УДК 533.6

Об одной нелинейной начально-краевой задаче в аэрогидромеханике

© П. А. Вельмисов[1], А. В. Крупенников[2]

Аннотация. Исследуются безвихревые изэнтропические (потенциальные) течения идеального газа, которые описываются нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных для потенциала скорости. Для этого уравнения указан класс решений, используемый для описания течений газа между вращающимися плоскостями. Найдено точное решение исследуемой задачи в случае некоторых конкретно заданных законов движения плоскостей. Предложен способ численного решения задачи методом Галеркина при произвольных законах движения плоскостей.

Ключевые слова: нелинейная начально-краевая задача, аэрогидромеханика, потенциал скорости, вращающиеся плоскости, дифференциальное уравнение с частными производными, метод Галеркина.

1. Постановка задачи

Безвихревые изэнтропические течения идеального газа описываются уравнением:

$$\begin{gathered}\varphi_{tt}+2\varphi_r\varphi_{rt}+\tfrac{2}{r^2}\varphi_\theta\varphi_{\theta t}+\varphi_r^2\varphi_{rr}+\tfrac{1}{r^4}\varphi_\theta^2\varphi_{\theta\theta}+\\ +\tfrac{2}{r^2}\varphi_r\varphi_\theta\varphi_{r\theta}-\tfrac{1}{r^3}\varphi_r\varphi_\theta^2=a^2\left(\varphi_{rr}+\tfrac{1}{r}\varphi_r+\tfrac{1}{r^2}\varphi_{\theta\theta}\right),\end{gathered} \tag{1.1}$$

$$a^2=\frac{\kappa+1}{2}-(\kappa-1)\left(\varphi_t+\tfrac{1}{2}\varphi_r^2+\tfrac{1}{2r^2}\varphi_\theta^2\right).$$

Здесь $\varphi(r,\theta,t)$, a - соответственно безразмерные потенциал скорости, скорость звука, r,θ - полярные координаты, t - время, $\kappa=const$ - показатель адиабаты.

Решение уравнения (1.1) будем искать в виде

$$\varphi=\frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)}t+r^2f(\theta,t). \tag{1.2}$$

Подставляя (1.2) в (1.1), для $f(\theta,t)$ получим уравнение

$$f_{tt}+8ff_t+2f_\theta f_{\theta t}+8f^3+f_\theta^2f_{\theta\theta}+6ff_\theta^2+(\kappa-1)\left(f_t+2f^2+\tfrac{1}{2}f_\theta^2\right)(f_{\theta\theta}+4f)=0. \tag{1.3}$$

Класс решений (1.2), (1.3) используется для описания течений газа между вращающимися по законам $\theta=\theta_1(t)$, $\theta=\theta_2(t)$ плоскостями. Для точек плоскостей $(\theta=\theta_k(t))$ имеют место условия непротекания

$$f_\theta[\theta_k(t),t]=\theta_k'(t),\ k=1,2. \tag{1.4}$$

Задавая начальные условия

$$f(\theta,0)=g(\theta),f_t(\theta,0)=h(\theta) \tag{1.5}$$

будем иметь нелинейную начально-краевую задачу (1.3) - (1.5).

[1]Заведующий кафедры высшей математики, Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; velmisov@ulstu.ru

[2]Аспирант кафедры высшей математики, Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; al.krupennikov@mail.ru

2. Точное решение

Точное решение поставленной задачи (1.3), (1.4) можно искать в виде

$$f(\theta,t)=a(t)\cos 2\theta+b(t)\sin 2\theta+c(t). \tag{2.1}$$

Подставляя (2.1) в уравнение (1.3), после некоторых преобразований получим:

$$[8a(t)c'(t)+8b(t)^2a(t)+8a(t)c(t)^2+a''(t)+4c(t)a'(t)+4\kappa c(t)a'(t)+16\kappa a(t)c(t)^2+8a(t)^3]\cdot$$
$$\cdot\cos 2\theta+[b''(t)+8a(t)^2b(t)+4c(t)b'(t)+8b(t)c'(t)+8b(t)c(t)^2+8b(t)^3+4\kappa c(t)b'(t)+$$
$$+16\kappa b(t)c(t)^2]\cdot\sin 2\theta+4\kappa c(t)c'(t)+c''(t)+8\kappa c(t)b(t)^2+8a(t)a'(t)+16b(t)^2c(t)+$$
$$+8\kappa c(t)a(t)^2+8\kappa c(t)^3+8b(t)b'(t)+16c(t)a(t)^2+4c(t)c'(t)=0.$$

Подставив $f(\theta,t)=a(t)\cos 2\theta+b(t)\sin 2\theta+c(t)$ в граничные условия, получим: $-2a(t)\sin 2\theta_1(t)+2b(t)\cos 2\theta_1(t)=\theta_1'(t)$, $-2a(t)\sin 2\theta_2(t)+2b(t)\cos 2\theta_2(t)=\theta_2'(t)$.

Имеем систему 5 дифференциальных уравнений для 5 неизвестных a, b, c, θ_1, θ_2:

$$\begin{cases} a''+4a'c(1+\kappa)+a\left(8b^2+8c'+8c^2+16\kappa c^2\right)+8a^3=0,\\ b''+4b'c(1+\kappa)+b\left(8a^2+8c'+8c^2+16\kappa c^2\right)+8b^3=0,\\ c''+4c'c(1+\kappa)+8c\left(2+\kappa\right)\left(b^2+a^2\right)+8aa'+8bb'+8\kappa c^3=0,\\ -2a\sin 2\theta_1+2b\cos 2\theta_1=\theta_1',\\ -2a\sin 2\theta_2+2b\cos 2\theta_2=\theta_2'. \end{cases}$$

Задавая начальные условия $a'(0)=a_0$, $a(0)=a_0'$; $b(0)=b_0$, $b(0)=b_0'$; $c(0)=c_0$, $c'(0)=c_0'$; $\theta_1(0)=\theta_{10}$, $\theta_2(0)=\theta_{20}$, будем иметь задачу Коши, которую можно решать численно методом Рунге-Кутта с помощью пакета Mathematica.

Например, зададим начальные условия: $a'(0)=0$, $a(0)=1$; $b'(0)=0$, $b(0)=2$; $c'(0)=0$, $c(0)=1$; $\theta_1(0)=0$, $\theta_2(0)=1$. Ниже на рис. 2.1 приведены графики функций $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$ при $\kappa=1.4$ (воздух), на рис. 2.2 при $\kappa=7$ (вода), а на рис. 2.3 поверхность $f(\theta,t)$ при $\kappa=1.4$ (воздух).

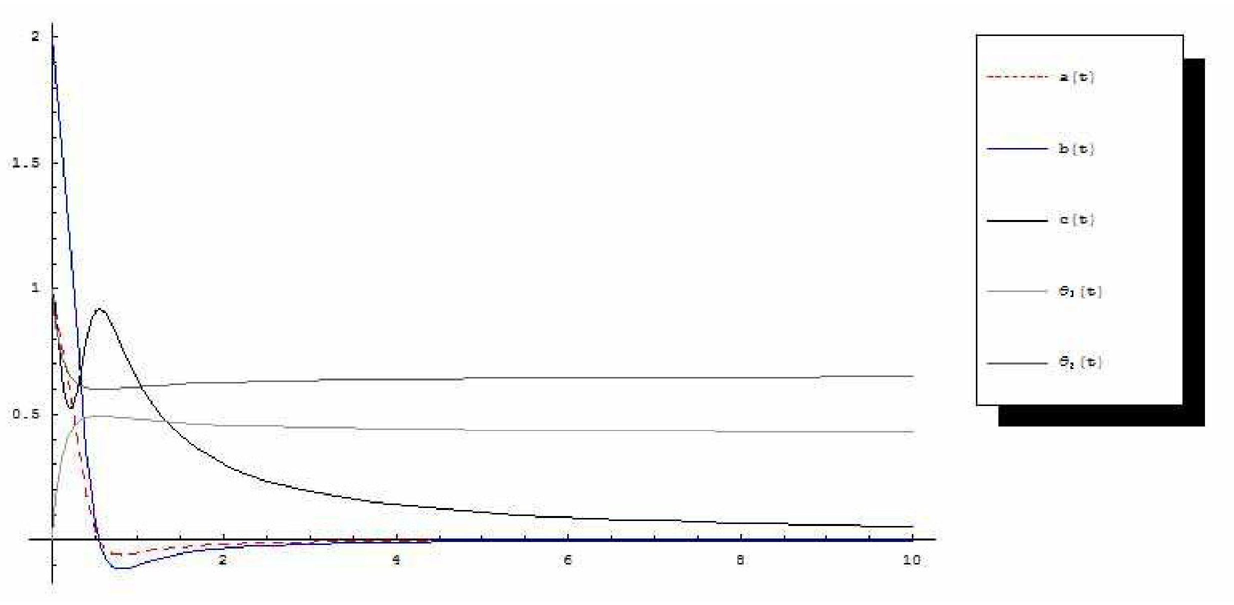
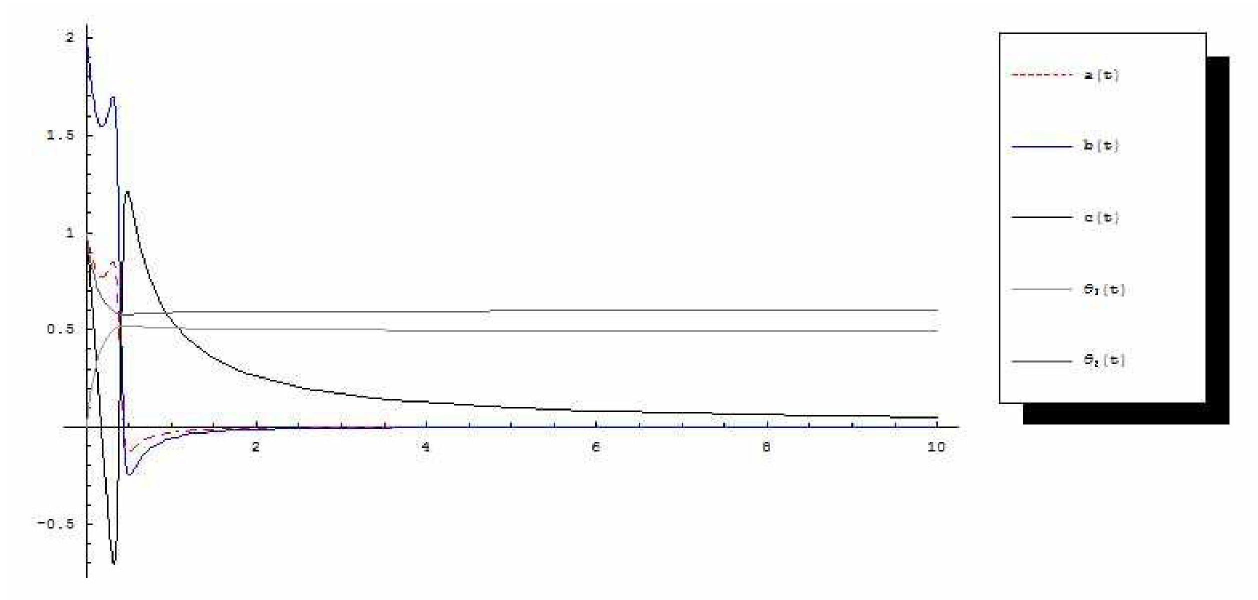


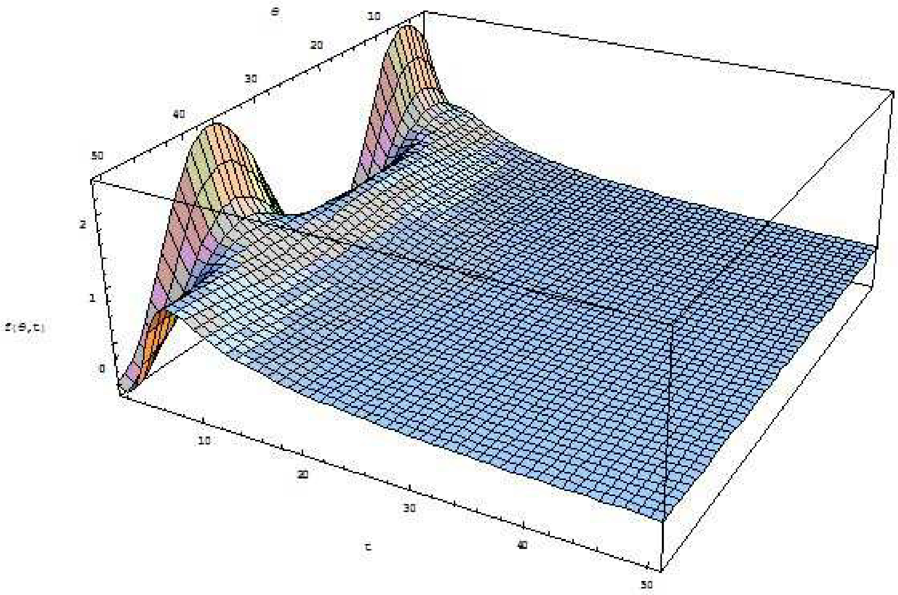
Рисунок **2.1**

Графики функций $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$ при $t\in[0,10]$ ($\kappa=1.4$)



Р и с у н о к **2.2**

Графики функций $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$ при $t \in [0, 10]$ ($\kappa = 7$)



Р и с у н о к **2.3**

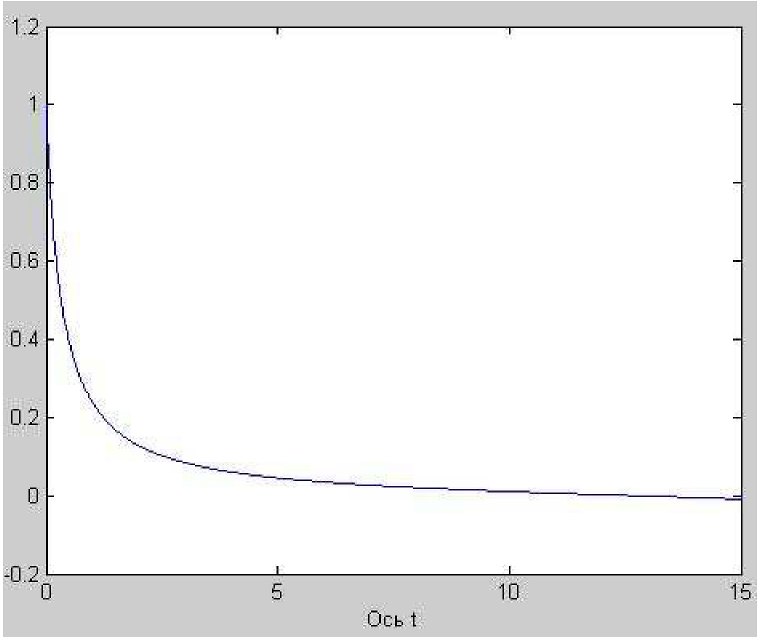
Поверхность $f(\theta, t) = a(t)\cos 2\theta + b(t)\sin 2\theta + c(t)$ при $t \in [0, 5]$, $\theta \in [0, 5]$ ($\kappa = 1.4$)

Найдены также другие частные решения для уравнения (1.3).

Например, в случае, когда функция f зависит только от t, дифференциальное уравнение (1.3) примет вид

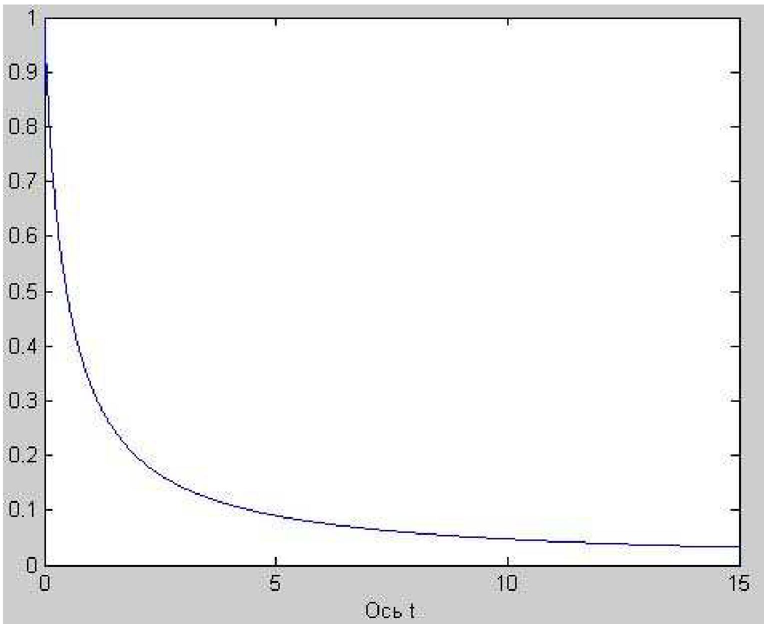
$$f_{tt} + 8ff_t + 8f^3 + 4(\kappa - 1)f(f_t + 2f^2) = 0. \tag{2.2}$$

Для этого обыкновенного дифференциального уравнения (2.2) решалась задача Коши с начальными условиями $f(0) = g_0$, $f_t(0) = h_0$, при этом строился график для $f(t)$. Примеры приведены на рис. 2.4 - 2.5:



Р и с у н о к **2.4**

График $f = f(t)$, $f(0) = 1$, $f'(0) = -3$, $\kappa = 1.4$ (воздух)



Р и с у н о к **2.5**

График $f = f(t)$, $f(0) = 1$, $f'(0) = -3$, $\kappa = 7$ (вода)

В случае стационарного течения ($f = f(\theta)$) задача не имеет физического смысла, так как при этом давление оказывается отрицательным.

3. Приближенное решение

Предложен приближенный способ решения задачи (1.3),(1.4) о движении газа между вращающимися плоскостями, основанный на методе Галеркина и приводящий решение задачи к исследованию системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

В этом случае решение задачи находится для произвольных законов вращения плоскостей $\theta = \theta_1(t)$, $\theta = \theta_2(t)$. Решение представлялось в виде

$$f(\theta,t) = a(t)\cos\nu\theta + b(t)\cos\nu\theta + \sum_{n=0}^{N} f_n(t)\cos\frac{n\pi(\theta-\theta_1)}{\theta_2-\theta_1}, \tag{3.1}$$

где $a(t) = \frac{1}{\nu\Delta}(\theta_1'\cos\nu\theta_2 - \theta_2'\cos\nu\theta_1)$, $b(t) = \frac{1}{\nu\Delta}(\theta_1'\sin\nu\theta_2 - \theta_2'\sin\nu\theta_1)$, $\Delta = \sin\nu(\theta_2-\theta_1)$, ν - произвольный параметр (может быть и функцией времени). Наиболее простые вычисления будут иметь место в случае $\nu = 2$.

В первом приближении ($N = 0$) получено нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$f_0''\cdot S_1 + f_0 f_0'\cdot S_2 + f_0^3\cdot S_2 + f_0\cdot S_3 + f_0'\cdot S_4 + f_0^2\cdot S_5 + S_6 = 0, \tag{3.2}$$

где S_i - функции, зависящие от t, $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$, $i=\overline{1,6}$.

Решение задачи можно представить также в виде

$$f(\theta,t) = \alpha(t)\theta + \beta(t)\theta^2 + \sum_{n=0}^{N} f_n(t)\cos\frac{n\pi(\theta-\theta_1)}{\theta_2-\theta_1}, \tag{3.3}$$

где $\alpha(t) = \frac{\theta_1'\theta_2-\theta_1\theta_2'}{\theta_2-\theta_1}$, $\beta(t) = \frac{\theta_1'-\theta_2'}{2(\theta_2-\theta_1)}$.
В частности, в первом приближении, когда N=0,

$$f(\theta,t) = \alpha(t)\theta + \beta(t)\theta^2 + f_0(t).$$

Тогда для $f_0(t)$ получим нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$f_0'\cdot Z_1 + f_0''\cdot Z_2 + f_0' f_0\cdot Z_3 + f_0\cdot Z_4 + f_0^3\cdot Z_5 + f_0^2\cdot Z_6 + Z_7 = 0, \tag{3.4}$$

где Z_i - функции, зависящие от t, $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$, $i=\overline{1,7}$.

Предлагаемые решения (3.1) и (3.3) удовлетворяют граничным условиям непротекания (1.4).

Далее решалась задача Коши для уравнений (3.2) или (3.4) при задании конкретного вида функций $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$ и задании начальных условий.

Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (2009-2013 гг.), гос.контракт №П1122.

Список литературы

1. Булаев С.В., Вельмисов П.А., Крупенников А.В. Об одном классе потенциальных течений газа // Тезисы докладов XXI Всероссийской конференции «Аналитические методы в газовой динамике». – Санкт-Петербург, 2006, с.17-18.

2. Вельмисов П.А., Булаев С.В., Крупенников А.В. Об одном классе безвихревых изэнтропических течений газа // Труды международной конференции КЛИН-2006. Том 4: Математические методы и модели в прикладных задачах науки и техники. Ульяновск: УлГТУ, 2006, с.108-110.

3. Вельмисов П.А., Крупенников А.В. Применение метода Галеркина для решения одной нелинейной задачи газовой динамики // Труды международной конференции КЛИН-2007. Том 4: Математические методы и модели в науке, технике, естествознании и экономике: синтез, анализ, диагностика. Ульяновск: УлГТУ, 2007. - с.72-76.

On a nonlinear initial-boundary value problem in the aerohydrodynamics

© P. A. Velmisov[3], A. V. Krupennikov[4]

Abstract. In this paper we study irrotational isentropic flows of an ideal gas which are described by nonlinear partial differential equation for the velocity potential. To this equation it is given the solution set used for describing gas flows between rotating planes. The exact solution to the investigated problem is found in case of several definite laws of plane motion. On arbitrary laws of plane motion it is given the Bubnov-Galerkin method for numerical solution.

Key Words: nonlinear initial-boundary value problem, aerohydrodynamics, velocity potential, rotating planes, partial differential equation, the Bubnov-Galerkin method.

[3]Head of the High Mathematics Department, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; velmisov@ulstu.ru.

[4]Postgraduate of the High Mathematics Department, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; al.krupennikov@mail.ru.