УДК 534.113

О решении задачи диагностирования дефектов в виде малой полости в стержне

© А.М. Ахтямов[1], А. Р. Аюпова[2]

Аннотация. В статье предлагается метод, позволяющий вычислить местоположение и объем двух полостей в стержне по собственным частотам изгибных колебаний. Рассматривается случай шарнирного закрепления концов стержня. Полость моделируется отрицательной сосредоточенной массой.

Ключевые слова: вибродиагностика, стержень, полость, собственные частоты.

1. Введение

В последнее время при определении технического состояния объекта с целью поиска и обнаружения дефектов используется вибродиагностика. Данное направление технической диагностики позволяет судить о состоянии какой-либо недоступной для визуального осмотра части механической установки сложной структуры, проводить анализ её технического состояния, не используя дорогостоящую разборку и не нарушая приработку деталей. Это удобный и наиболее безопасный способ, не требующий больших затрат времени. В данной статье рассматривается дефект типа полость в элементах конструкции, которые можно представить как однородный стержень. Рассматривается задача об изгибных колебаниях такого стержня для случая шарнирного закрепления, хотя разработанный метод применим и для других видов закрепления.

Модель сначала была построена для опредления объема и местопложения одной полости. Но часто при эксплуатации механических систем дефекты образуются на нескольких участках системы. Поэтому задача диагностирования нескольких полостей весьма актуальна.

Пусть балка длины L и массы m имеет дефекты в виде малой полости. Эти полости находятся от левого конца балки на расстоянии x_1 и x_2 соответственно. Объемы полостей считаем намного меньшими объема стержня. Величину объема полости смоделируем абсолютной величиной отрицательной сосредоточенной массы. Возможность моделирования полости таким способом обоснована следующими соображениями. Вычислив значения моментов инерций и площади сечения для стержней с полостью и без, можно показать, что значение момента инерции при образовании дефекта остается практически неизменным, тогда как площадь сечения уменьшается пропорционально размерам полости.

2. Прямая задача о колебаниях балки

Как известно, уравнение изгибных колебаний призматической балки с постоянной жесткостью на изгиб имеет вид:

$$EI\,\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} + \rho\,F\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0,$$

[1]Профессор, ведущий научный сотрудник лаборатории механики твердого тела Института механики Уфимского научного центра РАН, г. Уфа;AkhtyamovAM@mail.ru

[2]Старший преподаватель кафедры математического моделирования, Нефтекамский филиал Башкирского государственного университета, г. Нефтекамск; aigul9@yandex.ru

где $u(x,t)$ — прогиб текущей точки оси стержня, EI — изгибная жесткость стержня, ρ — плотность стержня, F — площадь поперечного сечения стержня, ω — частотный параметр.

Задача об изгибных колебаниях стержня длины L с шарнирно-закрепленными концами заменой $u(x,t) = y(x)\,\cos\omega\,t$ сводится к следующей спектральной задаче:

$$y^{(4)} = \lambda^4 y, \tag{2.1}$$

$$y(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y(L) = 0, \quad y''(L) = 0, \tag{2.2}$$

где $\lambda^4 = \rho\,F\,\omega^2/\alpha$, $\alpha = EI$.

Переходя в задаче (2.1)–(2.2) к безразмерным переменным

$$\xi = \frac{x}{L}, \qquad \lambda^4 = \frac{L^4\rho\,F\,\omega^2}{EI},, \tag{2.3}$$

получаем следующую задачу на собственные значения:

$$y^{(4)}(\xi) = \lambda^4 y(\xi), \tag{2.4}$$

$$y(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y(1) = 0, \quad y''(1) = 0, \tag{2.5}$$

Ввиду того, что полость смоделировали как отрицательную массу, используем в этой задаче условия сопряжения для сосредоточенной массы. Эти условия хорошо известны и записываются следующим образом:

$$\begin{array}{l} y_-(\xi_s) = y_+(\xi_s), \\ y'_-(\xi_s) = y'_+(\xi_s), \\ (EIy''_-(\xi_s)) = (EIy''_+(\xi_s)), \\ (EIy'''_-(\xi_s)) = (EIy'''_+(\xi_s)) - m_s\omega^2 y(\xi_s), \end{array} \tag{2.6}$$

где s=1,2, и m_s представим как отрицательную сосредоточенную массу, абсолютное значение которой принимается за объем полости.

Из (2.3) следует, что собственные частоты ω_k балки с полостью находятся по формуле

$$\omega_k = \sqrt{\frac{EJ}{\rho\,F}}\left(\frac{\lambda_k}{L}\right)^2, \tag{2.7}$$

где λ_k — собственные значения граничной задачи для уравнения (2.4) с краевыми условиями (2.5) и условиями сопряжения ((2.6)).

Собственные значения — это такие значения λ, при которых краевая задача (2.4), (2.5), (2.6) имеет нетривиальные решения. Нетривиальные решения $y_1(\xi,\lambda)$, $y_2(\xi,\lambda)$ и $y_3(\xi,\lambda)$ уравнения (2.4) левее и правее каждой полости записываются следующим образом:

$$y_i(\xi,\lambda) = A_i\,z_1(\xi,\lambda) + B_i\,z_2(\xi,\lambda) + C_i\,z_3(\xi,\lambda) + D_i\,z_4(\xi,\lambda), \qquad i = 1,2,3.$$

Здесь

$$\begin{array}{l} z_1(\xi,\,\lambda) = \big(\cos\lambda\,\xi + \mathrm{ch}\lambda\,\xi\big)/2, \\ z_2(\xi,\,\lambda) = \big(\sin\lambda\,\xi + \mathrm{sh}\lambda\,\xi\big)/(2\lambda), \\ z_3(\xi,\,\lambda) = \big(-\cos\lambda\,\xi + \mathrm{ch}\lambda\,\xi\big)/(2\lambda^2), \\ z_4(\xi,\,\lambda) = \big(-\sin\lambda\,\xi + \mathrm{sh}\lambda\,\xi\big)/(2\lambda^3) \end{array} \tag{2.8}$$

являются линейно независимыми решениями уравнения (2.4), которые образуют фундаментальную систему Коши и выражаются через функции Крылова [23].

Константы A_i, B_i, C_i, D_i $(i = 1,2,3)$ являются решениями системы двенадцати алгебраических уравнений (2.5), (2.6). Нули определителя $\Delta(\lambda)$ этой системы и являются собственными значениями краевой задачи (2.4), (2.5), (2.6). Ввиду громоздкости определителя $\Delta(\lambda)$ опустим здесь уравнение для нахождения собственных значений.

3. Определение объемов двух полостей по двум собственным частотам

Итак, нами исследована прямая задача нахождения собственных частот колебаний балки с двумя полостями по известным граничным услвоиям и условиям сопряжения. Рассмотрим теперь обратную задачу.

Если ω_k, $k = 1, 2$, известны, то объемы полостей $|m_1|$ и $|m_2|$ или же их местопложения x_1 и x_2 при известных объемах находятся из системы

$$\Delta(\lambda_k) = 0, \tag{3.1}$$

($k = 1, 2$) нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\xi_s \in [0, 1]$, $m_s \in (-0,0001; -0,1)$.

Пример 3.1. *Для* $L = 1$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $\lambda_1 = 6.2958969975$ *и* $\lambda_2 = 9.4435944492$*, с абсолютной погрешностью* 10^{-20} *получаем следующее решение системы* (3.1):{ $m_1 = -0.0001$, $m_2 = -0.0002$ },{ $m_1 = -0.00006$, $m_2 = -0.0003$ }. Отметим, что первый комплект корней в точности совпадает с теми значениями, по которым и находились собственные значения λ_k, $k = 1, 2$ в прямой задаче. Выбор правильного решения из двух найденных требует использования дополнительных условий. Подобные условия были найдены для задачи диагностирования сосредоточенных масс на балке. В данный момент они разрабатываются и для определения полости.

Предложенный метод может быть использован для определения объемов полостей в стержне по его изгибным колебаниям, а в некоторых случаях даёт также возможность судить о местоположениях полости. Необходимо отметить, что численные исследования, проведенные для консольной балки с полостью, в точности совпадают с результатами работы Ватульяна [8],что подтверждает правильность метода и хорошее согласование с известными результатами.

Список литературы

1. Артоболевский И. И., Бобровницкий Ю. И., Генкин М. Д. Введение в акустическую динамику машин. М.: Наука, 1979.

2. Павлов Б.В. Акустическая диагностика механизмов. М.: Машиностроение, 1971.

3. Айнола Л. Я. Обратная задача о собственных колебаниях упругих оболочек // ПММ. 1971. № 2. С. 358–364.

4. Глаголевский Б.А., Москаленко И.Б. Низкочастотные акустические методы контроля в машиностроении Л.: Машиностроение. 1977.

5. Тукмаков А. Л., Аксенов И. Б. О распознавании объектов на основе анализа акустического отклика при помощи функции числа состояний динамической системы // Изв. вузов. Авиационная техника. 2003. № 1. С. 62–67.

6. Ваньков Ю.В., Казаков Р.Б., Яковлева Э.Р. Собственные частоты изделия как информативный признак наличия дефектов // Электронный журнал «Техническая акустика». 2003. 5. С.1–7

7. Романов В. Г. Обратные задачи математической физики. М. Наука. 1984.

8. *Ватульян А. О., Солуянов Н. О.* Об определении местоположения и размера полости в упругом стержне // Дефектоскопия. 2005. № 9. С. 44–56.

9. *Баранов И. В., Ватульян А. О., Соловьев А. Н.* Об одном генетическом алгоритме и его применении в обратных задачах идентификации упругих сред // Вычисл. технологии. 2006. № 3. С. 14–25.

10. *Бочарова О. В., Ватульян А. О., Жарков Р. С.* Реконструкция малых полостей в упругих стержнях // Изв. вузов Сев.-Кавк. региона. Естеств. науки. 2006. № 2. С. 28–32.

11. *Ватульян А. О., Солуянов Н. О.* Идентификация полости в упругом стержне при анализе поперечных колебаний // Прикладная механика и техническая физика. 2008. Т. 49. № 6. С. 152–158.

12. *Ильгамов М. А.* Диагностика повреждений вертикальной штанги // Труды Института механики Уфимского научного центра РАН. Вып. 5. / Под ред. М.А.Ильгамова, С.Ф. Урманчеева, С.В. Хабирова. Уфа: Гилем, 2007. С. 201–211.

13. *Ильгамов М. А., Хакимов А. Г.* Диагностика повреждений вертикальной штанги // Труды Института механики Уфимского научного центра РАН. Вып. 5. / Под ред. М.А.Ильгамова, С.Ф. Урманчеева, С.В. Хабирова. Уфа: Гилем, 2007. С. 212–220.

14. Ахтямов А. М. Об определении краевого условия по конечному набору собственных значений // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35. № 8. С. 1127–1128.

15. Ахатов И. Ш., Ахтямов А. М. Определение вида закрепления стержня по собственным частотам его изгибных колебаний // Прикладная математика и механика. 2001. Т. 65. Вып. 2. С. 290–298.

16. Ахтямов А.М. Можно ли определить вид закрепления колеблющейся пластины по ее звучанию? // Акустический журнал. 2003. Т. 49, № 3. С. 325–331.

17. Akhtyamov A.M., Mouftakhov A.V. Identification of boundary conditions using natural frequencies // Inverse Problems in Science and Engineering. 2004. Vol. 12. No. 4. P. 393–408.

18. Ахтямов А. М., Муфтахов А. В., Ямилова Л. С. Определение вида и параметров закрепления стержня по собственным частотам его колебаний // Акустический журнал. 2008. Т. 54, № 2. С. 181–188.

19. Ахтямов А. М., Сафина Г. Ф. Определение виброзащитного закрепления трубопровода // Прикладная механика и техническая физика. 2008. Т. 49. № 1. С. 139–147.

20. Ахтямов А. М. Теория идентификации краевых условий. Уфа: Гилем, 2008. 300 с.

21. Ахтямов А. М. Диагностирование нагружености механической системы // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2003. № 6. С. 60.

22. Томпсон Дж. М.Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике: Пер. с англ. — М.: Мир, 1985. 254 с.

23. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. / Ред. совет: В. Н. Челомей (пред.). М.: Машиностроение, 1978. Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В. В. Болотина. 1978.

24. Коллатц Л. Задачи на собственные значения (с техническими приложениями). М.: Наука, 1968. 503 с.

25. Ланкастер П. Теория матриц: Пер. с англ. М.: Наука, 1982.

On solving the problem of diagnosing defects in a small cavity in the rod.

© A. M. Akhtyamov[3],A. R. Aupova[4]

Abstract. The article proposes a method that allows calculate the location and volume of two cavities in the rod on natural frequencies of flexural vibrations. The case hinged ends of the rod. The cavity is modeled negative concentrated mass.

Key Words: vibrodiagnostics, rod, cavity, eigenfrequencies.

[3]Senior Researcher of Mechanics Laboratory, of Institute of Mechanics of Ufa Research Center; AkhtyamovAM@mail.ru

[4]Senior lecturer of the mathematical modeling chair, Neftekamsky branch of the Bashkir State University, Neftekamsk; aigul9@yandex.ru