УДК 517.9

Аналитическое решение задачи о течении Пуазейля

© В. Н. Попов, [1] И. В. Тестова, [2] А. А. Юшканов [3]

Аннотация. В рамках кинетического подхода в изотермическом приближении построено аналитическое (в виде ряда Неймана) решение задачи о течении разреженного газа в плоском канале с бесконечными стенками, обусловленного градиентом давления, параллельного стенкам канала (течении Пуазейля). В качестве основного уравнения используется БГК-модель кинетического уравнения Больцмана, а в качестве граничного условия – модель диффузного отражения. С учетом построенной функции распределения вычислен поток массы в направлении градиента давления, приходящийся на единицу ширины канала, и построен профиль массовой скорости газа в канале. Проведено сравнение с аналогичными результатами, полученными численными методами.

Ключевые слова: течение газа в канале, течение Пуазейля, кинетическое уравнение Больцмана, модельные кинетические уравнения, точные аналитические решения.

1. Введение

Выбор математического аппарата, используемого для моделирования течений газа в канале, существенным образом зависит от соотношения его характерного размера D' и средней длины свободного пробега молекул газа l_g. При $D' >> l_g$ можно использовать гидродинамический подход, основанный на решении с заданными на стенках канала макроскопическими граничными условиями системы уравнений Навье-Стокса. В противном случае нужно использовать кинетический подход, основанный на решении кинетического уравнения Больцмана с микроскопическими граничными условиями, которым должна удовлетворять на стенках канала функция распределения молекул газа по координатам и скоростям [1]. Учитывая, что точные решения кинетического уравнения Больцмана в силу нелинейности стоящего в его правой части пятикратного интеграла столкновений в общем случае получить не представляется возможным, при решении многих задач используется не само уравнение Больцмана, а его модели, которые получаются путем замены интеграла столкновений Больцмана более простыми с математической точки зрения выражениями, наследующими, тем не менее, основные свойства истинного интеграла столкновений. Одной из таких моделей является БГК (Бхатнагар, Гросс, Крук) модель, которая для стационарного случая в декартовой системе координат записывается в виде [2]

$$\mathbf{v}\,\nabla f = \frac{p}{\eta_g}(f_{eq} - f).$$

Здесь $f(\mathbf{r}', \mathbf{v})$ – функция распределения молекул газа по координатам и скоростям, $f_{eq}(\mathbf{r}', \mathbf{v})$ – локально-равновесный максвеллиан, p и η_g – давление и коэффициент динамической вязкости газа, $\mathbf{v}$ – скорости поступательного движения молекул газа, $\mathbf{r}'$ – размерный радиус-вектор. В представленной работе данная модель используется для

[1]Заведующий кафедрой математики, Северный (Арктический) федеральный университет, г. Архангельск; popov.vasily@pomorsu.ru.

[2]Старший преподаватель кафедры информатики, Поморский государственный университет имени М. В. Ломоносова, г. Архангельск; testovairina@mail.ru.

[3]Профессор кафедры теоретической физики, Московский государственный областной университет, г. Москва; yushkanov@inbox.ru.

решения задачи о течении разреженного газа в плоском канале при наличии касательного к его стенкам градиента давления (течения Пуазейля).

Данная задача неоднократно рассматривалась ранее разными авторами с использованием численных методов, обзор которых представлен в [3]. Аналитические решения представлены в [4], [5], авторы которых на основе БГК и ЭС моделей уравнения Больцмана для почти зеркальных граничных условий на стенках канала получили выражения, описывающие профиль массовой скорости газа и потоки тепла и массы вдоль его оси.

Целью представленной работы является построение аналитического решения БГК модели кинетического уравнения Больцмана в задаче о течении Пуазейля с использованием модели диффузного отражения молекул газа стенками канала. Следует отметить, что данная модель граничного условия является более реалистичной по сравнению с использованной в [4] особенно для не обработанных специальным образом технических поверхностей. В то же время следует отметить, что использование данной модели граничного условия влечет за собой ряд дополнительных математических сложностей, которых удалось избежать в [4]. В частности, это относится к возникшей необходимости решения задачи факторизации коэффициента краевой задачи, к которой сводится с использованием методов теории функции комплексного переменного сингулярное интегральное уравнение, получаемое после подстановки граничных условий в общее решение исходного уравнения, а также необходимость решения интегрального уравнения для нахождения коэффициентов в разложении решения задачи по собственным векторам непрерывного спектра. Для решения упомянутых выше проблем использовались методы, разработанные в [6].

2. Постановка задачи. Построение функции распределения молекул газа

Рассмотрим течение разреженного газа в плоском канале, толщиной D', стенки которого расположены в плоскостях $x' = \pm d'$ прямоугольной декартовой системы координат ($d' = D'/2$). Предположим, что течение газа обусловлено наличием постоянного градиента давления. Направим ось Oz' вдоль градиента давления. Будем считать, что относительный перепад давления на длине свободного пробега молекул газа малым. Тогда рассматриваемая задача допускает линеаризацию. Учитывая, что в задачах скольжения функция распределения пропорциональна касательной к обтекаемой поверхности компоненте массовой скорости газа, функцию распределения молекул газа по координатам и скоростям можно представить в виде

$$f(\mathbf{r}', \mathbf{v}) = n(z)\beta^{3/2}\pi^{-3/2}\, \exp(-C^2)\, \left[1 + C_z G_n\, Z(x, C_x)\right]. \tag{2.1}$$

Здесь $\mathbf{r}'$ – размерный радиус-вектор; $\mathbf{C} = \sqrt{\beta}\,\mathbf{v}$ – безразмерная скорость молекул газа; $\beta = m/2k_BT$; m – масса молекулы газа; k_B – постоянная Больцмана; T – температура газа; $G_n = (1/p)dp/dz$ – безразмерный градиент давления в направлении оси Oz'; p – давление газа; $Z(x, C_x)$ – линейная поправка к локально-равновесной функции распределения; $x = x'/l_g$ и $z = z'/l_g$ – безразмерные координаты; $l_g = \eta_g\,\beta^{-1/2}/p$.

Запишем в выбранной системе координат БГК модель кинетического уравнения Больцмана

$$v_x \frac{\partial f}{\partial x'} + v_z \frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{p}{\eta_g}(f_{eq} - f). \tag{2.2}$$

Подставляя (2.1) в (2.2) и линеаризуя $f_{eq}(\mathbf{r}', \mathbf{v})$ относительно абсолютного максвеллиана, приходим к уравнению для нахождения $Z(x,\mu)$ ($\mu = C_x$)

$$\mu\frac{\partial Z}{\partial x} + Z(x,\mu) + 1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-\tau^2)\, Z(x,\tau)\, d\tau. \tag{2.3}$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что

$$Z_1(x,\mu) = x^2 - 2x\mu + 2\mu^2$$

есть частное решение (2.3). Общее решение (2.3) приведено в [2]

$$Z_0(x,\mu) = A_0 + A_1(x-\mu) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{x}{\eta})\, F(\eta,\mu) a(\eta)\, d\eta,$$

$$F(\eta,\mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\eta\,\mathrm{P}\frac{1}{\eta-\mu} + \exp(\eta^2)\lambda(\eta)\,\delta(\eta-\mu), \tag{2.4}$$

$$\lambda(z) = 1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, z \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\mu^2)}{\mu - z}\, d\mu, \tag{2.5}$$

$\mathrm{P}\,(1/z)$ – распределение в смысле главного значения при вычислении интеграла от $1/z$, $\delta(z)$ – дельта-функция Дирака. Таким образом, общее решение (2.3) построено и имеет вид

$$Z(x,\mu) = x^2 - 2x\mu + 2\mu^2 + A_0 + A_1(x-\mu) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{x}{\eta})\, F(\eta,\mu) a(\eta)\, d\eta, \tag{2.6}$$

где A_0, A_1 и $a(\eta)$ – неизвестные параметры и функция, подлежащие дальнейшему определению.

Рассмотрим теперь вопрос о граничных условиях, которым должно удовлетворять решение (2.6) на стенках канала. С учетом используемой модели диффузного отражения записываем граничное условие на верхней стенке, расположенной в плоскости $x = d$

$$Z(d,\mu) = 0, \qquad \mu < 0. \tag{2.7}$$

На нижней стенке при $x = -d$

$$Z(-d,\mu) = 0, \qquad \mu > 0. \tag{2.8}$$

Подставляя (2.6) в (2.7) и (2.8), приходим к интегральным уравнениям

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta\, b(\eta,d)}{\eta-\mu}\, d\eta + \exp(\mu^2) b(\mu,d)\lambda(\mu) =$$
$$= -d^2 - 2\mu^2 - A_0 - A_1 d + (A_1 + 2d)\mu, \qquad \mu < 0, \tag{2.9}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta\, b(\eta,-d)}{\eta-\mu}\, d\eta + \exp(\mu^2) b(\mu,-d)\lambda(\mu) =$$
$$= -d^2 - 2\mu^2 - A_0 + A_1 d + (A_1 - 2d)\mu, \qquad \mu > 0, \tag{2.10}$$

$$b(\eta, x) = \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) a(\eta). \tag{2.11}$$

Заменим в (2.9) μ на $-\mu$ и представим входящий в него интеграл в виде суммы двух. С учетом сказанного перепишем (2.9)

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\eta\, b(\eta, d)}{\eta+\mu}\, d\eta + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\eta\, b(\eta, d)}{\eta+\mu}\, d\eta + \exp(\mu^2) b(-\mu, d)\lambda(-\mu) =$$
$$= -d^2 - 2\mu^2 - A_0 - A_1 d - (A_1 + 2d)\mu, \qquad \mu > 0. \tag{2.12}$$

Первый интеграл в (2.12) является сингулярным, а второй – регулярным. Заменим в первом интеграле переменную интегрирования η на $-\eta$. Тогда (2.9) примет вид

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\eta\, b(-\eta, d)}{\eta-\mu}\, d\eta + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\eta\, b(\eta, d)}{\eta+\mu}\, d\eta + \exp(\mu^2) b(-\mu, d)\lambda(\mu) =$$
$$= -d^2 - 2\mu^2 - A_0 - A_1 d - (A_1 + 2d)\mu, \qquad \mu > 0. \tag{2.13}$$

При записи (2.13) учли, что на действительной оси $\lambda(\mu)$ является четной функцией. Аналогичным образом преобразуем интеграл в (2.10)

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\eta\, b(-\eta, -d)}{\eta+\mu}\, d\eta + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\eta\, b(\eta, -d)}{\eta-\mu}\, d\eta + \exp(\mu^2) b(\mu, -d)\lambda(\mu) =$$
$$= -d^2 - 2\mu^2 - A_0 + A_1 d + (A_1 - 2d)\mu, \qquad \mu > 0. \tag{2.14}$$

Складывая, далее, (2.13) и (2.14) и принимая во внимание (2.11), приходим к уравнению

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\eta\, [a(\eta) + a(-\eta)]\, \exp(d/\eta)\, d\eta}{\eta-\mu} + \exp(\mu^2)[a(\eta) + a(-\eta)]\, \exp(d/\eta)\lambda(\mu) +$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\eta\, [a(\eta) + a(-\eta)]\, \exp(-d/\eta)\, d\eta}{\eta+\mu} =$$
$$= -2[d^2 + 2\mu^2 + A_0 + 2d\mu], \qquad \mu > 0. \tag{2.15}$$

Аналогично, вычитая (2.13) из (2.14), получаем

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\eta[a(\eta) - a(-\eta)]\, \exp(d/\eta)\, d\eta}{\eta-\mu} + \exp(\mu^2)[a(\eta) - a(-\eta)]\, \exp(d/\eta)\lambda(\mu) +$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\eta\, [a(\eta) - a(-\eta)]\, \exp(-d/\eta)\, d\eta}{\eta+\mu} =$$
$$= 2A_1[d + \mu], \qquad \mu > 0. \tag{2.16}$$

Нетрудно видеть, что (2.16) обращается в тождество при выполнении условий

$$a(\eta) = a(-\eta), \qquad A_1 = 0. \tag{2.17}$$

При этом (2.15) можно переписать в виде

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\eta\, b(\eta,-d)}{\eta-\mu}\, d\eta + \exp(\mu^2) b(\mu,-d)\lambda(\mu) = f(\mu), \qquad \mu > 0, \tag{2.18}$$

$$f(\mu) = -d^2 - 2\mu^2 - A_0 - 2d\mu - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\eta\, b(\eta,d)}{\eta+\mu}\, d\eta. \tag{2.19}$$

Решение (2.18) ищем с использованием методов краевых задач теории функций комплексного переменного. С этой целью введем вспомогательную функцию, заданную интегралом типа Коши

$$N(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\eta\, b(\eta,-d)}{\eta-z}\, d\eta, \tag{2.20}$$

для которой

$$N^+(\mu) - N^-(\mu) = 2\sqrt{\pi} i\mu b(\mu,-d), \qquad 0 < \mu < +\infty, \tag{2.21}$$

$$N^+(\mu) + N^-(\mu) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\eta\, b(\eta,-d)}{\eta-\mu}\, d\eta, \tag{2.22}$$

Здесь $N^+(\mu)$ и $N^-(\mu)$ – краевые значения функции $N(z)$ на верхнем и нижнем берегах разреза, совпадающего с действительной положительной полупрямой. Аналогичные соотношения для $\lambda(z)$, определяемой равенством (2.5), имеют вид

$$\lambda^+(\mu) - \lambda^-(\mu) = 2\sqrt{\pi} i\mu \exp(-\mu^2), \qquad -\infty < \mu < +\infty, \tag{2.23}$$

$$\lambda^+(\mu) + \lambda^-(\mu) = 2\lambda(\mu). \tag{2.24}$$

Здесь разрез совпадает со всей действительной числовой прямой. С учетом (2.21)-(2.24) сведем интегральное уравнение (2.18) к краевой задаче Римана

$$N^+(\mu)\, \lambda^+(\mu) - N^-(\mu)\, \lambda^-(\mu) = 2\sqrt{\pi} i\mu f(\mu) \exp(-\mu^2), \qquad \mu > 0, \tag{2.25}$$

Особенность краевой задачи (2.25) состоит в том, что функции $N(z)$ и $\lambda(z)$ имеют различные разрезы. Чтобы устранить эту особенность воспользуемся решением однородной краевой задачи

$$\frac{X^+(\mu)}{X^-(\mu)} = \frac{\lambda^+(\mu)}{\lambda^-(\mu)}, \qquad \mu > 0, \tag{2.26}$$

которое имеет вид [4]

$$X(z) = \frac{1}{z} \exp\left[\frac{1}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\theta(\tau)-\pi}{\tau-z}\right], \tag{2.27}$$

$$\theta(\tau) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\lambda(\tau)}{\sqrt{\pi}\tau \exp(-\tau^2)}.$$

С учетом решения однородной краевой задачи (2.26) перепишем (2.25)

$$N^+(\mu)\, X^+(\mu) - N^-(\mu)\, X^-(\mu) = \frac{X^-(\mu)}{\lambda^-(\mu)} 2\sqrt{\pi} i\mu f(\mu) \exp(-\mu^2), \qquad \mu > 0. \tag{2.28}$$

Линии скачков функций $N(z)$ и $X(z)$ совпадают с контуром краевого условия. Следовательно, получили краевую задачу определения аналитической функции по заданному скачку. Учитывая поведение входящих в (2.28) функций, по формулам Сохоцкого получаем ее общее решение

$$N(z)=\frac{1}{X(z)}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)}\,\eta f(\eta)\,\exp(-\eta^2)\,\frac{d\eta}{\eta-z}. \tag{2.29}$$

Учитывая, что в окрестности бесконечно удаленной точки

$$\frac{1}{X(z)}=z+Q_1+O\left(\frac{1}{z}\right),$$

находим

$$N(z)=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)}\,\eta f(\eta)\,\exp(-\eta^2)\,d\eta+O\left(\frac{1}{z}\right),\qquad |z|\to+\infty.$$

Так как функция $N(z)$ согласно (2.20) задана интегралом типа Коши то в окрестности бесконечно удаленной точки $N(z)=O(1/z)$. Отсюда приходим к условию разрешимости краевой задачи (2.28)

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)}\,\eta f(\eta)\,\exp(-\eta^2)\,d\eta=0. \tag{2.30}$$

С учетом (2.11), (2.19) перепишем (2.30) в виде

$$d^2-2Q_2+A_0-2dQ_1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)}\,\eta\,\exp(-\eta^2)\,d\eta\,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\tau\, b(\tau,d)}{\tau+\eta}\,d\tau=0. \tag{2.31}$$

Здесь Q_n – интегралы Лойалки [7]

$$Q_n=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)}\,\eta^{n+1}\,\exp(-\eta^2)\,d\eta, \tag{2.32}$$

в частности, $Q_0=-1$, $Q_1=-1.01619$, $Q_2=-1.26632$. Изменяя в последнем интеграле (2.31) порядок интегрирования и учитывая (2.11) и интегральное представление функции $X(-\tau)$

$$X(-\tau)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)}\,\frac{\eta\,\exp(-\eta^2)\,d\eta}{\eta+\tau},$$

из (2.31) находим

$$A_0=-d^2+2Q_2+2dQ_1+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\tau\,X(-\tau)\,a(\tau)\,\exp(-\frac{d}{\tau})\,d\tau. \tag{2.33}$$

Коэффициенты $a(\eta)$ в разложении (2.6) решения рассматриваемой задачи по собственным векторам непрерывного спектра найдем из условия (2.21), предварительно преобразовав (2.29). Учитывая, что

$$X(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)} \frac{\eta \exp(-\eta^2)\, d\eta}{\eta - z},$$

перепишем (2.29) в виде

$$N(z) = -d^2 - A_0 - 2zd - 2z^2 + \frac{1}{X(z)} \Bigg[2(z + d - Q_1) - \\ - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)} \frac{\eta \exp(-\eta^2)\, d\eta}{\eta - z} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\tau\, b(\tau, d)}{\tau + \eta}\, d\tau \Bigg]. \quad (2.34)$$

Для вычисления интеграла от последнего слагаемого в (2.34) заметим, что

$$\frac{1}{\eta - z} \frac{1}{\tau + \eta} = \frac{1}{\eta - z} \frac{1}{\tau + z} - \frac{1}{\tau + z} \frac{1}{\tau + \eta}.$$

Тогда

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)} \frac{\eta \exp(-\eta^2)\, d\eta}{\eta - z} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\tau\, b(\tau, d)}{\tau + \eta}\, d\tau = \\ = X(z) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\tau\, b(\tau, d)}{\tau + z}\, d\tau - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\tau\, X(-\tau)\, b(\tau, d)}{\tau + z}\, d\tau.$$

Таким образом,

$$N^+(\mu) - N^-(\mu) = \frac{2\sqrt{\pi}\, i\, \mu \exp(-\mu^2) X(-\mu)}{|\lambda^+(\mu)|^2} \Bigg[Q_1 - \mu - d - \\ - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\tau\, X(-\tau) b(\tau, d)}{\tau + \mu}\, d\tau \Bigg], \qquad \mu > 0.$$

Отсюда, принимая во внимание (2.11) и (2.21), находим

$$a(\mu) = \frac{\exp(-\mu^2) X(-\mu)}{|\lambda^+(\mu)|^2} \Bigg[Q_1 - \mu - d - \\ - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\tau\, X(-\tau) a(\tau)}{\tau + \mu} \exp(-\frac{d}{\eta})\, d\tau \Bigg] \exp(-\frac{d}{\mu}), \qquad \mu > 0. \quad (2.35)$$

Решение (2.35) ищем в виде ряда по степеням λ

$$a(\mu) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k a_k(\mu), \qquad \lambda = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}. \quad (2.36)$$

Подставляя (2.36) в (2.35) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, находим

$$a_0(\tau) = h(\tau)[Q_1 - \tau - D/2], \qquad \tau > 0, \tag{2.37}$$

$$a_1(\tau) = h(\tau) \int\limits_0^{+\infty} \frac{g(\eta)\,[Q_1 - \eta - D/2]\,d\eta}{\eta + \tau}, \qquad \tau > 0, \tag{2.38}$$

$$a_2(\tau) = h(\tau) \int\limits_0^{+\infty} \frac{g(\eta)\,d\eta}{\eta + \tau} \int\limits_0^{+\infty} \frac{g(\mu)\,[Q_1 - \mu - D/2]\,d\mu}{\mu + \eta}, \qquad \tau > 0, \tag{2.39}$$

$$h(\tau) = \frac{X(-\tau)}{|\lambda^+(\tau)|^2} \exp(-\tau^2 - \frac{D}{2\tau}), \qquad g(\tau) = \frac{\tau X^2(-\tau)}{|\lambda^+(\tau)|^2} \exp(-\tau^2 - \frac{D}{\tau}). \tag{2.40}$$

Подставляя (2.36)-(2.39) в (2.33), находим

$$A_0 = -\frac{D^2}{4} + 2Q_2 + DQ_1 + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k I_k, \tag{2.41}$$

$$I_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} g(\tau)[Q_1 - \tau - D/2]\,d\tau,$$

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} g(\tau)\,d\tau \int\limits_0^{+\infty} \frac{g(\eta)\,[Q_1 - \eta - D/2]\,d\eta}{\eta + \tau},$$

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} g(\tau)\,d\tau \int\limits_0^{+\infty} \frac{g(\eta)\,d\eta}{\eta + \tau} \int\limits_0^{+\infty} \frac{g(\mu)\,[Q_1 - \mu - D/2]\,d\mu}{\mu + \eta}.$$

Таким образом, неизвестные параметры A_0, A_1 и функция $a(\eta)$, входящие в (2.6) найдены и функция распределения молекул газа по координатам и скоростям построена.

3. Вычисление макропараметров газа в канале

С учетом построенной функции распределения вычислим скорость газа в канале $q'_z(x')$ и величину потока массы J'_M в направлении оси Oz', приходящуюся на единицу ширины канала. Исходя из статистического смысла функции распределения и учитывая (2.1), находим

$$q'_z(x') = \frac{1}{n} \int v_z f(\mathbf{r}', \mathbf{v})\,d^3\mathbf{v} =$$
$$= \pi^{-3/2} \left(\frac{2k_BT}{m}\right)^{1/2} \int \exp(-C^2)\,C_z\,[1 + C_z G_n\,Z(x, C_x)]\,d^3\mathbf{C} = \left(\frac{2k_BT}{m}\right)^{1/2} q_z(x)\,\frac{1}{p}\,\frac{dp}{dz}.$$

Здесь

$$q_z(x) = \pi^{-3/2} \int \exp(-C^2)\,C_z^2 Z(x, C_x)\,d^3\mathbf{C} \tag{3.1}$$

есть безразмерная массовая скорость газа. Подставляя (2.6) в (3.1), после интегрирования получаем

$$q_z(x) = \frac{1}{2}\left[x^2 - \frac{D^2}{4} + DQ_1 + 2Q_2 + 1 + \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k[I_k + J_k(x)]\right], \qquad (3.2)$$

$$J_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\gamma(x,\tau)[Q_1 - \tau - D/2]\,d\tau,$$

$$J_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\gamma(x,\tau)\,d\tau\int\limits_0^{+\infty}\frac{g(\eta)\,[Q_1 - \eta - D/2]\,d\eta}{\eta+\tau},$$

$$J_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\gamma(x,\tau)\,d\tau\int\limits_0^{+\infty}\frac{g(\eta)\,d\eta}{\eta+\tau}\int\limits_0^{+\infty}\frac{g(\mu)\,[Q_1 - \mu - D/2]\,d\mu}{\mu+\eta},$$

$$\gamma(x,\tau) = \frac{X(-\tau)}{|\lambda^+(\tau)|^2}\exp(-\tau^2)\,[\exp(\frac{x - D/2}{\tau}) + \exp(-\frac{x + D/2}{\tau})].$$

Величину потока массы J'_M в направлении оси Oz', приходящуюся на единицу ширины канала, вычислим согласно [8]

$$J_M = -\frac{2}{D^2}\int\limits_{-D/2}^{D/2} q(x)\,dx. \qquad (3.3)$$

Подставляя (3.2) в (3.3) и выполняя интегрирование, получаем

$$J_M = \frac{D}{6} - Q_1 - \frac{1}{D}\left[2Q_2 + 1 + \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k I_k\right] - \frac{2}{D^2}\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k K_k, \qquad (3.4)$$

$$K_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\zeta(\tau)[Q_1 - \tau - D/2]\,d\tau,$$

$$K_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\zeta(\tau)\,d\tau\int\limits_0^{+\infty}\frac{g(\eta)\,[Q_1 - \eta - D/2]\,d\eta}{\eta+\tau},$$

$$K_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\zeta(\tau)\,d\tau\int\limits_0^{+\infty}\frac{g(\eta)\,d\eta}{\eta+\tau}\int\limits_0^{+\infty}\frac{g(\mu)\,[Q_1 - \mu - D/2]\,d\mu}{\mu+\eta},$$

$$\zeta(\tau) = \frac{\tau X(-\tau)}{|\lambda^+(\tau)|^2}\exp(-\tau^2)\,[1 - \exp(-\frac{D}{\tau})].$$

Как показывают проведенные расчеты, значения J_M, полученные на основе (3.3), отличаются от аналогичных значений, полученных в [9] численными методами в рамках БГК модели кинетического уравнения Больцмана, не превышает 0.08% для всего диапазона значений D.

4. Заключение

Итак, в работе на примере задачи о течении Пуазейля представлен аналитический метод решения краевой задачи для неоднородного интегродифференциального уравнения для случая пространственно ограниченных областей. Общее решение исходного неоднородного интегродифференциального уравнения найдено в пространстве обобщенных функций. Подстановка граничных условий в общее решение приводит к системе двух связанных сингулярных интегральных уравнений с ядром типа Коши, которые после преобразования сводятся к краевой задаче Римана на действительной положительной полуоси. Коэффициенты в разложении решения задачи по собственным векторам дискретного спектра находятся из условия резрешимости построенной краевой задачи. Использование формул Сохоцкого-Племеля для нахождения коэффициентов в разложении решения задачи по собственным векторам непрерывного спектра приводит к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, решение которого ищется в виде степенного ряда. С использованием построенного решения вычислен расход газа, приходящийся на единицу ширины канала, и построен профиль массовой скорости газа.

Полученные в работе результаты могут быть использованы для решения широкого круга задач динамики разреженного газа и физики плазмы.

Список литературы

1. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. – М.: Наука, 1979. – 528 с.

2. Черчиньяни К. Математические методы в кинетической теории газов. – М.: Мир, 1973. – 245 с.

3. Шарипов Ф.М., Селезнев В.Д. Движение разреженных газов в каналах и микроканалах. Екатеринбург. УрО РАН. 2008. 230 с.

4. Латышев А.В., Юшканов А.А. Аналитические решения граничных задач для кинетических уравнений. – М.: МГОУ. 2004. – 286 с.

5. Латышев А.В., Юшканов А.А. Задача Пуазейля для эллипсоидально-статистического уравнения и почти зеркальных граничных условий. // Журнал технической физики. – 1998. – Т. 68. – №11. – С. 27 - 31.

6. Латышев А.В., Попов В.Н., Юшканов А.А. Неоднородные кинетические задачи. Метод сингулярных интегральных уравнений: Монография. – Архангельск: Поморский университет. 2004. – 266 с.

7. Loyalka S.K. The Q_n and F_n integrals for the BGK model // Transport theory and statistical physics. – 1975. – V. 4. – P. 55-65.

8. Loyalka S.K., Hickey K.A. Plane Poiseulle flow near continuum regimes for a rigid spheres // Physica A. – 1989. V. 160. – № 3. – P. 395-408.

9. C.E. Sievert, R.D.M. Garcia and P. Granjean. A Concise and Accurate Solutions for Poiseuille Flow in a Plane Channel // Journal of Mathematical Physics. – 1980. – V. 21. – P. 2760-2763.

Analytic solution of the Poiseuille Flow problem

© V. N. Popov, [4] I. V. Testova, [5] A. A. Yushkanov [6]

Abstract. Within the kinetic approach limit, in the isothermal approximation the analytical (in the form of Neumann's series) solution of the problem on flow of the rarefied gas in the flat channel with the infinite walls, caused by a pressure gradient parallel to walls (Poiseuille Flow) it is constructed. As the basic equation the BGK model of the Boltzmann's kinetic equation is used. As a boundary condition the model of diffusion reflections is used. In view of the constructed distribution function the flow of gases mass in a direction of a gradient of the pressure, falling unit width of the channel and the structure of mass speed of gas in the channel are constructed. Comparison with the similar results received Numerical method is leads.

Key Words: flow of the gas in the channel, Poiseuille Flow, Boltzmann's kinetic equation, the model kinetic equations, exact analytical solutions.

[4]Head of Mathematics Chair, Northern Arctic federal university, Arkhangelsk; popov.vasily@pomorsu.ru.

[5]The senior teacher of computer science Chair, Pomor state university after M.V. Lomonosov, Arkhangelsk; testovairina@mail.ru.

[6]Professor of Theoretical Rhysics Chair, Moscow state regional university, Moscow; yushkanov@inbox.ru.