УДК 519.862.7

Построение поля потребительских предпочтений по торговой статистике

© В.К. Горбунов[1], А.Г. Ледовских[2]

Аннотация. Рассматривается обратная задача для обобщённой модели потребительского спроса, заключающаяся в построении векторного поля потребительских предпочтений по торговой статистике. Предлагается алгоритм оценки параметров поля методом наименьших квадратов. Узловые значения поля получаются из условий монотонности, порождающих обобщённую систему неравенств Африата.

Ключевые слова: Рыночный спрос, поле предпочтений, оценка параметров, обобщённая система неравенств Африата.

1. Введение

Современная теория спроса [1, 16] построена на основе понятия бинарного отношения предпочтения, определенного на множестве бесконечно делимых товаров и обладающего рядом свойств, основные из которых – полнота, транзитивность и непрерывность. Эти свойства в совокупности обеспечивают существование непрерывной порядковой функции полезности, являющейся индикатором данного отношения предпочтения. Вопрос о существовании и построении функции полезности, адекватной конкретному рынку, решается теоремой Африата [8]. Согласно этой теореме существование функции полезности, объясняющей статистический спрос в рамках классической модели, эквивалентно положительной разрешимости некоторой системы линейных неравенств (неравенств Африата), определяющей значения такой функции на статистических данных. На основе этой теоремы Х. Вэрианом развит «непараметрический метод» анализа потребительского спроса и решения обратной задачи ПС – построение функции полезности по статистическим данным [21]. В рамках этого метода, в частности, появилась возможность строить аналитические (экономические) индексы потребительского спроса: для однородных предпочтений – инвариантные [18], в общем случае – квазиинвариантные [4].

Многие зарубежные исследователи в последние десятилетия предпринимают попытки пересмотра классической теории потребительского спроса (ПС), основанной на использовании порядковой функции полезности, являющейся аналитическим представлением непрерывного, транзитивного и полного бинарного отношения предпочтений [16]. Большинство из них ограничивается теоретико-множественным уровнем обобщения теории, когда снимается предположение о транзитивности и/или полноте предпочтений и при этом обосновывается существование на доступном множестве благ наилучшего набора [15, 20]. Построению аналитических обобщений классической модели на основе отказа от функции полезности или транзитивности предпочтений посвящены работы [10, 19]. Обобщение Аллена [10] основано на представлении предпочтений через «направление предпочтения» (preference direction), определенное в каждой точке пространства товаров $\mathbb{R}^n_+$. Это представление фактически

[1]Заведующий кафедрой экономико-математических методов и информационных технологий, Ульяновский государственный университет, г. Ульяновск; vkgorbunov@mail.ru.

[2]Аспирант кафедры экономико-математических методов и информационных технологий, Ульяновский государственный университет, г. Ульяновск; ledovskikh_ag@mail.ru.

является векторным полем $q : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+$, однако Аллен и его последователи [13] не использовали теорию векторных полей и не построили содержательную теорию спроса (сравнительную статику), аналогичную классической теории, основанной на модели максимизации полезности. В теории «нетранзитивного потребителя» Шафера [19] полные, но необязательно транзитивные предпочтения представляются непрерывной и кососимметричной вещественной бифункцией $r(x, y)$, $x, y \in R^n_+$. В транзитивном случае существует такая функция полезности $u(x)$, что $r(x, y) = u(x) - u(y)$. Содержательная теория такого спроса также не известна.

2. Обобщённая модель потребительского спроса

В недавних работах В.К. Горбунова [2, 3, 5] построена обобщённая аналитическая модель, основанная на понятии монотонного векторного поля потребительских предпочтений. В общем случае поле предпочтений может быть непотенциальным.

Напомним [7], поле $q(x)$ в $\mathbb{R}^n$ называется *потенциальным*, если существует такая скалярная дифференцируемая функция $u(x)$, называемая потенциалом поля, что $q_i(x) = \partial u(x)/\partial x_i$, $i = \overline{1, n}$, и это поле называется *монотонно невозрастающим*, если для любых точек x и y выполняется неравенство

$$\langle q(x) - q(y), x - y \rangle \leq 0. \tag{2.1}$$

Если это неравенство при $x \neq y$ строгое, то поле называется монотонно убывающим. Потенциал монотонно невозрастающего поля $q(x)$ является вогнутой функцией.

Определение 2.1. [5]. *Векторным полем потребительских предпочтений называется монотонно невозрастающее непрерывное отображение* $q : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+$, *компоненты которого* $q_i(x)$ *имеют смысл относительных ценностей товаров, а их отношения* $q_i(x)/q_j(x)$ *являются предельными нормами замещения товара* j *товара товаром* i.

Неотрицательность компонент $q_i(x)$ в потенциальном случае означает неубывание потенциала. Компоненты $q_i(x)$ имеют смысл классических предельных полезностей, и свойство монотонного убывания поля соответствует первому закону Госсена классической теории — закону убывания предельной полезности. В случае потенциальности новая модель совпадает с классической[3]. Потенциал $u(x)$ можно считать порядковой функцией полезности.

Новая модель, как и классическая, позволяет вычислять и анализировать регулярные функции спроса. Она может считаться развитием модели Аллена на основе использования метода сравнительной статики (анализ Слуцкого) и теории векторных полей. Новая модель описывает рациональный выбор ансамбля потребителей некоторого рынка конечных продуктов, рассматриваемого как априорный объект моделирования. При этом поле $q(x)$ представляет систему предпочтений ансамбля потребителей. Такой подход, предложенный в [6], позволяет избежать известные парадоксы агрегирования покупателей Гормана, Зонненшейна, Дебре и Мантеля [16].

Рациональный выбор ансамбля потребителей, имеющих поле предпочтений $q(x)$ и расходующих на данном рынке в ценовой ситуации p суммарное количество денег e, т.е. рыночный спрос $x(p, e)$, определяется вместе с множителем λ системой нелинейных

[3] Понятие поля предпочтений использовалось ранее, в частности, П. Самуэльсоном и У. Горманом, но лишь в рамках классической теории, т.е. в потенциальном случае.

уравнений

$$\begin{cases} q_i(x) - \lambda p_i = 0, & i = \overline{1,n}, \\ \langle p, x \rangle - e = 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

В случае потенциальности поля система (2.2) совпадает с характеристической системой классической модели ПС. В [5] доказано, что в случае дифференцируемости и строгого убывания поля $q(x)$ система (2.2) определяет регулярный (однозначный и непрерывно дифференцируемый) спрос $x(p,e)$, матрица Слуцкого которого обладает всеми свойствами классической теории (отрицательная полуопределённость, структура нуль-пространства), кроме симметричности. В соответствии с условиями интегрируемости Гурвица-Узавы [12] при этом в общем случае функция полезности, рационализирующая этот спрос, не существует, а в соответствии с результатами [14], спрос модели (2.2) удовлетворяет слабой аксиоме выявленного предпочтения.

3. Задача построения поля предпочтений

Для практического использования математической модели, представляющей в общем виде некоторый класс реальных объектов, требуется её идентификация, то есть определение её параметров (числовых или функциональных) так, чтобы расчётные значения переменных, представляющих выделенные характеристики моделируемого объекта, достаточно точно совпадали с их наблюдаемыми значениями. Задачи идентификации моделей также называются обратными задачами.

Любая нетривиальная модель создаётся на основе идеализации реальных объектов, или же абстрагирования от факторов, которые исследователь считает несущественными или недоступными для количественного анализа. Кроме того, наблюдения, как правило, содержат неточности. Из этого следует, что расчётные и реальные значения выделенных характеристик не должны совпадать точно. Наиболее общим методом решения обратных задач является метод наименьших квадратов (МНК). Мы будем использовать этот метод для решения обратной задачи для модели (2.2). Эта задача заключается в построении поля предпочтений $q(x)$ по торговой статистике

$$\{p^t, x^t : t = \overline{0,T}\}, \tag{3.1}$$

где p^t – цены и x^t – количества потребления продуктов за отчётный период t. Эти данные определяют также потребительские расходы $e_t = \langle p^t, x^t \rangle$.

Для выяснения вопроса адекватности обобщённой модели ПС (2.2) реальному поведению конкретных потребителей, представленному статистикой (3.1), требуется выяснить, существует ли поле предпочтений $q(x)$ такое, что порождаемые им функции спроса $x(p,e)$ соответствуют этой статистике, т.е.

$$x(p^t, e_t) \approx x^t, \quad t = \overline{0,T}. \tag{3.2}$$

Такое поле будем называть *рационализирующим*, а задачу его построения назовём *обратной задачей обобщённой теории потребительского спроса.* Соотношения (3.2) можно понимать как неявную нелинейную регрессионную модель.

Для прямого применения МНК к регрессии (3.2) следует выбрать некоторый параметрический класс невозрастающих полей $q(x,w)$, для которого относительно несложно вычислять расчётный спрос $x(p,e;w)$, и параметры поля w определять из условия минимизации квадратичной невязки регрессионных уравнений (3.2)

$$\varphi(w) = \sum_{t=0}^{T} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i(p^t, e_t; w) - x_i^t \right)^2. \tag{3.3}$$

При этом следует выполнять ограничения параметров w, обеспечивающие положительность и монотонность (2.1) искомого поля.

Недостатком данного подхода является трудность выбора подходящего класса параметризации искомого поля $q(x,w)$, а также алгоритмическая сложность вычисления расчётного спроса $x(p,e;w)$. В нетривиальных случаях функционал (3.3) будет сильно нелинейным и определённым алгоритмически. При этом его минимизация при условиях (2.1) будет сложной задачей нелинейного программирования.

4. Обобщённая система Африата её решение

Задача построения поля $q(x,w)$ в параметрическом классе упрощается на основе модификации подхода С. Африата, лежащего в основе непараметрического анализа спроса в рамках классической модели ПС [1, 9, 21]. Напомним этот метод.

На первом этапе строится система линейных неравенств, определяющая искомую функцию полезности $u(x)$ и множитель Лагранжа $\lambda(p,e)$ классической модели ПС на статистических данных (3.1):

$$u_t = u(x^t), \quad \lambda_t = \lambda(p^t, e_t). \tag{4.1}$$

Эти значения называются "числами Африата". Коэффициенты системы неравенств, называемые *кросс-коэффициентами*, определяются данными (3.1):

$$e_{ts} = \langle p^t, x^s \rangle, \quad a_{ts} = e_{ts} - e_t, \quad s,t = \overline{0,T}. \tag{4.2}$$

Согласно теореме Африата [1, 9, 21] существование непрерывной, монотонной и вогнутой функции полезности, рационализирующей эти данные, эквивалентно положительной разрешимости системы линейных неравенств

$$u_s - u_t - \lambda_t a_{ts} \le 0, \quad t = \overline{0,T}, \quad s \ne t. \tag{4.3}$$

Для обеспечения положительности решения данной системы $\{u_t, \lambda_t\}$ накладываются условия на две её компоненты решения: $\lambda_0 = 1$, $u_0 = e_0$.

Числа Африата могут использоваться для построения дифференцируемых функций полезности в качестве интерполяционных условий

$$u(x^t) = u_t, \frac{\partial u(x^t)}{\partial x_i} = \lambda_t p_i^t, \quad i = \overline{1,n}, \quad t = \overline{0,T}. \tag{4.4}$$

В [1] описан интерполяционный метод нормальных сплайнов на основе условий (4.4), а также методы барицентрической и ортобарицентрической интерполяции, которые можно отнести к непараметрическим методам. Однако условия (4.4) можно также использовать и для параметрической аппроксимации методом наименьших квадратов. Этот метод имеет свои преимущества, так как в этом случае можно использовать параметрические классы дифференцируемых функций полезности с известными формальными и содержательными свойствами (монотонность, вогнутость, свойства факторных эластичностей и эластичностей замещения). Эти достоинства параметрического МНК мы сохраняем на основе следующей модификации первого этапа непараметрического анализа Африата-Вэриана для построения поля предпочтений по статистике (3.1).

Искомое поле некоторого параметрического класса $q(x;w)$ должно быть монотонно невозрастающим, т.е. удовлетворять вариационному неравенству (2.1). Подставив в него статистические значения $x = x^t$ и $y = x^s$, получим систему неравенств

$$\langle q(x^t;w) - q(x^s;w), x^t - x^s \rangle \le 0, \quad s,t = \overline{0,T}. \tag{4.5}$$

В силу предполагаемой рациональности потребительского выбора значения поля в точках спроса должны быть коллинеарными соответствующим ценам, т.е.

$$q^t \equiv q(x^t; w) = \lambda_t p^t, \quad t = \overline{0, T}, \tag{4.6}$$

где λ_t – некоторые положительные числа, являющиеся аналогом множителей Лагранжа классической модели ПС. Очевидно, $\lambda_t = \lambda(p^t, e_t)$ – множитель системы (2.2).

Подставляя соответствующие значения поля в неравенства (4.5) и используя кросс-коэффициенты (4.2), получим систему линейных неравенств относительно множителей λ_t:

$$\lambda_t a_{ts} + \lambda_s a_{st} \geq 0, \quad s, t = \overline{0, T}, \quad s \neq t. \tag{4.7}$$

Здесь исключены тривиальные равенства $0 \geq 0$ при $s = t$.

Итак, система (4.7) определяет множители λ_t, которые в свою очередь, определяют значения искомого поля в точках статистического спроса (4.6). Условия (4.6) аналогично (4.4) могут использоваться в качестве интерполяционных условий для построения искомого поля предпочтений $q(x; w)$, являющегося, как и функция полезности в потенциальном случае, аналитическим представлением потребительских предпочтений данного ансамбля потребителей.

Легко видеть, что система (4.7) является следствием системы Африата (4.3). Это значит, что любое решение системы (4.3) также является решением системы (4.7). Соответственно, будем называть (4.7) *обобщённой системой неравенств Африата.* Обобщённая система (4.7), как и система (4.3), алгебраически однородна. Новая система имеет одну степень свободы, соответствующую инвариантности монотонного поля $q(x; w)$ относительно умножения на положительную константу. Соответственно, здесь естественно наложить условие на искомую последовательность множителей, связанных системой (4.7), как и в классическом случае,

$$\lambda_0 = 1. \tag{4.8}$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 4.1. *Если торговая статистика* (3.1) *является реализацией потребительского спроса* $x(p, e)$, *порождаемого непрерывно дифференцируемым в* $\mathbb{R}^n_+$ *полем потребительских предпочтений* $q(x)$ *в соответствии с моделью* (2.2), *то значения* q^t *этого поля в точках спроса* x^t *представляются в виде* $q^t \equiv q(x^t) = \lambda_t p^t, \quad t = \overline{0, T}$, *где значения множителей* λ_t *составляют положительное решение обобщённой системы неравенств Африата* (4.7), *коэффициенты которой вычисляются согласно* (4.2).

Эта теорема представляет необходимые условия, которым должно удовлетворять поле, рационализирующее статистику спроса (3.1) в смысле (3.2). Мы пока не имеем доказательства того, что положительная разрешимость системы (4.7) обеспечивает существование поля предпочтений, рационализирующего статистику (3.1). Однако для математического моделирования нетривиальных явлений типична ситуация, когда вычислительные задачи формулируются на основе необходимых условий, которым должен удовлетворять искомый объект, в нашем случае – поле предпочтений.

Для построения поля предпочтений в некотором параметрическом классе $q(x; w)$ можно найти некоторое положительное решение системы (4.7) с условием (4.8) и по интерполяционным условиям (4.6) методом НК построить оценки параметров поля w.

Система неравенств (4.7) в совместном случае имеет многогранное выпуклое множество решений. В общем случае оно может быть неограниченным. На основе опыта решения обратной задачи для классической модели ПС [4] поставим задачу поиска набора множителей λ_t, наиболее близкого набору λ_t^F, определяемому статистическими индексами цен Фишера для ситуаций потребления (p^0, x^0) и (p^t, x^t):

$$F_{0t}^p = \sqrt{\frac{e_{t0}e_t}{e_0 e_{0t}}}.$$

Подставив эти индексы в левые части формул для инвариантных индексов цен

$$P_{st} = \frac{\lambda_s}{\lambda_t},$$

получим «пробные» множители

$$\lambda_t^F = \frac{1}{F_{0t}^p}, \quad t = \overline{1,T}. \tag{4.9}$$

Критерием качества решения системы (4.7), (4.8) будем считать квадратичный функционал

$$\varphi(\lambda) = \sum_{t=1}^{T} (\lambda_t - \lambda_t^F)^2. \tag{4.10}$$

Таким образом, поставлена задача квадратичного программирования, заключающаяся в минимизации функционала (4.10) при условиях (4.7), (4.8). Такая задача называется *задачей о нормальном решении* системы неравенств (4.7).

5. Построение поля предпочтений

Решив задачу о нормальном решении системы (4.7) с условием (4.8) и пробным набором множителей (4.9), мы получим интерполяционные условия для построения поля предпочтений – правые части уравнений (4.6). Ввиду неизбежных погрешностей моделирования и исходных данных, систему (4.6) следует решать методом НК, т.е. минимизацией функционала квадратичной невязки

$$\psi(w) = \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{n} [\lambda_t p_i^t - q_i(x^t, w)]^2. \tag{5.11}$$

На параметры w в общем случае следует накладывать ограничения, обеспечивающие положительность и монотонность поля (2.1).

В прикладной теории потребительского спроса, ориентированной на классическую модель ПС, имеется значительный опыт построения функций полезности и/или функций спроса [17, 11]. При этом были выявлены достаточно простые, но и достаточно гибкие системы функций: функция Джири-Стоуна, порождающая «линейные системы спроса», «транслоговая» функция и другие. Ориентируясь на этот опыт, мы начинаем исследование классов полей предпочтений, подобным этим системам и совпадающим с ними в частном потенциальном случае. На данном этапе мы исследовали два класса полей.

1. Линейное поле

$$q_i(x) = q_{i0} + \sum_{j=1}^{n} q_{ij} x_j, \quad i = \overline{1,n}. \tag{5.12}$$

Здесь $q_{i0} \geq 0$ и матрица

$$Q \equiv q_{ij} = \frac{\partial q(x)}{\partial x}$$

должна быть отрицательно полуопределена, чтобы обеспечить монотонное неубывание поля (2.1). Ввиду несимметричности Q это означает, что отрицательно полуопределена должна быть симметричная матрица $Q + Q^T$. Для симметричных матриц известен детерминантный критерий Сильвестра отрицательной определённости.

2. Обобщённо-гиперболическое поле

$$q_i(x) = \frac{\alpha_i}{\sum\limits_{j=1}^{n} \beta_{ij} x_j}, \quad i = \overline{1, n}. \tag{5.13}$$

Здесь $0 < \alpha_i < 1$, $\sum \alpha_i \equiv \mu \leq 1$, $\beta_{ii} = 1$, $|\beta_{ij}| \ll 1$. Это поле в случае $\beta_{ij} = 0, i \neq j$ совпадает с градиентным полем функции Кобба-Дугласа, которое при $\mu < 1$ будет монотонно убывающим. Следовательно, это свойство сохранится и для непотенциального поля (5.13) при достаточно малых $\beta_{ij}, i \neq j$.

Для демонстрации описанного метода построения поля по статистике (3.1) мы использовали два примера неинтегрируемого (в нашей терминологии – непотенциального) спроса, приведенных в упомянутых выше работах Katzner (1971) [13] и Shafer (1974) [19].

1. Спрос Катцнера (спрос K):

$$\begin{aligned}
x_1(p, e) &= \frac{1}{13} \frac{-4p_1 - p_2 + 18p_3}{p_3}, \\
x_2(p, e) &= \frac{1}{13} \frac{-3p_1 - 4p_2 + 20p_3}{p_3}, \\
x_3(p, e) &= \frac{1}{13} \frac{4p_1^2 + 4p_2^2 + 4p_1p_2 - 18p_1p_3 - 20p_2p_3 + 13ep_3}{p_3}.
\end{aligned}$$

2. Спрос Шафера (спрос Sh):

$$\begin{aligned}
x_1(p, e) &= \frac{e}{2p_1(1 + \sqrt{p_2/p_1})}, \\
x_2(p, e) &= \frac{e}{2p_2(1 + \sqrt{p_2/p_1})}, \\
x_3(p, e) &= \frac{e}{p_3(1 + \sqrt{p_1/p_2})}.
\end{aligned}$$

Задав условную динамику цен и расходов для $T = 34$, вычислим по приведенным формулам количества покупок. Полученные результаты моделирования статистики (3.1) приведены в таблице 1.

Результаты минимизации функционала (5.11) следующие. Обозначим полученный вектор параметров для обоих примеров $\hat{w}$. Для линейного поля (5.12) и спроса K получены следующие компоненты этого вектора:

$$\hat{q}_{01} = 11,16, \quad \hat{q}_{02} = 10,51, \quad \hat{q}_{03} = 3,26,$$

p_1	p_2	p_3	e	K			Sh		
				x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3
2,00	6,00	3,00	100,00	1,03	0,77	31,11	9,15	3,05	21,13
2,04	5,76	3,03	101,00	1,03	0,80	31,12	9,24	3,27	20,90
2,08	5,53	3,06	102,01	1,04	0,83	31,14	9,32	3,51	20,66
2,12	5,31	3,09	103,03	1,04	0,85	31,16	9,40	3,76	20,42
2,16	5,10	3,12	104,06	1,05	0,88	31,18	9,48	4,03	20,18
2,21	4,89	3,15	105,10	1,05	0,90	31,20	9,56	4,32	19,94
2,25	4,70	3,18	106,15	1,05	0,92	31,23	9,64	4,62	19,69
2,30	4,51	3,22	107,21	1,06	0,94	31,26	9,72	4,95	19,45
2,34	4,33	3,25	108,29	1,06	0,96	31,29	9,79	5,30	19,20
2,39	4,16	3,28	109,37	1,06	0,98	31,32	9,87	5,68	18,96
2,44	3,99	3,31	110,46	1,07	1,00	31,35	9,94	6,08	18,71
2,49	3,83	3,35	111,57	1,07	1,01	31,38	10,01	6,50	18,46
2,54	3,68	3,38	112,68	1,07	1,03	31,41	10,08	6,95	18,21
2,59	3,53	3,41	113,81	1,07	1,05	31,44	10,15	7,44	17,96
2,64	3,39	3,45	114,95	1,07	1,06	31,47	10,21	7,95	17,71
2,69	3,25	3,48	116,10	1,07	1,07	31,50	10,27	8,50	17,45
2,75	3,12	3,52	117,26	1,08	1,09	31,53	9,15	3,05	21,13
2,80	3,00	3,55	118,43	1,08	1,10	31,56	9,24	3,27	20,90
2,86	2,88	3,59	119,61	1,08	1,11	31,59	9,32	3,51	20,66
2,91	2,76	3,62	120,81	1,08	1,12	31,61	9,40	3,76	20,42
2,97	2,65	3,66	122,02	1,08	1,13	31,64	9,48	4,03	20,18
3,03	2,55	3,70	123,24	1,08	1,14	31,67	9,56	4,32	19,94
3,09	2,44	3,73	124,47	1,08	1,15	31,69	9,64	4,62	19,69
3,15	2,35	3,77	125,72	1,08	1,15	31,71	9,72	4,95	19,45
3,22	2,25	3,81	126,97	1,08	1,16	31,73	9,79	5,30	19,20
3,28	2,16	3,85	128,24	1,08	1,17	31,76	9,87	5,68	18,96
3,35	2,08	3,89	129,53	1,08	1,18	31,78	9,94	6,08	18,71
3,41	1,99	3,92	130,82	1,08	1,18	31,80	10,01	6,50	18,46
3,48	1,91	3,96	132,13	1,08	1,19	31,81	10,08	6,95	18,21
3,55	1,84	4,00	133,45	1,08	1,19	31,83	10,15	7,44	17,96
3,62	1,76	4,04	134,78	1,08	1,20	31,85	10,21	7,95	17,71
3,70	1,69	4,08	136,13	1,07	1,20	31,86	10,27	8,50	17,45
3,77	1,62	4,12	137,49	1,07	1,21	31,88	9,15	3,05	21,13
3,84	1,56	4,17	138,87	1,07	1,21	31,89	9,24	3,27	20,90
3,92	1,50	4,21	140,26	1,07	1,21	31,90	9,32	3,51	20,66

Таблица 1: Моделируемая статистика

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} -12,6 & 3,25 & 0,041 \\ 9,96 & -11,67 & -0,18 \\ -0,42 & 0,33 & -0,003 \end{pmatrix}.$$

При этом невязка $\psi_K(\hat{w}) = 0,00002$.

Для спроса Шафера и линейного поля $\psi_{Sh}(\hat{w}) = 2,46$. Величина относительной погрешности предсказания не превышает величин $0,01\%$ и 11% соответственно. Следовательно, линейное поле лучше описывает предпочтения потребителей, порождающие статистику K.

Для обобщённо-гиперболического поля (5.13) размеры невязок равны соответственно $\psi_K(\hat{w}) = 296$ и $\psi_{Sh}(\hat{w}) = 881$.

Таким образом, в рамках двух предложенных классов полей для приведенных примеров более адекватным является линейное поле (5.12).

Работа поддержана целевой программой Минобразования РФ «Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2010 годы), проект 2.1.3/6763 «Развитие математических моделей и анализ рыночного спроса и производства».

Список литературы

1. Горбунов В.К. Математическая модель потребительского спроса: Теория и прикладной потенциал. — М.: Экономика, 2004. – 174 с.

2. Горбунов В.К. Модель потребительского спроса без функции полезности // Труды СВМО. – 2005. – Т. 7. – № 1. – С. 45-51.

3. Горбунов В.К. Обобщённая модель потребительского спроса и выявленное предпочтение // Труды СВМО. – 2007. – Т. 9. – № 2. – С. 37-43.

4. Горбунов В.К., Козлова Л.А. Построение и исследование квазиинвариантных индексов потребления // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2008. – № 3 (19).

5. Горбунов В.К. Модель потребительского спроса, основанная на векторном поле предпочтений // Вестник Московского университета. Серия 6. Экономика. – № 1. – С. 67-79

6. Горбунов В.К. Особенности агрегирования потребительского спроса // ЖЭТ. – 2009. – № 1. – С. 85-94.

7. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. – М.: Мир, 1975.

8. Afriat S.N. The construction of utility functions from expenditure data // International Economic Review. – 1967. – V. 8. – No. 1. – P. 67-77.

9. Afriat S.N. Efficiency estimates of production functions // International Economic Review. – 1972. – V. 13. – P. 568-598.

10. Allen R.G.D. The foundation of a mathematical theory of exchange // Economica. – 1932. – V. 12. – P. 197-226.

11. Deaton A., Muellbauer J. An Almost Ideal Demand System // The American Economic Review. – 1980. – V. 70. – №. 3. – P. 312-326.

12. Hurwic L., Uzawa H. On the integrability of demand functions / In: Chipman J.S. et al. (Eds). Preference, Utility and Demand. – New York: Harcourt Brace, 1971. – Ch. 6.

13. Katzner D.W. Demand and exchange analysis in the absence of integrability conditions / In: Chipman J.S. et al. (Eds). Preference, Utility and Demand. – New York: Harcourt Brace, 1971. – Ch. 10. – P. 254-270.

14. Kihlstrom R., Mas-Colell A., Sonnenschein H. The Demand Theory of the Weak Axiom of Revealed Preference // Econometrica. – 1976. – V. 44. – №5. – P. 971-978.

15. Mariotti M. What kind of preference maximization does the weak axiom of revealed preference characterize? // Economic Theory. – 2008. – V. 35. – P. 403-406.

16. Mas-Colell A., Whinston M., Green J. Microeconomic Theory. – New York: Oxford University Press, 1995. – 1008 p.

17. Pollak, R.A., Wales, T.J. Estimation of the Linear Expenditure System // Econometrica. – 1969. – V. 37. – №4. – P. 611-628.

18. Samuelson P.A. and Swamy S. Invariant economic index numbers and canonical duality: survey and syn-thesis // The American Economic Review. – 1974. – V. 64. – No. 4. – P. 566-593.

19. Shafer W.J. The nontransitive consumer // Econometrica. – 1974. – V. 42. – P. 913-919.

20. Quah J. K-H. Weak axiomatic demand theory // Economic theory. – 2006. – V. 29. – P. 677-699.

21. Varian H. The nonparametric approach to demand analysis // Econometrica. – 1982. – V. 50. – №4.

The construction of a preference field on a trade statistics

© **V.K. Gorbunov[4], A.G. Ledovskikh[5]**

Abstract. An inverse problem for the generalized model of the consumer demand, consisting in construction of a vector field of consumer preferences on trade statistics is considered. The least squares algorithm of an estimation of parameters of the field is proposed. Node values of the field are obtained from the conditions of the monotony generating generalized system of inequalities.

Key Words: Market demand, preference field, parameters estimation, generalized Afriat inequalities system.

[4]Chief of Mathematical Methods and Information Technology Chair, Ulyanovsk State University, Ulyanovsk; vkgorbunov@mail.ru.

[5]Postgraduate student of Mathematical Methods and Information Technology Chair, Ulyanovsk State University, Ulyanovsk; ledovskikh_ag@mail.ru.