

УДК 517.977

Две задачи оптимального быстродействия

© О. В. Видилина¹

Аннотация. В работе рассмотрены задача оптимального быстродействия для магнитоэлектрического силового привода и оптимальное управление температурным полем.

Ключевые слова: оптимальное быстродействие, асимптотика точек переключения, магнитоэлектрический силовой привод, температурное поле.

1. Задача оптимального быстродействия для магнитоэлектрического силового привода

В инженерных применениях, там, где механизмы должны постоянно работать в цикле с большой скоростью, существенным является оптимальное управление. Также обстоит дело с магнитоэлектрическим силовым приводом с линейной характеристикой [7]. Оптимальное по времени управление требует определение того, что заставляет динамическую систему переходить от одного начального состояния в нужное конечное состояние за минимальное время. Как обычно, входная величина (напряжение, приложенное к приводу) ограничена, и управление является скалярным ($|u| = 1$).

Анализируемая система состоит из магнитоэлектрического силового привода с линейной характеристикой, имитируемого груза, прикрепленного к оптически связанному датчику линейного параметра, источника света и объектива. Привод, имитируемый груз и линейный тахометр установлены на общем закаленном валу (немагнитная нержавеющей сталь), установленном на линейных подшипниках. Груз перемещается горизонтально на укрепленных направляющих с помощью трех роликподшипников, минимизирующих трение. Поскольку центр масс узла находится около средней линии вала, то движущая сила действует на центр масс всей системы. Это уменьшает наводимый момент, который стремится вызвать колебания в системе. Соленоид содержит кольцевые магниты, с ориентировкой кристаллов по оси, и состоит из двух слоев привода, бифилярно намотанных для снижения индуктивности. С одной стороны катушка опирается на алюминиевую структуру, которая передает силу на движущуюся часть соленоида. Плотность потока, измеренная в рабочем воздушном зазоре, составила 8200 gauss, сопротивление катушек $R = 1...10$ Ом, а индуктивность $L = 10^{-3}...10^{-5}$ Гн. Датчик оптического положения, стеклянная решетка с узкими параллельными линиями, попеременно непроницаемая и прозрачная, прикреплена к нагрузке. Датчик установлен между источником света и объективом, с увеличением света в 10 раз и направляющим свет на два фототранзистора. Механизм двигает нагрузку и датчик, пока каждый фототранзистор не совместится наполовину с непрозрачной линией и наполовину с прозрачной линией. Датчик, прикрепленный к противоположной стороне массивной нагрузки, вырабатывает для системы управления соленоидом сигнал обратной связи. Электроника посылает сигналы управления соленоидом и вырабатывает сигнал отрицательной обратной связи пропорциональный ошибкам положения и скорости,

¹Доцент кафедры дифференциальных уравнений и теории управления, Самарский государственный университет, г. Самара; vidilina_olga@mail.ru.

предназначенные для управления окончания двухпозиционного режима. Поскольку вся конструкция жесткая и приложенные силы проходят через центр масс, то для практических целей она может рассматриваться как частица с одной степенью свободы. Полагается, что формируется вязкое трение.

Индуктивность изменяется в зависимости от положения катушки относительно постоянного магнита. Пренебрегая, при небольшом перемещении нелинейностью индуктивности, будем считать систему линейной. Тогда уравнения состояния принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{\mu}{m}x_2 + \frac{\alpha_1}{m}y \\ \varepsilon\dot{y} &= -\alpha_2x_2 - Ry + bu, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где α_1, α_2 – электромеханические константы взаимодействия, R – сопротивление, m – масса нагрузки, включая катушку и вал, μ – коэффициент вязкого трения, роль малого параметра ε играет индуктивность, u – оптимальное управление, $|u| \leq 1$. Требуется перевести данную систему из начального положения (x_1^0, x_2^0, y^0) в начало координат за минимальное время t_3 .

С помощью преобразования $x = v + \varepsilon Hz, y = z + Px$ разделим переменные в (1.1) [4]. В этом случае матрицы $P(\varepsilon), H(\varepsilon)$ примут следующий вид

$$\begin{aligned} P(\varepsilon) &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\alpha_2}{R} \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\mu\alpha_2}{mR^2} - \frac{\alpha_1\alpha_2^2}{mR^3} \end{pmatrix} + \dots \\ H(\varepsilon) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\alpha_1}{mR} \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\mu\alpha_2}{mR^2} - \frac{\alpha_1\alpha_2^2}{mR^3} \end{pmatrix} + \dots, \end{aligned}$$

В результате получим следующую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= v_2, \\ \dot{v}_2 &= Kv_2 - \frac{\alpha_1 b}{mR}u, \\ \varepsilon\dot{z}_1 &= (-R + \varepsilon\frac{\alpha_1\alpha_2}{mR})z_1 + bu, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где $K = K_0 + \varepsilon K_1 = -\frac{\mu}{m} - \frac{\alpha_1\alpha_2}{mR} - \varepsilon(\frac{\mu\alpha_2}{mR^2} + \frac{\alpha_1\alpha_2^2}{mR^3})$.

Приведем медленную подсистему в (1.2) к диагональному виду при помощи матрицы перехода

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -K_0 + \varepsilon K_1 \end{pmatrix}.$$

В результате получим систему

$$\dot{v} = Av + Du, \quad \varepsilon\dot{z} = (-R + \varepsilon\frac{\alpha_1\alpha_2}{mR})z + bu, \tag{1.3}$$

где $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -K_0 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -K_1 \end{pmatrix}$, $D = d_0 + \varepsilon d_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_1 b}{mRK_0} \\ \frac{\alpha_1 b}{mRK_0} \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_1 b K_1}{mRK_0^2} \\ \frac{\alpha_1 b K_1}{mRK_0^2} \end{pmatrix}$.

Точки переключения оптимального управления для рассматриваемой задачи делятся на две группы. Первая группа содержит точку переключения, близкую к соответствующей

точке переключения в вырожденной задаче (при $\varepsilon = 0$): $t_1(\varepsilon)$. Вторая группа состоит из точки переключения $t_2(\varepsilon)$ управления вблизи начала координат, то есть она отстоит от t_3 на величину порядка $O(\varepsilon)$ [5]:

$$t_1 = t_{10} + \varepsilon t_{11} + \dots, \quad t_2 = t_{20} + \varepsilon t_{21} + \dots, \quad t_3 = t_{20} + \varepsilon t_{31} + \dots.$$

Отличие данной задачи быстродействия от рассмотренной в [3] заключается в том, что имеется нулевое собственное значение, что не мешает воспользоваться предложенным в этой статье методом нахождения асимптотики точек переключения для линейной задачи быстродействия, где все собственные значения матрицы системы отличны от нуля, а напротив, упрощает некоторые уравнения. Так системы для нахождения асимптотики точек переключения выглядят следующим образом

$$t_{10} - \frac{1}{2}t_{20} = -\frac{v_{10}^0}{2d_1^0}, \quad e^{K_0 t_{10}} - \frac{1}{2}e^{K_0 t_{20}} = \frac{1}{2} - \frac{v_{20}^0 K_0}{2d_2^0},$$

$$t_{31} - t_{21} = \frac{\ln 2}{R}, \quad e^{K_0 t_{10}} t_{11} - \frac{1}{2}e^{K_0 t_{20}} t_{21} = \frac{K_1}{K_0} \left(\frac{v_{20}^0}{2d_2^0} + t_{10} - \frac{1}{2}t_{20} \right) - e^{K_0 t_{20}} \frac{\ln 2}{R}.$$

Пример 1. Пусть $\mu = 0.1$, $m = 30$ Г, $\alpha_1 = 0.5$, $\alpha_2 = 1$, $R = 1$ Ом, $b = 18$, $\varepsilon = 0.001$. Тогда система (1.1) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{300}x_2 + \frac{1}{60}y, \\ \varepsilon \dot{y} &= -x_2 - y + 18u. \end{aligned}$$

Матрицы $P(\varepsilon)$, $H(\varepsilon)$ в данном случае такие

$$P(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & -0.02 \end{pmatrix} + \dots, \quad H(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.02 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ -0.02 \end{pmatrix} + \dots,$$

тогда после разделения движений получим систему

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= v_2, \\ \dot{v}_2 &= K v_2 - 0.3u, \\ \varepsilon \dot{z}_1 &= (-1 + 0.02\varepsilon)z_1 + 18u, \end{aligned}$$

где $K = K_0 + \varepsilon K_1 = -0.02 - 0.02\varepsilon$. И наконец, после приведения медленной подсистемы к диагональному виду получаем

$$\dot{v} = Av + Du, \quad \varepsilon \dot{z} = (-1 + 0.02\varepsilon)z + 18u,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0.02 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0.02 \end{pmatrix}, \quad D = d_1 + \varepsilon d_1 = \begin{pmatrix} -15 \\ -15 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} -0.2417 \\ -0.0583 \end{pmatrix}.$$

Системы для нахождения асимптотики точек переключения t_1 , t_2 и оптимального времени перехода t_3 выглядят так

$$t_{10} - \frac{1}{2}t_{20} = 0.07, \quad e^{0.02t_{10}} - \frac{1}{2}e^{0.02t_{20}} = 0.5, \quad t_{31} - t_{21} = 0.693,$$

$$t_{11} - t_{21} + \frac{1}{2}t_{31} = 0.001, \quad e^{0.02t_{10}} t_{11} - \frac{1}{2}e^{0.02t_{20}} t_{21} = -0.348,$$

откуда $t_{10} = 0.227$, $t_{20} = 0.322$, $t_{11} = 0.297$, $t_{21} = 1.284$, $t_{31} = 1.977$, а следовательно $t_1 = 0.228$, $t_2 = 0.323$, $t_3 = 0.324$. Решения системы представлены на рис. (1.1) – (1.3).

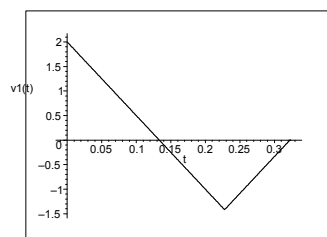


Рисунок 1.1

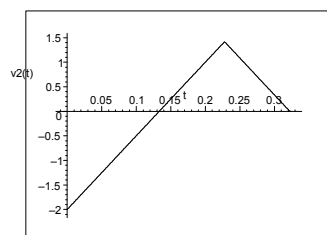


Рисунок 1.2

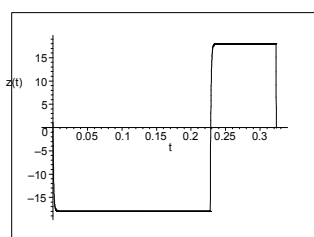


Рисунок 1.3

2. Оптимальное управление температурным полем

Интересной задачей, имеющей большое прикладное значение, является задача об оптимальном управлении нагревом тел. С этой задачей имеют дело во всех основных отраслях тяжелой индустрии, поэтому внедрение методов оптимизации тепловых процессов дает большой экономический эффект.

Рассмотрим задачу управления температурным полем в бесконечной однородной пластине фиксированной толщины $2s$ путем изменения температуры окружающей среды [1], [6]. Между поверхностью пластины и окружающей средой происходит теплообмен по закону Ньютона, т. е. количество тепла, передаваемое в единицу времени через единицу поверхности из окружающей среды к телу, прямо пропорционально разности температур между поверхностью тела и окружающей средой. Выберем начало координат в середине пластины, так как теплообмен между поверхностями и окружающей средой происходит одинаково (симметрическая задача).

Обозначим температуру окружающей среды через $\tilde{u}(\tau)$ ($0 \leq \tau \leq \tau_0$). Эта функция и будет нашим управляющим воздействием. Подчиним $\tilde{u}(\tau)$ следующему ограничению:

$$A_1 \leq \tilde{u}(\tau) \leq A_2, \quad (2.1)$$

где A_2, A_1 – соответственно максимально и минимально возможные температуры нагрева.

Распределение температуры по сечению тела в точке ξ в момент времени τ будем обозначать через $\theta = \theta(\xi, \tau)$. Далее будем считать, что в начальный момент времени температура в каждой точке пластины постоянна и равна

$$\theta_0(\xi, 0) = \theta_0 = \text{const.}$$

Распределение температур в теле, которое требуется получить в результате нагревания, считаем также равномерным по сечению тела и равным заданной температуре $\theta_3(\xi) = C$.

Процесс нагревания пластины будет описываться уравнением теплопроводности со следующими начальными и граничными условиями:

$$\frac{\partial \theta(\xi, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \theta(\xi, \tau)}{\partial \xi^2}, \quad (2.2)$$

$$\theta(\xi, 0) = \theta_0, \quad (2.3)$$

$$-\lambda \frac{\partial \theta(\xi, \tau)}{\partial \xi} + \alpha [\tilde{u}(\tau)] - \theta(\xi, \tau) = 0, \quad (\xi = \pm s, \tau > 0), \quad (2.4)$$

где $\tilde{u}(\tau)$ – произвольная кусочно-непрерывная функция времени, a – коэффициент температуропроводности, λ – коэффициент теплопроводности, α – коэффициент теплоотдачи. Коэффициенты a и λ связаны соотношением $a = \frac{\lambda}{c\rho}$, где ρ – плотность, c – теплоемкость. Температуры A_1, A_2, θ_0, C удовлетворяют следующим очевидным неравенствам: $A_2 > A_1, C > \theta_0$ (задача нагрева пластины). Кроме того, считаем выполненным следующее неравенство:

$$A_1 < C < A_2. \quad (2.5)$$

Перепишем задачу в безразмерном виде. Для этого в (2.2)–(2.4) произведем замену переменных, вводя следующие принятые в теплотехнике координаты:

$$t = \frac{a\tau}{s^2} \text{ – безразмерное время (критерий Фурье } F_0);$$

$$x = \frac{\xi}{s} \text{ – безразмерная толщина } (-1 \leq x \leq +1);$$

$$\varepsilon = \frac{\alpha s}{\lambda} \text{ – критерий Био};$$

$$Q_0 = \frac{2(C - \theta_0)}{A_2 - A_1} \text{ – критерий начального условия};$$

$$\chi = \frac{A_2 + A_1 - 2C}{A_2 - A_1} \text{ – критерий не симметрии нагрева (из (2.5) видно, что } \chi < 1).$$

Далее считаем, что $\chi = 0$. Новую безразмерную температуру обозначим

$$Q(x, t) = \frac{2(\theta(sx, \frac{s^2}{a}t))}{A_2 - A_1}.$$

Новое управление

$$u(t) = \frac{2[\tilde{u} - C]}{A_2 - A_1}.$$

Произведем сдвиг начала координат на оси температур в точку $\frac{2C}{A_2 - A_1}$. Следовательно, целью нагрева будет нулевое распределение температур в пластине $Q(x) = 0$. Сделав все упомянутые выше замены переменных, получим безразмерную задачу:

$$\varepsilon \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}, |x| \leq 1,$$

$$\pm \frac{\partial Q}{\partial x} = \varepsilon[u(t) - Q(x, t)], \quad x = \pm 1,$$

$$Q(x, 0) = Q_0.$$

Как и в [6], представим $Q(x, t)$ в виде ряда

$$Q = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t) X_n(x).$$

Здесь $X_n(x) = c_n \cos \mu_n x$, где μ_n – корни уравнения

$$\mu_n \sin \mu_n = \varepsilon \cos \mu_n,$$

а c_n – нормирующие коэффициенты

$$(-1)^n \left(1 + \frac{\sin \mu_n \cos \mu_n}{\mu_n} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Имеют место асимптотические разложения

$$\mu_0 = \sqrt{\varepsilon} \left(1 - \frac{\varepsilon}{6} \right) + \varepsilon^2 + \dots, \quad \mu_n = \pi n + \frac{\varepsilon}{\pi n} + \varepsilon^2 + \dots, \quad n \geq 1,$$

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{\varepsilon}{6} \right) + \varepsilon^2 + \dots, \quad c_n = (-1)^n \left(1 - \frac{\varepsilon}{2(\pi n)^2} \right) + \varepsilon^2 + \dots, \quad n \geq 1.$$

Для y_n , применяя двукратное интегрирование по частям и используя граничное условие, получаем счетную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varepsilon y_n' = -\mu_n^2 y_n + (2\varepsilon c_n \cos \mu_n) u, \quad n = 0, 1, \dots$$

Используя асимптотическое представление для μ_0 , представим эту систему в следующем виде:

$$\dot{y}_0 = A_1 y_0 + B_1 u, \quad \varepsilon \dot{y} = A_4 y + B_2 u, \tag{2.6}$$

$$A_1 = -\varepsilon^{-1} \mu_0^2, \quad A_4 = \text{diag}(-\mu_n^2), n \geq 1, \quad B_1 = 2c_0 \cos \mu_0, \quad B_2 = \varepsilon \text{colon}(2c_n \cos \mu_n), n \geq 1.$$

Нетрудно убедиться, что справедливы представления:

$$A_{10} = -1, \quad A_{11} = \frac{1}{3}, \quad B_{10} = \sqrt{2}, \quad B_{11} = \frac{\sqrt{2}}{6}, \quad B_{20} = (0, 0, \dots, 0, \dots)^T, \quad B_{21} = (2, 2, \dots, 2, \dots)^T.$$

$$A_{40} = \begin{pmatrix} -\pi^2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -4\pi^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -9\pi^2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -n^2\pi^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad A_{41} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

Оптимальное управление u имеет вид кусочно-постоянной функции, принимающей поочередно лишь два значения -1 и +1. Особенность оптимального управления этой

задачи состоит в том, что число интервалов знакопостоянства функции u бесконечно, хотя общее время оптимального процесса есть определенная конечная величина T . То есть оптимальное управление на конечном отрезке времени $[0, T]$ имеет счетное число точек переключения, причем точки переключения довольно быстро накапливаются лишь к концу отрезка $[0, T]$, т. е. к точке $t = T$. Основное время переходного процесса занимают лишь первые два-три интервала знакопостоянства (что составляют более 99% всего времени). Это явление объясняется более быстрым убыванием функции $e^{-\mu_n^2 t/\varepsilon}$ во времени при возрастании n и при $\varepsilon \rightarrow 0$ по сравнению с первыми двумя-тремя функциями $e^{-\mu_1^2 t/\varepsilon}, e^{-\mu_2^2 t/\varepsilon}, e^{-\mu_3^2 t/\varepsilon}$, что используется для приближенного определения оптимального управления u , дающего высокую точность приближения истинного распределения температуры в теле к заданному равномерному распределению в конце переходного процесса. Этот переход тем более разумен из-за того, что технически реализовать систему управления с бесконечным числом переключений невозможно из-за наличия множества неучтенных промежуточных звеньев с малыми параметрами (по отношению к основному объекту – телу нагрева).

Таким образом, для нахождения асимптотики точек переключения оптимального управления можно воспользоваться способом, описанным в [2],[3]. Для данной задачи быстродействия точки переключения имеют следующий вид [5]:

$$t_1 = t_{10} + \varepsilon t_{11} + \dots, \quad t_j = t_{10} + \varepsilon t_{j1} + \dots, \quad j = 2, 3, \dots$$

Рассмотрим случаи, когда имеются 1 медленная и 2 быстрые переменные; 1 медленная и 4 быстрые переменные.

Пример 2.1. Пусть $\varepsilon = 0.1$, начальная точка $(\sqrt{2}/2, 0, 0)$ и

$$\begin{aligned} \dot{y}_0 &= (-1 + \varepsilon/3)y_0 + (\sqrt{2} + \varepsilon\sqrt{2}/6)u \\ \varepsilon \dot{y}_1 &= (-\pi^2 + 2\varepsilon)y_1 + 2\varepsilon u, \\ \varepsilon \dot{y}_2 &= (-4\pi^2 + 2\varepsilon)y_2 + 2\varepsilon u \end{aligned}$$

В данном случае две точки переключения $t_1 = 0.41, t_2 = 0.418$ и оптимальное время перехода $t_3 = 0.42$. Решения (на последнем временном интервале) изображены на рисунках (2.1) – (2.3).

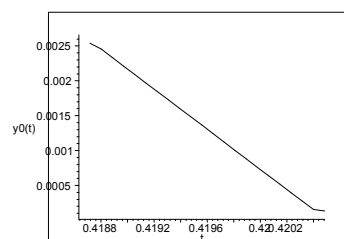


Рисунок 2.1

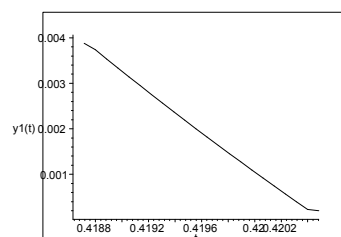
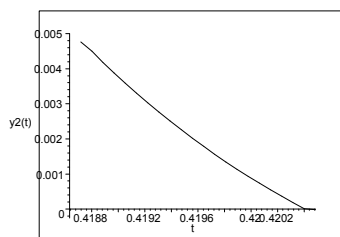


Рисунок 2.2



Р и с у н о к 2.3

Пример 2.2 Пусть $\varepsilon = 0.1$, начальная точка $(\sqrt{2}/2, 0, 0, 0, 0)$ и

$$y_0 = (-1 + \varepsilon/3)y_0 + (\sqrt{2} + \varepsilon\sqrt{2}/6)u$$

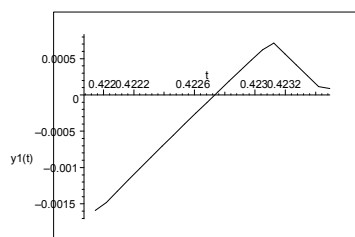
$$\varepsilon y_1 = (-\pi^2 + 2\varepsilon)y_1 + 2\varepsilon u,$$

$$\varepsilon y_2 = (-4\pi^2 + 2\varepsilon)y_2 + 2\varepsilon u,$$

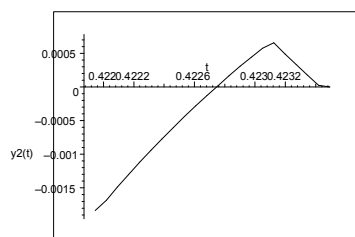
$$\varepsilon y_3 = (-9\pi^2 + 2\varepsilon)y_3 + 2\varepsilon u,$$

$$\varepsilon y_4 = (-16\pi^2 + 2\varepsilon)y_4 + 2\varepsilon u.$$

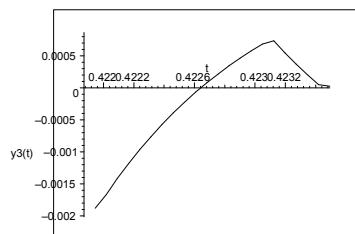
В данном случае две точки переключения $t_1 = 0.409, t_2 = 0.419, t_3 = 0.422, t_4 = 0.4231$ и оптимальное время перехода $t_5 = 0.4234$. Решения системы (на последнем интервале времени) изображены на рисунке (2.4) – (2.7).



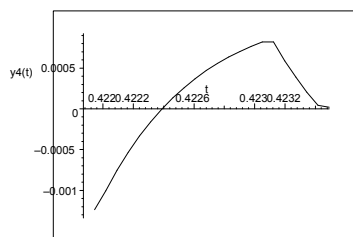
Р и с у н о к 2.4



Р и с у н о к 2.5



Р и с у н о к 2.6



Р и с у н о к 2.7

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 10-08-00154А.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бутковский А. Г. Управление нагревом металла / А. Г. Бутковский, С. А. Малый, Ю. Н. Андреев; М.: Металлургия. – 1981.
2. Видилина О. В. Понижение порядка задачи оптимального быстродействия с сингулярными возмущениями / О. В. Видилина // Известия РАН серия МММИУ. – 1999. – Т.3, № 2. – С. 117-127.
3. Видилина О. В. Декомпозиция задач оптимального быстродействия с сингулярными возмущениями / О. В. Видилина // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2004. – № 8. – С. 16-23.
4. Воропаева Н. В. Декомпозиция многотемповых систем / Н. В. Воропаева, В. А. Соболев; Самара: СМС. – 2000.
5. Калинин А. И. Асимптотические методы оптимизации возмущенных динамических систем / А. И. Калинин; Мн.: "Экоперспектива". – 2000.
6. Фельдбаум А. А. Методы теории автоматического управления / А. А. Фельдбаум, А. Г. Бутковский; М.: Наука. – 1974.
7. Brown C. J. Time-optimal Control of a Moving-Coil Linear Actuator / C. J. Brown, J. T. Mo // IBM J. Re S. Develop. – 1968. p. 372 – 379.

Two optimal-time control problems.

© O. V. Vidilina²

Abstract. In the paper two control problems are studied: the optimal-time control problem for electromagnetic actuator and the optimal control of temperature field.

Key Words: optimal-time control, asymptotic of switching points, electromagnetic actuator, thermal field.

²Assistant professor of the department of differential equations and control theory, Samara State University, Samara, vidilina_olga@mail.ru.