УДК 517.9

Об исследовании динамических моделей социально-экономических систем на устойчивость по части переменных

© **Т. Ф. Мамедова[1], А. А. Ляпина[2]**

Аннотация. В работе приведены примеры исследования нелинейных динамических моделей экономических систем на устойчивость и стабилизацию по части переменных

Ключевые слова: системы обыкновенных дифференциальных уравнений,асимптотическая устойчивость по части переменных, эталонная функция сравнения, экономическая система.

Математика всегда с успехом применялась и применяется во всех областях хозяйственной деятельности. В экономике она используется не просто для проведения различного рода расчетов, а для изучения экономических закономерностей, получения новых теоретических выводов, нахождения наилучших экономических решений. Задачи, решаемые экономической наукой, делятся в зависимости от учета фактора времени, на статические и динамические. Статика изучает состояния экономических объектов, относящиеся к определенному моменту или периоду времени, без учета изменения их параметров во времени. В динамических задачах отражается не только зависимость переменных, но и их взаимосвязи во времени. Например, динамика инвестиций определяет динамику величин основного капитала, что в свою очередь является важным фактором изменения объема выпуска.

Таким образом, вся экономическая система распадается на взаимосвязанные подсистемы с различными временными взаимодействиями и поэтому, устойчивость всей экономической системы определяется на основе совокупности свойств ее подсистем и природе их взаимодействия.

Основной целью данной работы является исследование нелинейных динамических моделей экономических систем с помощью математического аппарата, разработанного Е.В.Воскресенским [1],[2].

Экономические системы в Хикс-Метцлеровской алгебраической постановке рассматриваются в статье Сильяка [3], и для их исследования используется метод сравнения и вектор функции Ляпунова. В данной работе эта же задача решается методом сравнения Воскресенского, когда эталонная функция сравнения не обязательно является экспоненциальной, чем обеспечивается снятие части ограничений на правую часть уравнения, по сравнению с предыдущим подходом к этому вопросу.

Рассмотрим экономическую систему S, которая состоит из взаимосвязанных и взаимозависимых между собой в различное время подсистем. Стабильность всей экономической системы определяется на основе совокупности стабильности ее подсистем и природе их взаимодействия.

Пусть дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, x), \tag{1.1}$$

[1]Профессор кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; mamedova@math.mrsu.ru.

[2]Аспирант кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; lyapina@e-mordovia.ru.

описывает экономическую систему S, где $x(t) \in R^n$ - есть состояние экономики, $f(t,x) \in C^{0,1}(T \times R^n, R^n)$, и решение $x(t : t_0, x_0)$ уравнения (1.1) существует для всех начальных условий $(t_0, x_0) \in T \times R^n$ и $t \in T_0$. Здесь T - интервал времени $(\tau, +\infty)$, где τ есть число или символ $-\infty$, и $T_0 = [t_0, +\infty)$. В экономическом анализе обычно предполагают, что состояние x экономической системы S является неотрицательным вектором, т.е. $x \in R^n_+ = \{x \in R^n : x \geq 0\}$ Предположим так же, что уравнение (1.1) имеет решение $x(t) \equiv 0$ и $x = 0$ - является единственным состоянием равновесия экономической системы , описываемой дифференциальным уравнением (1.1). Все результаты сформулируем относительно этого решения при $\overline{M_0} = N$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{y} = A(t)y. \tag{1.2}$$

Пусть для уравнений (1.1) и (1.2) выполнены некоторые основные условия:

$$N = \{1, 2, ..., n\}, N_0 \subseteq M \subseteq M_0 \subseteq \overline{M_0} \subseteq N, R_0 = \{x : x \in R^n, x = colon(x_1, ..., x_n)\}, x_j = 0, j \neq \overline{M_0}$$

$$|f_j(t, x_1, ..., x_n)| \leq \lambda_j(t, |x_{j1}|, ..., |x_{jq}|), \forall j \subseteq N, \{j_1, ..., j_q\} \subseteq M_0;$$

$$\lambda_j : [T, +\infty) \times R^q_+ \to R^1_+, R^1_+ = [0, +\infty), \lambda_j \in C([T, +\infty) \times R^q_+),$$

$$\lambda_j(t, r_1, ..., r_i, ..., r_q) \leq \lambda_j(t, \overline{r_1}, ..., \overline{r_i}, ..., \overline{r_q}), r_i \leq \overline{r_i}, i = \overline{1, q} \text{ при всех } t \in [T, +\infty).$$

$$Y(t) = (y_{ij}(t)), i, j = \overline{1, n}, t_0[T_0, +\infty), T_0 \geq T, Y^{-1}(t) = (y^{ij}(t)), i, j = \overline{1, n},$$

$$\mu_i : [T, +\infty) \to R^1_+, m_i : [T, +\infty) \to R^1_+, R^1_+ = [0, +\infty),$$

$\mu_i \geq max|y_{ij}(t)|, T_0 \leq t_0 \leq t < +\infty, i \in M_0,$ если $N_0 \neq 0, j \in N_0$ и

$\mu_i(t) \geq 0$, если $N_0 = 0, i \in M_0, m_i(t) \geq \max\{\max|y_{ij}(t)|, \mu_i(t)\}, T_0 \leq t_0 \leq t < +\infty, i \in M_0,$

$$J_i(t, \varphi) = \int_{t_0}^{t} \sum_{j \in N, k \in B} y_{ik}(t) y^{jk}(r) f_j(r, \varphi(r)) dr - \int_{t}^{+\infty} \sum_{j \in N, k \in B} y_{ik}(t) y^{jk}(r) f_j(r, \varphi(r)) dr. \tag{1.3}$$

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 1.1. *Пусть уравнения (1.1) и (1.2) асимптотически эквивалентны по Брауеру, условие (1.3) имеет место равномерно относительно* $0 < c < +\infty$ *при* $t \to +\infty$ *и* $\frac{J_i(t,c)}{\mu_i(t)} \to 0$ *равномерно по при* $c \to 0, \mu_i(t) \to 0, \forall t \in [T, +\infty), \forall i \in M_0$. *Тогда для того, чтобы тривиальное решение уравнения (1.1) было устойчиво (асимптотически устойчиво) по части переменных, необходимо и достаточно, чтобы уравнение (1.2) было устойчиво (асимптотически устойчиво) по той же части переменных.*

Данная теорема позволяет анализировать структурную устойчивость моделей экономических процессов по части переменных и делать выводы об устойчивости экономических процессов на основе совокупности свойств устойчивости подсистем и природе их взаимодействия.

Пример 1.1. *Рассмотрим замкнутую экономику, т.е. экономику без внешних обменов, и выделим в ней экономических агентов: производство, население, государство, банковская система. Предполагается, что все экономические агенты находятся в рыночных отношениях совершенной конкуренции. Каждый из них обменивается продуктами и ресурсами посредством купли-продажи на рынках по ценам, которые складываются в результате взаимодействия совокупного спроса и предложения товаров. Ни один экономический агент не в состоянии в одиночку воздействовать на цены, но каждый из агентов по сложившимся ценам может реализовать свое предложение и удовлетворить свой платежеспособный спрос. Таким образом, объем продаж ограничен только совокупным платежеспособным спросом. На всех рынках экономические агенты расплачиваются одними и теми же платежными средствами.*

Теперь рассмотрим поведение и отношения экономических агентов подробнее, чтобы замкнуть систему уравнений.

Будем считать, что нет спекулятивного спроса экономических агентов на банкноты, количество наличных банкнот в обращении не изменяется.

Рассмотрим систему балансовых уравнений: уравнение изменения мощностей и уравнение изменения запаса, где x_1 *новые мощности, а* x_2 *поток платежей:*

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_2 + \frac{x_1|\sin x_1|}{e^t} \end{cases} \tag{1.4}$$

и соответствующую ей систему однородных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = y_1, \\ \frac{dy_2}{dt} = -y_2. \end{cases} \tag{1.5}$$

Фундаментальная матрица решений системы (1.5) и обратная к ней имеют вид

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}; \quad Y^{-1}(s) = \begin{pmatrix} e^{-s} & 0 \\ 0 & e^s \end{pmatrix}.$$

Множество $N = \{1,2\}$, $\bar{M}_0 = N,\ M_0 = \{1\}$, *так как*

$$\|f_2(t,x)\| \le \frac{x_1|\sin x_1|}{e^t} \le \frac{|x_1|}{e^t} = \lambda_2(t,|x_1|),$$

Найдем μ_i *и* m_i, $i \in M_0$, $\mu_1(t) = e^t$, $m_1 = \max\{e^t, e^t\} = e^t$.

Проверим условие (1.3): $B = N - M = \{1\},\ |\varphi_1| \le cm_1(t)$,

$$|J_1(t,\varphi)| \le \int\limits_{t_0}^{t} y_{11}y^{11}f_1(s,\varphi(s))ds + \int\limits_{t_0}^{t} |y_{11}y^{21}|f_2 ds + \int\limits_{t}^{+\infty} (|y_{12}y^{12}|f_1 + |y_{12}y^{22}|f_2)ds = 0,$$

$$|J_2(t,\varphi)| \le \int\limits_{t_0}^{+\infty} |e^{-t}e^s|\frac{ce^{-s}}{e^s}ds;$$

Отсюда видно, что J_1, J_2 *существуют и несобственные интегралы сходятся,* $J_2(t,\varphi) = o(\mu_2(t)), t \to +\infty$

Все решения уравнения

$$\frac{dz}{dt} = e^{-t}z,$$

определены $\forall t_0 \geq 0, z_0 \in R^1_{+\infty}$.

Поэтому, так как система уравнений (1.5) не устойчива по переменной y_1, *то тривиальное решение системы (1.4) также не устойчиво по переменной* x_1 .

Пример 1.2. *Рассмотрим систему уравнений запаса продукта в торговле. Торговля скупает у производства весь производственный продукт* x_3 *и продает для личного и общественного потребления населению и государству, соответственно в количестве* x_2, *для возмещения выбытия и создания новой мощности производству* x_1 .

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_2, \\ \frac{dx_3}{dt} = \frac{x_1}{e^t}. \end{cases} \tag{1.6}$$

и соответствующую ей систему однородных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -y_1, \\ \frac{dy_2}{dt} = -y_2, \\ \frac{dy_3}{dt} = 0. \end{cases} \tag{1.7}$$

Фундаментальная матрица имеет вид:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

Множество $N = \{1, 2, 3\}$, $\bar{M}_0 = N,\ M_0 = \{1\}$, *так как*

$$|f_3(t, x)| \leq |\frac{x_1}{e^t}| \leq \frac{|x_1|}{e^t} = \lambda_3(t, |x_1|).$$

поэтому $M_0 = 1$. *Эталонные функции сравнения имеют вид* $\mu_1(t) = e^{-t}$, $m_1 = e^{-t}$.

Условие (1.3) выполняется, так как

$$J_1(t, \varphi) \leq \int\limits_{t_0}^{t} (|0 * 0|\frac{ce^{-s}}{e^s} + |0 * 1|\frac{ce^{-s}}{e^s})ds + \int\limits_{t}^{+\infty} (|e^{-t} * 0|\frac{ce^{-s}}{e^s})ds = 0,$$

$$J_2(t, \varphi) \leq \int\limits_{t_0}^{t} (|e^{-t} * 0|\frac{c}{2e^s} + |0 * 1|\frac{c}{2e^s})ds + \int\limits_{t}^{+\infty} (|0 * 0|\frac{c}{2e^s})ds = 0,$$

$$J_3(t, \varphi) \leq \int\limits_{t_0}^{t} |1 * 1|\frac{ce^{-s}}{e^s}ds.$$

Таким образом, выражение $J_i(t, \varphi)$ *существует* $\forall i \in N, c \in R^1_+$ *и* $J_1(t, \varphi) = o(\mu_1(t))$ *при* $t \longrightarrow +\infty$. *Несобственные интегралы сходятся равномерно по t на любом компакте из* $[T; +\infty\}$.

Для уравнения, которое в данном примере имеет вид $\frac{dz}{dt} = e^{-2t} * z$, *где* $z = c_1 e^{-\frac{1}{ze^{2t}}}$ $\frac{J_1(t,c)}{\mu_1(t)} \to 0$ *при* $c \longrightarrow 0$

Таким образом, выполняются все условия Теоремы (0.1) *Так как система уравнений (1.7) асимптотически устойчива по переменной* y_1, *то тривиальное решение системы уравнений (1.6) обладает этим же свойством по переменной* x_1 .

Список литературы

1. Воскресенский Е.В. Методы сравнения в нелинейном анализе. Саранск: Изд-во Сарат.ун-та, Саран.фил., – 1990. – 224 с .

2. Мамедова Т.Ф. Критерий устойчивости решений дифференциальных уравнений по части переменных // Математическое моделирование. М.,РАН. Т.7, №5, – 1995,– С.57.

3. Siljak D.D. Competitive economic systems: stability, decomposition, and aggregation - Proceeding of – 1973, IEEE Conference on Decision and Control. California, –p.265-275.

Stability of economics of processes

© **T. F. Mamedova** [3], **A.A. Lyapina** [4]

Abstract. In giving article stability of solution of differential equation to part of the variables are investigate

Key Words: stability, differential equation

[3]Associate professor of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N. P. Ogarev, Saransk; mamedova@math.mrsu.ru.

[4]Postgraduate student of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N. P. Ogarev, Saransk; lyapina@e-mordovia.ru.