УДК 519.622

Исследование устойчивости метода вариационных сплайнов

© Ю. В. Мартыненко[1]

Аннотация. Строится функция устойчивости метода вариационных сплайнов и исследуются ее свойства.

Ключевые слова: дифференциально-алгебраические уравнения, метод вариационных сплайнов, устойчивость.

1. Введение

Метод вариационных сплайнов (ВС) разработан для решения задачи Коши для дифференциально-алгебраических уравнений [1]:

$$F\left(\dot{x}, x, t\right) = 0, \quad x\left(t_0\right) = x^0. \tag{1.1}$$

Он основан на представлении искомого решения в виде сплайна с подвижными узлами. Параметры сплайна ищутся как решение задачи минимизации функционала невязки

$$J\left(x\left(\cdot\right)\right) = \int\limits_{t_0}^{T} \left\|F\left(\dot{x}, x, t\right)\right\|^2 dt \to min. \tag{1.2}$$

При этом на сплайн накладываются дополнительные условия непрерывности или непрерывной дифференцируемости в узлах сетки. Согласно основной вычислительной схеме метода, на каждом промежутке решается задача безусловной минимизации функционала невязки с точностью ε, что обеспечивает выполнение неравенства

$$J\left(x\left(\cdot\right)\right) \leq \varepsilon. \tag{1.3}$$

Такой подход позволяет решать задачи (1.1), не имеющие конечного индекса дифференцирования (т.е. не сводимые к нормальной форме Коши)

$$\dot{x} = f\left(x, t\right). \tag{1.4}$$

Кроме того, метод ВС способен решать непосредственно задачи в нормальной форме. При этом по временным и вычислительным затратам он уступает классическим конечно-разностным методам, но позволяет получить решение в виде непрерывной или непрерывно-дифференцируемой функции. Поэтому особый интерес представляет изучение свойств метода ВС при решении задач в нормальной форме (1.4).

В работе [2] было проведено частичное исследование метода ВС для решения (1.4). Были получены оценки погрешности метода и функция устойчивости для непрерывного сплайна степени 1. Данная работа посвящена изучению устойчивости метода ВС в случае непрерывного сплайна степени 2.

[1]Ст. преподаватель кафедры ЭММиИТ, Ульяновский государственный университет, г. Ульяновск; Marj2005@yandex.ru

Как известно, важной характеристикой численных методов решения задачи Коши является их устойчивость, т.е. ограниченность погрешности приближенного решения $\{x_k\}$ при $k \to \infty$. Свойство устойчивости изучается на основе тестового уравнения Далквиста

$$\dot{x} = \lambda x, \quad x(0) = 1, \quad t \geq 0. \tag{1.5}$$

Исследуемый метод применяется к решению (1.5) и записывается в виде

$$x_k = R(\lambda h)\, x_{k-1}, \tag{1.6}$$

где $R(\lambda h)$ называется функцией устойчивости метода и определяет его свойства [3].

Определение 1.1. *Областью устойчивости метода называется множество* $S = \{z \in C : |R(z)| \leq 1\}$.

Определение 1.2. *Метод называется А-устойчивым, если для него* $S = \{z \in C : Rez \leq 0\}$.

Разностный метод с рациональной функцией устойчивости вида $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ А-устойчив тогда и только тогда, когда:

1) $|R(iy)| \leq 1$ для $\forall y \in \mathbb{R}$;

2) $R(z)$ аналитическая функция при $Rez < 0$.

Первое требование называется I-устойчивостью. I-устойчивость эквивалентна условию, что для функции

$$E(y) = Q(iy)\, Q(-iy) - P(iy)\, P(-iy) \tag{1.7}$$

выполняется $E(y) \geq 0$ для $\forall y \in \mathbb{R}$.

При решении жестких задач кроме А-устойчивости желательно, чтобы значение $|R(z)|$ было много меньше 1 при $z \to -\infty$. В противном случае жесткие компоненты решения будут демпфироваться очень медленно. Поэтому свойство А-устойчивости усиливается дополнительным требованием.

Определение 1.3. *Метод называется L-устойчивым, если он А-устойчив и* $\lim\limits_{z\to\infty} R(z) = 0$.

В работе [2] была получена функция устойчивости метода в случае непрерывного сплайна 1-й степени. Доказано, что в этом случае метод вариационных сплайнов является А-устойчивым и не является L-устойчивым.

Рассмотрим возможность исследования устойчивости метода ВС для непрерывного сплайна степени 2.

2. Построение функции устойчивости

Пусть тестовое уравнение Далквиста (1.5) решается методом ВС на отрезке $[0, T]$. Разобьем этот отрезок на равные промежутки $0 = t_0 < t_1 < ... < t_N \equiv T$ и на каждом из них определим квадратичный сплайн с условиями непрерывности в узлах сетки:

$$x^k\left(t, v^k\right) = \sum_{\alpha=0}^{2} v_\alpha^k (t - t_k)^\alpha, \quad x^{k+1}\left(t_{k+1}, v^{k+1}\right) = x^k\left(t_{k+1} - 0, v^k\right), \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \tag{2.1}$$

где $v^k = \{v_0^k, v_1^k, v_2^k\}$. При этом $v_0^k = x^0$ на первом промежутке, а на остальных $v_0^k = x^{k-1}\left(t_k, v^{k-1}\right)$, т.е. v_0^k определяется из условия непрерывности сплайна. Согласно общей вычислительной схеме метода ВС, на каждом промежутке $[t_k,\, t_{k+1}]$ необходимо решить задачу безусловной минимизации функционала невязки

$$\varphi_k\left(v^k\right) = \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \left\|\dot{x}\left(t, v^k\right) - \lambda x\left(t, v^k\right)\right\|^2 dt \to min \tag{2.2}$$

по параметрам $v^k = \{v_1^k, v_2^k\}$. Обозначим $t_{k+1} - t_k = h, \quad x\left(t_k\right) = x_k,\ k = 0, 1, ..., N.$ Тогда

$$x_{k+1} = v_0^k + \left(t_{k+1} - t_k\right) v_1^k + \left(t_{k+1} - t_k\right)^2 v_2^k = v_0^k + h v_1^k + h^2 v_2^k. \tag{2.3}$$

Далее для простоты положим $v^k \equiv v$.

Для решения задачи (2.2) находим производные функционала невязки по v_1 и v_2 и приравниваем их к нулю:

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi_k(v)}{\partial v_1} \equiv \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \left(v_1 + 2v_2\left(t - t_k\right) - \lambda\left(v_0 + v_1\left(t - t_k\right) + v_2\left(t - t_k\right)^2\right)\right)\left(1 - \lambda\left(t - t_k\right)\right) dt = 0, \\ \frac{\partial\varphi_k(v)}{\partial v_2} \equiv \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \left(v_1 + 2v_2\left(t - t_k\right) - \lambda\left(v_0 + v_1\left(t - t_k\right) + v_2\left(t - t_k\right)^2\right)\right) \cdot \\ \qquad\qquad \cdot\left(2\left(t - t_k\right) - \lambda\left(t - t_k\right)^2\right) dt = 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Получаем линейную систему из двух уравнений относительно двух неизвестных, где левая часть - матрица C размерности 2×2:

$$C = \begin{pmatrix} h\left(1 - \lambda h + (\lambda h)^2/3\right) & h^2\left(1 - \lambda h + (\lambda h)^2/4\right) \\ h^2\left(1 - \lambda h + (\lambda h)^2/4\right) & h^3\left(4/3 - \lambda h + (\lambda h)^2/5\right) \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

а правая часть - вектор d размерности 2×1:

$$d = \begin{pmatrix} \lambda v_0 h\left(1 - \lambda h/2\right) \\ \lambda v_0 h^2\left(1 - \lambda h/3\right) \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Найдем определитель матрицы C:

$$det\left(C\right) = h^4\left(\left(1 - \lambda h + \lambda^2 h^2/3\right)\left(4/3 - \lambda h + \lambda^2 h^2/5\right) - \left(1 - \lambda h + (\lambda h)^2/4\right)^2\right) =$$

$$= h^4\left(1/3 - \lambda h/3 + 13\lambda^2 h^2/90 - \lambda^3 h^3/30 + \lambda^4 h^4/240\right).$$

Обозначим $z = \lambda h$, а

$$Q\left(z\right) = 1/3 - z/3 + 13z^2/90 - z^3/30 + z^4/240. \tag{2.7}$$

Корнями полинома $Q(z)$ являются комплексные числа $z_1 = 1.7 + 3.141i$, $z_2 = 1.7 - 3.141i$, $z_3 = 2.3 + 0.991i$, $z_4 = 2.3 - 0.991i$. Таким образом, для любых действительных значений λ и $h \neq 0$ это выражение не обращается в 0. Тогда решение соответствующей системы линейных уравнений может быть получено по формулам Крамера:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1 = \begin{vmatrix} \lambda v_0 h\left(1-\lambda h/2\right) & h^2\left(1-\lambda h+\left(\lambda h\right)^2/4\right) \\ \lambda v_0 h^2\left(1-\lambda h/3\right) & h^3\left(4/3-\lambda h+\left(\lambda h\right)^2/5\right) \end{vmatrix} /det\left(C\right), \\ v_2 = \begin{vmatrix} h\left(1-\lambda h+\left(\lambda h\right)^2/3\right) & \lambda v_0 h\left(1-\lambda h/2\right) \\ h^2\left(1-\lambda h+\left(\lambda h\right)^2/4\right) & \lambda v_0 h^2\left(1-\lambda h/3\right) \end{vmatrix} /det\left(C\right). \end{array} \right. \tag{2.8}$$

Тогда

$$v_1 = \frac{h^3 P1\left(z\right)}{h^4 Q\left(z\right)} v_0 = \frac{P1\left(z\right)}{hQ\left(z\right)} v_0, \quad v_2 = \frac{h^2 P2\left(z\right)}{h^4 Q\left(z\right)} v_0 = \frac{P2\left(z\right)}{h^2 Q\left(z\right)} v_0, \tag{2.9}$$

где

$$P1\left(z\right) = z/3 - z^2/3 + 7z^3/60 - z^4/60, \tag{2.10}$$

$$P2\left(z\right) = z^2/6 - z^3/12 + z^4/72. \tag{2.11}$$

Тогда в силу (2.3)

$$x_{k+1} = v_0^k + h\frac{P1\left(z\right)}{hQ\left(z\right)} + h^2\frac{P2\left(z\right)}{h^2 Q\left(z\right)} = v_0^k \frac{Q\left(z\right) + P1\left(z\right) + P2\left(z\right)}{Q\left(z\right)}. \tag{2.12}$$

Таким образом, получаем функцию устойчивости метода ВС для рассматриваемого случая:

$$R\left(z\right) = \frac{1 - z^2/15 + z^4/240}{1 - z + 13z^2/30 - z^3/10 + z^4/80}. \tag{2.13}$$

Как и для неявных методов Рунге-Кутты, функция (2.13) является рациональной функцией с вещественными коэффициентами над полем комплексных чисел [3].

3. А-устойчивость метода ВС

Далее исследуем полученную функцию устойчивости (2.13).

Т е о р е м а 3.1. *Метод вариационных сплайнов для кусочно-гладкого сплайна второй степени на равномерной сетке с шагом h является I-устойчивым, A-устойчивым и не является L-устойчивым.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала докажем I-устойчивость.

Найдем функцию (1.7):

$$E\left(y\right) = Q\left(iy\right)Q\left(-iy\right) - \left(Q\left(iy\right) + P1\left(iy\right) + P2\left(iy\right)\right)\left(Q\left(-iy\right) + P1\left(-iy\right) + P2\left(-iy\right)\right) =$$
$$= 1 + \frac{4}{30}y^2 + \frac{345}{27000}y^4 + \frac{2}{2400}y^6 + \frac{1}{6400}y^8 - \left(1 + \frac{4}{30}y^2 + \frac{345}{27000}y^4 + \frac{1}{1800}y^6 + \frac{1}{57600}y^8\right) =$$
$$= \frac{5}{3600}y^6 + \frac{1}{7200}y^8. \tag{3.1}$$

Очевидно, что $E\left(y\right) \geq 0$ для $\forall y \in \mathbb{R}$. Таким образом, I-устойчивость доказана.

Функции $Q\left(z\right)$, $P1\left(z\right)$ и $P2\left(z\right)$ являются аналитическими в любой точке комплексной плоскости. Следовательно, $R\left(z\right)$ будет аналитической в любой точке, для которой $Q(z) \neq 0$. Как было указано в п. 2, $Q(z)$ обращается в 0 при значениях $z_{1,2} = 1.7 \pm 3.141i$, $z_{3,4} = 2.3 \pm 0.991i$. Таким образом, при $Rez < 0$ функция устойчивости метода является аналитической. A-устойчивость доказана.

Метод не является L-устойчивым, так как

$$\lim_{z \to \infty} R(z) = \frac{1/240}{1/80} = \frac{1}{3} \neq 0. \tag{3.2}$$

Доказательство закончено.

Обобщим теорему на случай неравномерной сетки. Разобьем отрезок $[0, T]$ на промежутки произвольной длины $0 = t_0 < t_1 < ... < t_N \equiv T$ и обозначим $h_k = t_k - t_{k-1}, \quad k = 1, ..., N$. Тогда

$$x_{k+1} = v_0^k + (t_{k+1} - t_k)\, v_1^k + (t_{k+1} - t_k)^2\, v_2^k = v_0^k + h_{k+1} v_1^k + h_{k+1}^2 v_2^k. \tag{3.3}$$

Так как на каждом промежутке решение задачи минимизации (2.2) задается одной и той же общей формулой (2.8) и h_k в итоге сокращается, то все полученные результаты верны и для неравномерной сетки.

В случае кусочно-гладкого сплайна первой степени на равномерной сетке был получен аналогичный результат [2]. Функция устойчивости являлась рациональной функцией с вещественными коэффициентами:

$$R(z) = \frac{1 - z^2/6}{1 - z + z^2/3}. \tag{3.4}$$

Метод ВС являлся A-устойчивым и не являлся L-устойчивым. Так как обе функции (2.13) и (3.4) получены на основе общей вычислительной схемы метода ВС, результат для сплайна первой степени так же верен и для неравномерной сетки. Таким образом, выполняется теорема 3.2.

Теорема 3.2. *Если степень кусочно-гладкого сплайна не превышает 2, то метод ВС является A-устойчивым и не является L-устойчивым.*

Список литературы

1. Горбунов В.К., Мартыненко Ю.В. Метод вариационных сплайнов для неявных дифференциальных уравнений // Вестник Самарского государственного технического университета. Математическая серия. – 2007. – № 2(6). – С. 16-28.

2. Мартыненко Ю.В. Метод вариационных сплайнов для дифференциальных уравнений в нормальной форме // Труды Средневолжского математического общества. – 2007. – Т. 9, № 2. – С. 110-120.

3. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. – М.: Мир, 1999. – 685 с.

Stability of the variational spline method.

© Y. V. Martinenko[2]

Abstract. In the work stability function is obtained for variational spline method and properties of the function are investigated.

Key Words: differential-algebraic equations, variational spline method, stability.

[2]Senior teacher of EMM and IT Chair, Ulyanovsk State University, Ulyanovsk; Marj2005@yandex.ru.