УДК 517.9

Решение модельной задачи для уравнения диффузионного типа многосеточным методом на нерегулярной сетке

© **Р. В. Жалнин**[1]

Аннотация. В работе представлены результаты применения многосеточный метода решения уравнений диффузионного типа на нерегулярной сетке из ячеек Дирихле для одной модельной задачи.

Ключевые слова: многосеточный метод, нерегулярная сетка, уравнения диффузионного типа.

Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}, \quad 0 < x, y < 1; \\ u|_{\Gamma} = 0, \quad \text{где } \Gamma-\text{граница области}; \\ u(x,0) = sin(\pi x) sin(\pi y), \quad 0 < x, y < 1. \end{array} \tag{1.1}$$

Построим равномерную сетку из $(N_x+1)\times(N_y+1)$ узлов, которую будем называть подробной сеткой. Координаты узла p_i задаются следующим образом:

$$\begin{array}{l} x_k = i/N_x, \\ y_k = j/N_y, \\ \text{где} \quad k = jN_x + i, 0 \le i \le N_x, 0 \le j \le N_y. \end{array} \tag{1.2}$$

Также построим равномерную сетку из $(N_x+1)/2\times(N_y+1)/2$ узлов, которую будем называть грубой сеткой. Координаты узла $\bar{p}_i$ задаются следующим образом:

$$\begin{array}{l} \bar{x}_k = 2 * i/N_x, \\ \bar{y}_k = 2 * j/N_y, \\ \text{где} \quad k = jN_x/2 + i, 0 \le i \le N_x/2, 0 \le j \le N_y/2. \end{array} \tag{1.3}$$

Далее произведем триангуляцию Делоне области по вычисленным узлам сетки и построим ячейки Дирихле, соответствующие построенной триангуляции.

Затем произведем адаптацию сеток к особенностям начальных данных – решим систему уравнений [1]:

$$\sum_{j\in\ \Theta_i} w_{ij}(p_i - p_j) S_{ij} = 0, \tag{1.4}$$

для сетки (1.2), где Θ_i – множество номеров соседних узлов для p_i, S_{ij} – площадь треугольника, образованного узлом p_i и ребром между ячеками с номерами i и j; $w_{ij} = \theta_0 + \theta_1 |u_i - u_j|$. Узлы грубой сетки перемещаются вместе с соответствующими узлами подробной сетки. При необходимости производится перераспределение ячеек Дирихле для адаптированных сеток.

[1]Старший преподаватель кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; zhrv@hpc.mrsu.ru.

N_x	40
N_y	40
θ_0	100
θ_1	2000
τ	10^{-4}
Шаг метода простой итерации на подробной сетке	10^{-5}
Шаг метода простой итерации на грубой сетке	10^{-5}

Таблица 1: Параметры расчета

Построим разностную схему, пользуясь интегро-интерполяционным методом:

$$\begin{aligned} &\frac{u_i^{k+1}-u_i^k}{\tau} = \tfrac{1}{S_i}\sum_{j\in\Theta_i}\frac{u_j^{k+1}-u_i^{k+1}}{h_{ij}}l_{ij}, \\ &u_i^k = 0, i\in\Gamma_h, \\ &u_j^0 = sin(\pi x_i)sin(\pi y_i), \end{aligned} \tag{1.5}$$

где Γ_h – множество номеров ячеек, пересечение, которых с границей Γ является непустым множеством, l_{ij} – длина грани между i-й и j-й ячейками, h_{ij} – расстояние между центрами i-й и j-й ячеек, S_i – площадь i-й ячейки. Далее это сеточное уравнение будем записывать в виде $Au_h^k = f_h$

Полученное сеточное уравнение решается (алгоритм предложен в [2]) методом простой итерации, причем делается одна итерация и вычисляется невязка $r_h = f_h - A\tilde{u}_h^k$, здесь $\tilde{u}_h^k$ – решение полученное в ходе этой итерации. Далее производится проекция невязки на грубую сетку:

$$\bar{R}_{\bar{i}} = r_i, \tag{1.6}$$

где $\bar{i}$ – номер ячейки грубой сетки соответствующей i-й ячейке на подробной сетке (они совпадают при данном построении сеток).

Далее на грубой сетке решается уравнение для погрешности $A\Delta_h = R_h$.

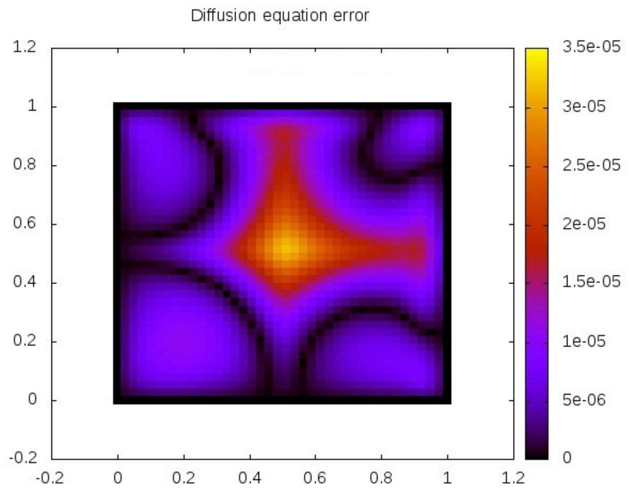

Рисунок **1.1**

Далее производится интерполяция погрешности на подробную сетку (если узел подробной сетки совпадает с узлом грубой, то значение копируется, если они не совпадают, то находится треугольник на грубой сетке внутрь которого попадает узел подробной сетки и значение δ_i^k интерполируется по узлам, находящимся на вершинах треугольника).

Далее полагается $u^k = \tilde{u}^k + \delta^k$ и делается несколько сглаживающих итераций.

Был выполнен расчет с параметрами, представленными в таблице 1.

На рисунке 1.1 представлено распределение ошибки (разности с точным решением модельной задачи). Предложенный метод демонстрирует хорошие результаты для модельной задачи.

Список литературы

1. Неледова А. В, Тишкин В. Ф., Филатов А. Ю. Нерегулярные адаптивные сетки для решения задач математической физики // Математическое моделирование, 1997, Т. 9; № 2, – С. 13–20.

2. Ладонкина М. Е., Милюкова О. Ю., Тишкин В. Ф. Консервативные схемы для решения уравнений диффузионного типа на основе использования многосеточных методов // ТСВМО, 2008, Т. 10, № 2, – С. 4–19.

Solution of the model problem for diffusion equation by multigrid method on an irregular grid

© R. V. Zhalnin[2]

Abstract. The paper presents the results of applying the multigrid method for solving diffusion-type equations on an irregular grid of Dirichlet's cells for a model problem.

Key Words: multigrid method, irregular grid, the equations of diffusion type.

[2]Senior lecturer of applied mathematics chair, Mordovian State University after N. P. Ogarev, Saransk; zhrv@hpc.mrsu.ru.