$, $a = 0$, $b = 0,015$, $M = 2,34$, $D = 0,495$, $N = 10^3$, $\alpha = 0,01$, $\beta = 0,3$, $\gamma = 0,2$, $N1 = 15$, $\delta = 5$, $\theta = 2,2$, $\varepsilon = 1$, $\mu = 4$, $\omega(y, 0) = 0$, $\dot{\omega}(y, 0) = 0$, $P_0(y, t) = 0$, $P(y, t) = 10^5(20 - \cos(10t))$ получены графики функции $\omega(y, t) = \sum_{k=1}^2 \omega_k(t) \sin \beta_k(y - a)$ в точке $y_* = \frac{a+b}{2,5}$ для нелинейной и линейной моделей (рис.2.1, 2.2):



Р и с у н о к

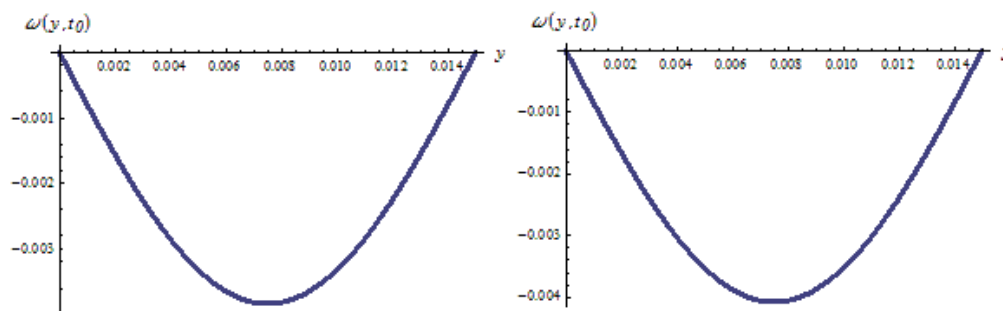
График деформации $\omega(y_*, t)$ для нелинейной модели



Р и с у н о к

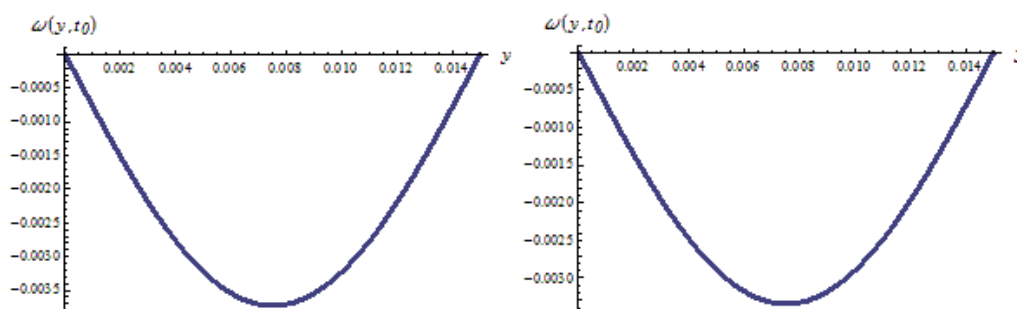
График деформации $\omega(y_*, t)$ для линейной модели

Прогибы упругого элемента в фиксированные моменты времени $t = t_0$ для нелинейной и линейной моделей представлены на рис. 2.3-2.6.



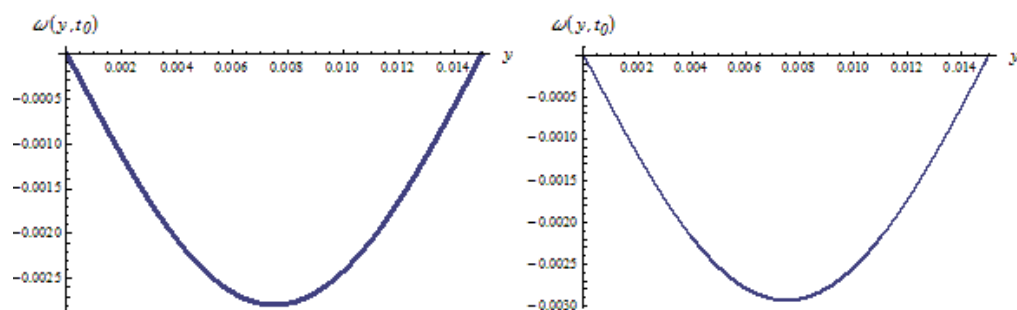
Р и с у н о к

График деформации $\omega(y, t_0)$ для нелинейной модели в моменты времени $t_0 = 0, 5; 1$



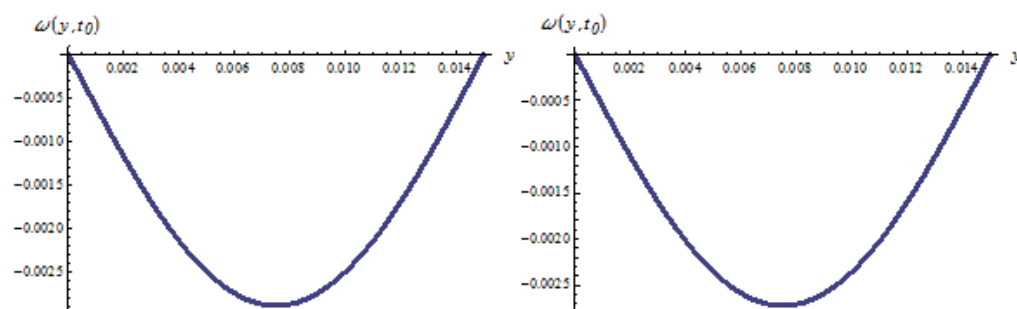
Р и с у н о к

График деформации $\omega(y, t_0)$ для нелинейной модели в моменты времени $t_0 = 1, 5; 2$



Р и с у н о к

График деформации $\omega(y, t_0)$ для линейной модели в моменты времени $t_0 = 0, 5; 1$

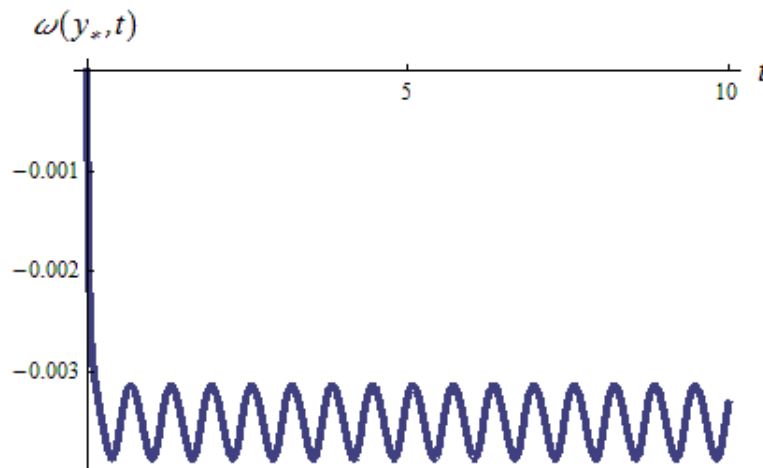


Р и с у н о к

График деформации $\omega(y, t_0)$ для линейной модели в моменты времени $t_0 = 1, 5; 2$

Как видно из рис. 2.3-2.6, графики деформации упругого элемента для линейной и нелинейной модели отличаются. В случае нелинейной модели деформация упругого элемента больше, чем для линейной модели.

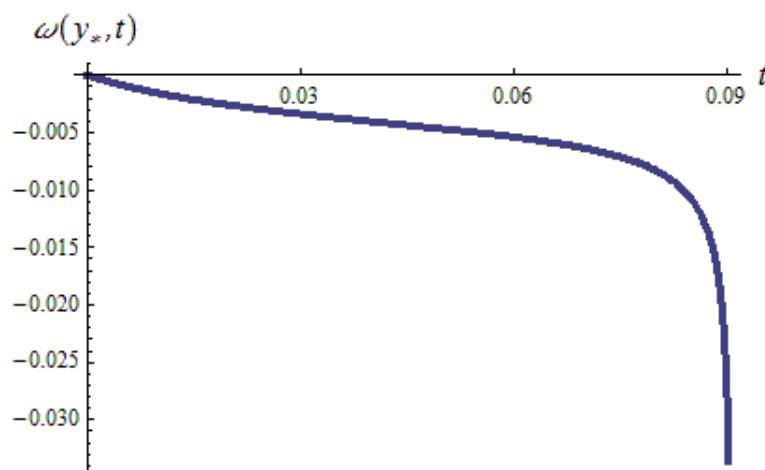
Пример 2.2. Для значений параметров $\delta = 0$, $\theta = 0$, $\varepsilon = 0$, $\mu = 0$ (остальные указанные выше параметры оставлены без изменения) получен график деформации $\omega(y_*, t)$ для нелинейной модели (Рис.2.7):



Р и с у н о к

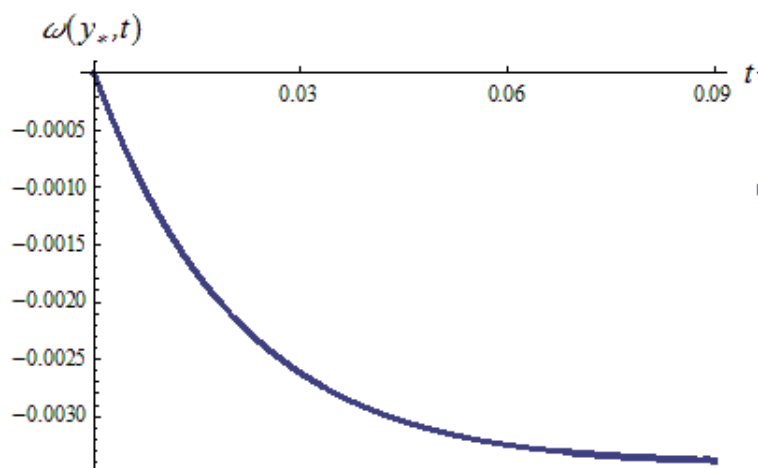
Как видно из рис.2.1, 2.7, графики деформаций упругого элемента мало отличаются, то есть небольшое изменение параметров δ , θ , ε , μ не приводит к видимым изменениям графика деформации элемента.

Пример 2.3. Для указанных выше значений параметров и $\delta = 0$, $\theta = 0$, $\varepsilon = 0$, $\mu = 0$ изменим закон изменения давления (увеличив при этом амплитуду), на выходе из камеры сгорания двигателя: $P(y, t) = 10^5(30 + \cos(10t))$. Получим графики деформаций для нелинейной и линейной моделей (рис.2.8-2.10):



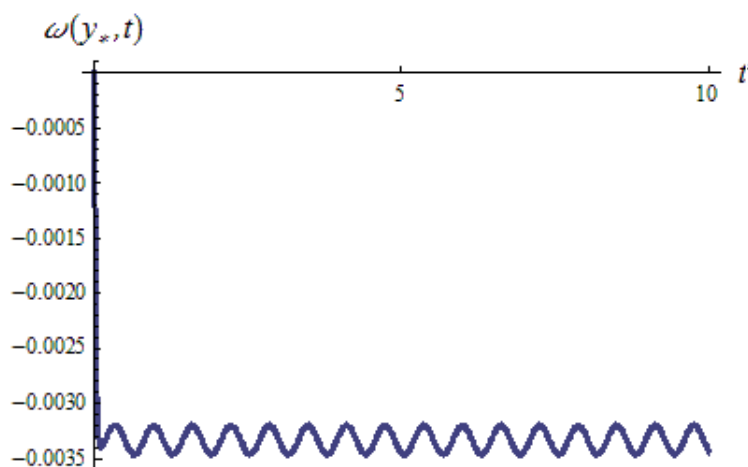
Р и с у н о к

График деформации $\omega(y_*, t)$ для нелинейной модели ($t \in [0, 0.09]$)



Р и с у н о к

График деформации $\omega(y_*, t)$ для линейной модели ($t \in [0, 0.09]$)



Р и с у н о к

График деформации $\omega(y_*, t)$ для линейной модели ($t \in [0, 2]$)

На рис.2.10 представлены результаты расчетов по линейной модели на достаточно большом интервале времени. Как видно из Рис.2.8, 2.9, с увеличением давления возрастает деформация упругого элемента датчика давления, причем для нелинейной модели увеличение давления приводит к разрушению пластины, а в случае линейной модели - к увеличению деформации упругого элемента без его разрушения.

Сравнивая графики деформации упругого элемента датчика давления для нелинейной и линейной моделей, можно сделать вывод, что учет нелинейных членов в уравнении, описывающем динамику пластины, имеет важное значение при исследовании динамики чувствительного элемента. Численный эксперимент показал, что для различных значений параметров системы графики деформаций пластины существенно отличаются.

Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 г.г. (НК-177П, ГК №П1183).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Анкилов А.В., Вельмисов П.А., Покладова Ю.В. Математические модели механической системы «трубопровод - датчик давления» // Вестник Саратовского государственного технического университета. – 2007. – №3. – С.7-14.
2. Анкилов А.В., Вельмисов П.А., Горбоконенко В.Д., Покладова Ю.В. Математическое моделирование механической системы «трубопровод - датчик давления». – Ульяновск: УлГТУ, 2008. – 188 с.
3. Вельмисов П.А., Покладова Ю.В. Математические модели одной гидроупругой системы // Труды Средневолжского математического общества. – 2006. – Т. 8, №2. – С. 93-98.
4. Решетников Ю.А. О динамике упругого элемента датчика давления // Математические методы и модели в прикладных задачах науки и техники. Труды международной конференции КЛИН. – 2005. –Т. 4. – С.201-204.
5. Velmisov P.A, Pokladova Yu.V. Mathematical models of a mechanical system «Pipeline - Pressure Sensor» // Application of Mathematics in Engineering and Economics. – Bulgaria, Sofia. – 2004. – P. 84-89.

Mathematical modelling of a system «pipeline - pressure sensor»

© P. A. Velmisov,⁴ Yu. V. Pokladova,⁵ E. S. Serebryannikova⁶

Abstract. Consider linear and nonlinear mathematical models of a mechanical system «pipeline - pressure sensor». The dynamics of an elastic element of a sensor, that is the component of the mechanical system are investigated.

Key Words: aerohydroelasticity, elastic element, pressure sensor, pipeline, Galerkin's method, Fourier method.

⁴Head of High Mathematic Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; velmisov@ulstu.ru

⁵Docent of High Mathematic Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk, pokladovau@inbox.ru

⁶Teacher of High Mathematic Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; pokladovau@inbox.ru