УДК 519.633.6

Анализ эффективности итерационно-интерполяционного метода

© Л. Ю. Катаева[1], Д. А. Масленников[2], М. В. Прокофьева[3]

Аннотация. Рассмотрена схема итерационно-интерполяционного метода и оценена её эффективность при решении нелинейных уравнений мелкой воды.

Ключевые слова: Итерационно-интерполяционный метод, вычислительная математика, схемы высокого порядка точности.

1. Введение

Вычислительная математика основана на сочетании интеллекта человека и скорости вычислительной машины. Если задача простая, а компьютер мощный, то даже плохой (в смысле эффективности) алгоритм даст хороший результат. Однако для решения современных научных задач требуется использовать максимум, как скорости компьютера, так и эффективности алгоритма. Одним из эффективных методов решения краевых задач является итерационно-интерполяционный метод.

2. Схемы итерационно-интерполяционного метода и их свойства

Рассмотрим дифференциальное уравнение в следующей форме:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = C(t, x, \theta, \frac{\partial\theta}{\partial t}) + \Phi(t, x, \theta)\frac{\partial\theta}{dx}, \tag{2.1}$$

Согласно [1], [2] разностная схема для него имеет следующий вид:

$$\frac{(\theta_{i+1} - \theta_i)}{h_{i+1}} - \frac{(\theta_i - \theta_{i-1})}{h_i} = \frac{1}{6}(C_{i+1}(h_{i+1}) + C_i(2h_{i+1} + 2h_i) + C_{i-1}(h_i))+ \\ + (\Phi_{i+1} + 2\Phi i)\theta_{i+1} + (2\Phi_i + \Phi_{i-1})\theta_{i-1} \tag{2.2}$$

Итерационно-интерполяционный метод обеспечивает высокий порядок точности по пространству, при этом оставляя свободу выбора схемы дискретизации по времени. Однако схемы итерационно-интерполяционного метода являются компактными, поэтому следует использовать неявные или явно-неявные дискретизации по времени. Также целесообразно использовать схемы высокого порядка точности по времени, чтобы обеспечить соответствие порядку точности по пространству.

[1]Профессор кафедры «Прикладная математика и информатика», Нижегородский Государственный Технический Университет имени Р. Е. Алексеева, г. Нижний Новгород; kataeval@rambler.ru.

[2]Аспирант, Нижегородский Государственный Технический Университет имени Р. Е. Алексеева, г. Нижний Новгород; dmitrymaslennikov@rambler.ru.

[3]Магистр, Нижегородский Государственный Технический Университет имени Р. Е. Алексеева, г. Нижний Новгород; marlen1406@yandex.ru.

3. Анализ эффективности

Рассмотрим двумерные нелинейные уравнения мелкой воды.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y} + g\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U\frac{\partial V}{\partial x} + V\frac{\partial V}{\partial y} + g\frac{\partial \eta}{\partial y} = 0, \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial (UH)}{\partial x} + \frac{\partial (VH)}{\partial y} = 0. \tag{3.3}$$

Будем сравнивать схему, полученную на основе итерационно-интерполяционного метода и дискретизации по времени методом Кранка-Николсона со схемой №18 [3]. В качестве начальных условий выберем гауссово распределение. Критерии оценки эффективности:

1 Время работы вычислительного алгоритма

2 Погрешность (выбор метода оценки погрешности неочевиден, например можно оценивать максимальную, среднюю или среднеквадратическую погрешность)

3 Сложность вывода и реализации схемы

Как правило, эти критерии противоречивы. Поэтому выбор метода зависит от решаемой задачи. Будем использовать алгоритм оценки погрешности, основанный на вычислении максимума погрешности и на правиле Рунге. По результатам экспериментов, время вычислений итерационно-интерполяционным методом в 10-13 раз больше за счёт использования итераций и метода прогонки вместо схемы бегущего счёта. В Таблице 2 показаны оценки погрешности. Прочерком отмечены соотношения шагов, при которых схема разрушается из-за невыполнения соотношения Куранта Эффективность

Таблица 2: Отношение погрешности схемы 18 к погрешности итерационно-интерполяционного метода.

Размер шага по пространству, км	Размер шага по времени, сек			
	4	2	1	0,5
4	8	6	5	4
2	34	19	14	11
1	96	61	62	63
0,5	-	-	74	68

итерационно-интерполяцинного метода зависит от гладкости решения. Если же решение разрывное или сильно меняющееся в некоторых областях, то чтобы сохранить точность можно ввести более мелкую сетку в этой области.

Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (2009-2013г.г.), ГК N1122

Список литературы

1. Катаева Л.Ю. Постановка и проведение вычислительного эксперимента по исследованию аэро- и гидродинамических процессов в аварийных ситуациях природного и техногенного характера. Монография. М.: Изд-во РГОТУПС, 2007. 218 с.

2. Гришин А.М., Зинченко В.И., Ефимов К.Н., Субботин А.Н., Якимов А.С. Итерационно-интерполяционный метод и его приложения. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2004. – 318 с

3. Марчук Ан.Г., Чубаров Л.Б., Шокин Ю.И. Численное моделирование волн цунами // М.: Наука, 1983 г. – 267 с.

Analysis of the effectiveness of an iteration-interpolation method

© L. Yu. Kataeva[4], D. A. Maslennikov[5], M. V. Prokofieva[6]

Abstract. The scheme of iteration-interpolation method are considered and evaluated its effectiveness in solving nonlinear equations of shallow water.

Key Words: iteration-interpolation method, Computational Mathematics, schemes of high accuracy.

[4]Professor of Applied Mathematics and Informatics Char, Nizhny Novgorod State Technical University after R. E. Alekseev, Nizhny Novgorod; kataeval@rambler.ru.

[5]Postgraduate student, Nizhny Novgorod State Technical University after R. E. Alekseev, Nizhny Novgorod; dmitrymaslennikov@rambler.ru.

[6]Graduate student, Nizhny Novgorod State Technical University after R. E. Alekseev, Nizhny Novgorod;marlen1406@yandex.ru.