УДК 517.9

Гомоклинический каскад бифуркаций в системе типа Лоренца

© Т. А. Гурина[1], И. А. Дорофеев[2]

Аннотация. В системе дифференциальных уравнений типа Лоренца, являющейся моделью устойчивости средней фирмы, найден полный двойной гомоклинический каскад бифуркаций, приводящий к образованию странного аттрактора.

Ключевые слова: система Лоренца, бифуркация, особая точка, предельный цикл, гомоклинический контур, гомоклинический каскад бифуркаций, странный аттрактор, переход к динамическому хаосу.

1. Введение

Система дифференциальных уравнений Лоренца [1], описывающая развитие турбулентности в течении Релея-Бенара, является классическим примером динамической системы, переходящей к хаосу через двойной гомоклинический каскад бифуркаций и рождение странного аттрактора при изменении бифуркационного параметра $r \in [0,\ 1700]$ и фиксированных параметрах $b = 0.5$, $\sigma = 10$:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y, \\ \dot{y} = rx - y - xz, \\ \dot{z} = -bz + xy. \end{cases} \tag{1.1}$$

В статье Шаповалова В. И. и соавторов [2] построена синергетическая модель средней фирмы, описывающая эволюцию величин кредита x, капитала y и численности сотрудников z и обладающая возможностью саморегуляции с помощью управляющих параметров $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \mu,\ \sigma > 0$, являющихся бифуркационными. Модель представляет собой систему дифференциальных уравнений, похожую на систему Лоренца:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \delta y, \\ \dot{y} = \mu(x + y) - \beta xz, \\ \dot{z} = -\gamma z + \alpha xy. \end{cases} \tag{1.2}$$

Устойчивой работе фирмы соответствует выход фазовой траектории системы (1.2) на устойчивое предельное множество — аттрактор (неподвижную точку или предельный цикл). Проведенные авторами [2], [4] численные эксперименты показали, что при изменении бифуркационного параметра $\gamma \in [0;\ 10]$ и $\alpha = 5,\ \beta = 8,\ \delta = 1, \mu = 2.1,\ \sigma = 4.1$ в системе (1.2) может возникнуть хаотический аттрактор, напоминающий аттрактор Лоренца. Ему предшествует каскад бифуркаций удвоения. Для проверки существования у системы Шаповалова (1.2) странного аттрактора типа Лоренца необходимо убедиться в наличии гомоклинического каскада бифуркаций.

[1]Доцент кафедры теории вероятностей, Московский авиационный институт (технический университет), г. Москва; gurina_mai@mail.ru

[2]Ассистент кафедры теории вероятностей, Московский авиационный институт (технический университет), г. Москва; softcat@mail.ru

О п р е д е л е н и е 1.1. [1] *Полным (неполным) гомоклиническим каскадом бифуркаций называется каскад бифуркаций рождения устойчивых предельных циклов из единственного устойчивого предельного цикла при изменении значений бифуркационного параметра вдоль прямой, проходящей в пространстве параметров через точку (вблизи точки) существования гомоклинического контура.*

Если прямая, соответствующая изменению значений бифуркационного параметра, проходит в пространстве параметров через точку (вблизи точки) одновременного существования двух гомоклинических контуров, то образующийся каскад бифуркаций устойчивых циклов назовается полным (неполным) двойным гомоклиническим каскадом.

2. Исследование особых точек системы Шаповалова.

Найдем особые точки системы (1.2) из условий $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$:

$$\begin{cases} -\sigma x + \delta y = 0, \\ \mu(x+y) - \beta xz = 0, \\ -\gamma z + \alpha xy = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

При любых $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \mu,\ \sigma > 0$ существуют три особые точки:

$$O_0(0,\ 0,\ 0), \quad O_{1,2}\left(\pm\sqrt{\frac{\gamma\mu(\delta+\sigma)}{\alpha\beta\sigma}},\ \pm\sqrt{\frac{\gamma\mu\sigma(\delta+\sigma)}{\alpha\beta\delta^2}},\ \frac{\mu(\delta+\sigma)}{\beta\delta}\right) \tag{2.2}$$

Для исследования особых точек на устойчивость найдем якобиеву матрицу системы:

$$A = \begin{pmatrix} -\sigma & \delta & 0 \\ \mu - \beta z & \mu & -\beta x \\ \alpha y & \alpha x & -\gamma \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

В точке $O_0(0,\ 0,\ 0)$ получим матрицу линеаризации системы:

$$A_0 = \begin{pmatrix} -\sigma & \delta & 0 \\ \mu & \mu & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

и характеристическое уравнение:

$$\det(A_0 - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\sigma-\lambda & \delta & 0 \\ \mu & \mu-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+\gamma)(\lambda^2 - (\mu-\sigma)\lambda - \mu(\sigma+\delta)) = 0.$$

Согласно теореме Виета имеем: $\lambda_1 + \lambda_2 = \mu - \sigma,\ \lambda_1\lambda_2 = -\mu(\sigma+\delta)$.
Корни характеристического уравнения:

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = \frac{\mu-\sigma}{2} - \sqrt{\frac{(\mu-\sigma)^2}{4} + \mu(\delta+\sigma)} = \frac{\mu-\sigma}{2} - \sqrt{\frac{(\mu+\sigma)^2}{4} + \mu\delta} < 0, \\ &\lambda_2 = \frac{\mu-\sigma}{2} + \sqrt{\frac{(\mu-\sigma)^2}{4} + \mu(\delta+\sigma)} = \frac{\mu-\sigma}{2} + \sqrt{\frac{(\mu+\sigma)^2}{4} + \mu\delta} > 0, \\ &\lambda_3 = -\gamma < 0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Отсюда следует, что точка $O_0(0,\ 0,\ 0)$ — седло-узел с двумерным устойчивым инвариантным многообразием W^s и одномерным неустойчивым инвариантным многообразием W^u. В симметричных точках $O_{1,2}$ имеем матрицы линеаризации:

$$A_{1,2} = \begin{pmatrix} -\sigma & \delta & 0 \\ -\dfrac{\mu\sigma}{\delta} & \mu & \mp\sqrt{\dfrac{\beta\gamma\mu(\delta+\sigma)}{\alpha\sigma}} \\ \pm\sqrt{\dfrac{\alpha\gamma\mu\sigma(\delta+\sigma)}{\beta\delta^2}} & \pm\sqrt{\dfrac{\alpha\gamma\mu(\delta+\sigma)}{\beta\sigma}} & -\gamma \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

и характеристические уравнения:

$$\det\left(A_{1,2} - \lambda E\right) = -\Big(\lambda^3 + (\gamma+\sigma-\mu)\lambda^2 + \gamma\Big(\frac{\delta\mu}{\sigma} + \sigma\Big)\lambda + 2\gamma\mu(\delta+\sigma)\Big) = 0.$$

Найдем порог устойчивости точек $O_{1,2}$, то есть значения параметров, при которых появляется пара чисто мнимых корней характеристического уравнения. Чисто мнимые корни у кубического трехчлена будут тогда и только тогда, когда произведение коэффициентов при λ и λ^2 равно свободному члену:

$$(\gamma+\sigma-\mu)\Big(\frac{\gamma\mu}{\sigma} + \sigma\Big) = 2\mu(\delta+\sigma).$$

Отсюда мы получим значение параметра γ, при котором точки $O_{1,2}$ одновременно теряют устойчивость и порождают предельные циклы, то есть происходит бифуркация Андронова-Хопфа:

$$\gamma_c = \frac{2\mu\sigma(\delta+\sigma)}{\delta\mu+\sigma^2} + (\mu-\sigma). \tag{2.7}$$

Заметим, что в выражение критического значения параметра γ_c не входят параметры α, β. Таким образом, при всех $\gamma < \gamma_c$ точки $O_{1,2}$ будут неустойчивы. Найдем значения собственных чисел при $\gamma = \gamma_c$. Характеристическое уравнение примет вид:

$$\lambda^3 + (\gamma+\sigma-\mu)\lambda^2 + \gamma\Big(\frac{\delta\mu}{\sigma} + \sigma\Big)\lambda + \gamma(\gamma+\sigma-\mu)\Big(\frac{\delta\mu}{\sigma} + \sigma\Big) = 0.$$

Тогда:

$$(\lambda+\gamma+\sigma-\mu)\Big(\lambda^2 + \gamma\Big(\frac{\delta\mu}{\sigma} + \sigma\Big)\Big) = 0, \tag{2.8}$$

$\lambda_{1,2} = \mp i\sqrt{\gamma\Big(\dfrac{\delta\mu}{\sigma} + \sigma\Big)}$ — мнимые корни, $\lambda_3 = \mu-\gamma-\sigma$ — знакопеременный действительный корень ($\lambda_3 > 0$, если $\gamma < \mu-\sigma$ и $\lambda_3 < 0$, если $\gamma < \mu-\sigma$).
Отсюда следует, что при $\gamma < \gamma_c$ и $\gamma > \mu-\sigma$ точки $O_{1,2}$ — седло-фокусы с одномерным устойчивым инвариантным многообразием W^s и двумерным неустойчивым инвариантным многообразием W^u.

Из существования в системе седло-узла и двух седло-фокусов вытекает возможность образования в ней различных гомоклинических контуров особых точек и связанных с ними каскадов бифуркаций.

3. Приведение матрицы линейной части системы к диагональной форме.

Запишем систему (1.2) в векторно-матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = A_0 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 0 \\ -\beta z \\ \alpha y \end{pmatrix}, \text{ где } A_0 = \begin{pmatrix} -\sigma & \delta & 0 \\ \mu & \mu & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Приведем матрицу линейной части системы к каноническому виду.
Поскольку матрица A_0 линеаризации в точке $O_0(0,\ 0,\ 0)$ имеет, в общем случае, различные действительные собственные числа, то она приводится к диагональной форме. По аналогии с [1] приведем матрицу линейной части системы к главным осям заменой:

$$x = u + v,\ \delta y - \sigma x = \lambda_1 u + \lambda_2 v,\ z = z, \tag{3.2}$$

отсюда: $y = \dfrac{\lambda_1+\sigma}{\delta}u + \dfrac{\lambda_2+\sigma}{\delta}v$.
Вычислим матрицу перехода и обратную к ней:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} u \\ v \\ z \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \dfrac{\lambda_1+\sigma}{\delta} & \dfrac{\lambda_2+\sigma}{\delta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ z \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad B^{-1} = \frac{\delta}{\lambda_2-\lambda_1} \begin{pmatrix} \dfrac{\lambda_2+\sigma}{\delta} & -1 & 0 \\ -\dfrac{\lambda_1+\sigma}{\delta} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\lambda_2-\lambda_1}{\delta} \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Система примет вид:

$$\begin{pmatrix} \dot u \\ \dot v \\ \dot z \end{pmatrix} = B^{-1}A_0B \begin{pmatrix} u \\ v \\ z \end{pmatrix} + B^{-1}(u+v) \begin{pmatrix} 0 \\ -\beta z \\ \alpha\Big(\dfrac{\lambda_1+\sigma}{\delta}u + \dfrac{\lambda_2+\sigma}{\delta}v\Big) \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

После подстановки (3.3), (3.4) в (3.5) и преобразований получим:

$$\begin{pmatrix} \dot u \\ \dot v \\ \dot z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{\beta\delta(u+v)z}{\lambda_2-\lambda_1} \\ -\dfrac{\beta\delta(u+v)z}{\lambda_2-\lambda_1} \\ \dfrac{\alpha}{\delta}(u+v)\big((\lambda_1+\sigma)u + (\lambda_2+\sigma)v\big) \end{pmatrix}, \tag{3.6}$$

Запись уравнений в переменных $(u,\ v,\ z)$ выгодно отличается от записи в переменных (z, y, z) вследствие того, что устойчивое многообразие W^s в точке $O_0(0,0,0)$ касательно к оси u, а неустойчивое W^u — касательно к оси v. В таком виде удобнее изучать геометрию фазовых кривых системы. При фиксированных параметрах $\alpha = 4,\ \beta = 8,\ \delta = 1,\ \mu = 2.1, \sigma = 4.1$ можно наблюдать каскад бифуркаций при стремлении значений параметра γ как сверху, так и снизу к точке γ^* существования в системе гомоклинических контуров седло-фокусов.
Особые точки преобразованной системы имеют координаты

$$O_0(0,\ 0,\ 0), \quad O_{1,2}\Big(\pm\frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\sqrt{\frac{\gamma\mu(\delta+\sigma)}{\alpha\beta\sigma}},\ \mp\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\sqrt{\frac{\gamma\mu\sigma(\delta+\sigma)}{\alpha\beta\sigma}},\ \frac{\mu(\delta+\sigma)}{\beta\delta}\Big), \tag{3.7}$$

причем точки $O_{1,2}$ находятся в первом и третьем октантах пространства. Фазовая траектория при параметре γ из хаотической области лежит на поверхности двух деформированных колец с центрами в точках $O_{1,2}$. Каждое кольцо имеет внешний контур

$z = z_s(u,\ v)$, $z_{s\,min} \le z \le z_{s\,max}$, на котором достигаются локальные минимумы по z различных траекторий при их вращении вокруг точек $O_{1,2}$. Внутренний контур кольца определяет «глаз» аттрактора, внутрь которого траектория не заходит, а внешний контур определяет максимальный размер аттрактора, на котором траектория переходит от вращения вокруг точки $O_1(O_2)$ к вращению вокруг точки $O_2(O_1)$. Переход осуществляется по двум симметричным частям другого множества, соединяющего кольца, на котором траектория также имеет точки локальных минимумов, лежащие на кривой $z = z_g(u,\ v)$, $z_{g\,min} \le z \le z_{g\,max}$. Циклы, охватывающие обе точки $O_{1,2}$, имеют локальные минимумы на кривой $z = z_g(u,\ v)$.

4. Поиск седловых циклов.

Все циклы из бесконечного семейства неустойчивых циклов, порождающих хаотический аттрактор, имеют пересечение с одномерным неустойчивым неинвариантным многообразием V^u точки $O_0(0,\ 0,\ 0)$. После вывода аналитических формул для многообразия V^u задача нахождения и доказательство существования неустойчивых циклов в системе сводится к нахождению неподвижных точек одномерного отображения возвращения на неустойчивое многообразие V^u. Этим методом могут быть найдены и любые устойчивые циклы, участвующие в формировании аттрактора. С этой целью сделаем в системе (3.1) преобразование, зависящее от z:

$$x = \tilde{u} + \tilde{v},\ \delta y - \sigma x = \lambda_1(z)\tilde{u} + \lambda_2(z)\tilde{v},\ z = z, \tag{4.1}$$

тогда: $y = \dfrac{\lambda_1(z)+\sigma}{\delta}\tilde{u} + \dfrac{\lambda_2(z)+\sigma}{\delta}\tilde{v}$,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B(z)\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ z \end{pmatrix}, \qquad B(z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \dfrac{\lambda_1(z)+\sigma}{\delta} & \dfrac{\lambda_2(z)+\sigma}{\delta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ z \end{pmatrix} = B^{-1}(z)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B^{-1}(z) = \frac{\delta}{\lambda_2(z)-\lambda_1(z)}\begin{pmatrix} \dfrac{\lambda_2(z)+\sigma}{\delta} & -1 & 0 \\ -\dfrac{\lambda_1(z)+\sigma}{\delta} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\lambda_2(z)-\lambda_1(z)}{\delta} \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \dot{B}(z)\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ z \end{pmatrix} + B(z)\begin{pmatrix} \dot{\tilde{u}} \\ \dot{\tilde{v}} \\ \dot{z} \end{pmatrix}, \qquad \dot{B}(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{\dot{\lambda}_1(z)}{\delta} & \dfrac{\dot{\lambda}_2(z)}{\delta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда система (3.1) примет вид:

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{u}} \\ \dot{\tilde{v}} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = B^{-1}(z)(A_0B(z) - \dot{B}(z))\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ z \end{pmatrix} + B^{-1}(z)(\tilde{u}+\tilde{v})\begin{pmatrix} 0 \\ -\beta z \\ \alpha\Big(\dfrac{\lambda_1(z)+\sigma}{\delta}\tilde{u} + \dfrac{\lambda_2(z)+\sigma}{\delta}\tilde{v}\Big) \end{pmatrix}.$$

Если величины $\lambda_1(z),\ \lambda_2(z)$ являются корнями уравнения:

$$\lambda^2(z) - (\mu-\sigma)\lambda(z) - (\mu\sigma + \delta(\mu - \beta z)) = 0,$$

$$\lambda_1(z) = \frac{\mu-\sigma}{2} - \sqrt{\frac{(\mu+\sigma)^2}{4} + \delta(\mu-\beta z)} < 0, \quad \lambda_2(z) = \frac{\mu-\sigma}{2} + \sqrt{\frac{(\mu+\sigma)^2}{4} + \delta(\mu-\beta z)} > 0.$$

После подстановки и преобразований получим:

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{u}} \\ \dot{\tilde{v}} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1(z) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2(z) & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{\beta\delta(\tilde{u}-\tilde{v})\dot{z}}{(\lambda_2(z)-\lambda_1(z))^2} \\ -\dfrac{\beta\delta(\tilde{u}-\tilde{v})\dot{z}}{(\lambda_2(z)-\lambda_1(z))^2} \\ \dfrac{\alpha\sigma}{\delta}(\tilde{u}+\tilde{v})^2 + \dfrac{\alpha}{\delta}(\tilde{u}+\tilde{v})(\lambda_1(z)\tilde{u}+\lambda_2(z)\tilde{v}) \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

Многообразие V^u можно найти в явном виде из системы (4.3). Положим в (4.3) $\dot{z}=0$, $\dot{\tilde{u}}=0$, тогда векторное поле на V^u совпадает с направлением $\tilde{v}$.
Отсюда найдем, что:

$$\tilde{u}=0, \ \tilde{v} = \pm\sqrt{\frac{\gamma\delta z}{\alpha(\sigma+\lambda_2(z))}}. \tag{4.4}$$

Так как:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} u \\ v \\ z \end{pmatrix} = B(z) \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ z \end{pmatrix},$$

то:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ z \end{pmatrix} = B^{-1}B(z) \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_2-\lambda_1(z) & \lambda_2-\lambda_2(z) & 0 \\ \lambda_1(z)-\lambda_1 & \lambda_2(z)-\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ z \end{pmatrix}.$$

С другой стороны:

$$\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ z \end{pmatrix} = B^{-1}(z)B \begin{pmatrix} u \\ v \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda_2(z)-\lambda_1(z)} \begin{pmatrix} \lambda_2(z)-\lambda_1 & \lambda_2-\lambda_2(z) & 0 \\ \lambda_1-\lambda_1(z) & \lambda_2-\lambda_1(z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ z \end{pmatrix}.$$

Точке $(0,\, \tilde{v}(z),\, z)$ пространства $(\tilde{u},\, \tilde{v},\, z)$ соответствует точка $(u(z),\, v(z),\, z)$ пространства $(u,\, v,\, z)$, лежащая на V^u точки $O_0(0,\, 0,\, 0)$:

$$u(z) = \frac{\lambda_2-\lambda_2(z)}{\lambda_2-\lambda_1}\tilde{v}(z), \quad v(z) = \frac{\lambda_2(z)-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\tilde{v}(z). \tag{4.5}$$

Кривая (4.5) является касательной к оси v, так как при $z \to 0$:

$$\frac{v(z)}{u(z)} = \frac{\lambda_2(z)-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_2(z)} = \frac{\sqrt{(\sigma+\mu)^2+4\delta(\mu-\beta z)} + \sqrt{(\sigma+\mu)^2+4\delta\mu}}{\sqrt{(\sigma+\mu)^2+4\mu\delta} - \sqrt{(\sigma+\mu)^2+4\delta(\mu-\beta z)}} \to \infty,$$

На этой кривой $\dot{z}=0$, и она является многообразием V^u или кривой $z = z_g(u(z),\, v(z))$. Отображение $z = f_1(z_0)$ первого возвращения на плоскость $\tilde{u}(t) = 0$ можно найти из уравнения:

$$\tilde{u}(t) = \frac{\lambda_2(z)-\lambda_1}{\lambda_2(z)-\lambda_1(z)}u(t) + \frac{\lambda_2(z)-\lambda_2}{\lambda_2(z)-\lambda_1(z)}v(t) = 0. \tag{4.6}$$

5. Поиск гомоклинических траекторий седло-узла.

Найдем две гомоклинические траектории седло-узла $O_0(0,\ 0,\ 0)$ (гомоклиническую бабочку), разрушение которых является важнейшей бифуркацией гомоклинического каскада. Аналогично [3], применим к исходной системе (1.2) преобразование $w = -\sigma x + \delta y$. Получим систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = w, \\ \dot{w} = (\mu - \sigma)w + (\mu(\delta + \sigma) - \beta\delta z)x, \\ \dot{z} = \alpha\sigma x^2/\delta + \alpha w x/\delta - \gamma z. \end{cases} \tag{5.1}$$

Далее, заменой $w = ux$ приводим систему к виду:

$$\begin{cases} \dot{x} = xu, \\ \dot{u} = -(u^2 + (\sigma - \mu)u - \mu(\delta + \sigma)) - \beta\delta z, \\ \dot{z} = \alpha x^2(\sigma + u)/\delta - \gamma z. \end{cases} \tag{5.2}$$

И, наконец, после последней замены $x^2 = v$ получим систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2vu, \\ \dot{u} = -(u - u_1)(u - u_2) - \beta\delta z, \\ \dot{z} = \alpha v(\sigma + u)/\delta - \gamma z, \end{cases} \tag{5.3}$$

где u_1 и u_2 — корни уравнения $u^2 + (\sigma - \mu)u - \mu(\delta + \sigma) = 0$:

$$u_{1,2} = \frac{\mu - \sigma \pm \sqrt{(\sigma + \mu)^2 + 4\delta\mu}}{2}, \tag{5.4}$$

совпадают с корнями характеристического уравнения (2.5) в окрестности точки $O_0(0,\ 0,\ 0)$. Далее, переходим к системе двух уравнений, исключая время:

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{du} = \dfrac{2vu}{-(u - u_1)(u - u_2) - \beta\delta z}, \\ \dfrac{dz}{du} = \dfrac{\alpha v(\sigma + u)/\delta - \gamma z}{-(u - u_1)(u - u_2) - \beta\delta z}. \end{cases} \tag{5.5}$$

Вычисляя пределы правых частей последней системы при $u \to u_2$, с использованием разложений в ряд Тейлора числителя и в знаменателя в окрестности точки $u = u_2$, найдём, что в точке $P(u_2,\ 0,\ 0)$

$$v'(u_2) = \frac{2v'(u_2)u_2}{u_1 - u_2 - \beta\delta z'(u_2)}, \quad z'(u_2) = \frac{\alpha v'(u_2)(u_2 + \sigma)/\delta - \gamma z}{u_1 - u_2 - \beta\delta z'(u_2)}.$$

Из первого уравнения при $v'(u_2) \neq 0$ получаем, что

$$u_1 - u_2 - \beta\delta z'(u_2) = 2u_2,$$

и, следовательно,

$$z'(u_2) = \frac{u_1 - 3u_2}{\beta\delta}, \quad v'(u_2) = \frac{\delta(2u_2 + \gamma)z'(u_2)}{\alpha(u_2 + \sigma)} = \frac{(2u_2 + \gamma)(u_1 - 3u_2)}{\alpha\beta(u_2 + \sigma)}.$$

Для произвольного малого числа $\varepsilon > 0$ численно решаем систему (5.5) в прямом времени с начальными условиями

$$u(0) = u_2 - \varepsilon, \quad v(0) = -v'(u_2)\varepsilon, \quad z(0) = -z'(u_2)\varepsilon. \tag{5.6}$$

А теперь вычислим пределы при $u \to u_1$, используя разложения в ряд Тейлора в окрестности точки $u = u_1$, и получим в точке $P_1(u_1,\ 0,\ 0)$

$$v'(u_1) = \frac{2v'(u_1)u_1}{u_2 - u_1 - \beta\delta z'(u_1)}, \quad z'(u_1) = \frac{\alpha v'(u_1)(u_1+\sigma)/\delta - \gamma z'(u_1)}{u_2 - u_1 - \beta\delta z'(u_1)}.$$

В точке $P_1(u_1,\ 0,\ 0)$ $v'(u_1) = 0$, поэтому $u_2 - u_1 - \beta\delta z'(u_1) = -\gamma$, и, следовательно,

$$z'(u_1) = \frac{u_2 - u_1 + \gamma}{\beta\delta}.$$

Аналогично, численно решим в обратном времени систему (5.5) с начальными условиями

$$u(0) = u_1 + \varepsilon, \quad v(0) = (k\varepsilon)^{-2u_1/\gamma}, \quad z(0) = z'(u_1)\varepsilon. \tag{5.7}$$

Если при численном интегрировании системы (5.5) с фиксированными параметрами и начальными условиями: $v(u_2 - \varepsilon) = -v'(u_2)\varepsilon$, $z(u_2 - \varepsilon) = -z'(u_2)\varepsilon$ значения $v(0+)$ и $z(0+)$ отличаются от значений $v(0-)$ и $z(0-)$ решений системы с начальными условиями $v(u_1 + \varepsilon) = (k\varepsilon)^{-2u_1/\gamma}$, $z(u_1 + \varepsilon) = z'(u_1)\varepsilon$ на величины порядка $O(\varepsilon)$ для любого достаточно малого ε и подобранной константы $k \in (0,\ 1)$, то существование гомоклинической траектории седло-узла $O_0(0,\ 0,\ 0)$ системы (1.2) доказано.
Расчеты проводились в системе Maple 12 методом Рунге-Кутты 7-8 порядка.
Показано, что для $\varepsilon = 10^{-5}$ и $k = 0.694209$ условия существования гомоклинической траектории удовлетворяются при параметрах системы:

$$\alpha = 4, \quad \beta = 8, \quad \gamma = 2.3345, \quad \delta = 1, \quad \mu = 2.1, \quad \sigma = 4.1.$$

Следовательно, гомоклиническая бабочка седло-узла $O_0(0,\ 0,\ 0)$ существует.

6. Поиск гомоклинических траекторий седло-фокуса.

Найдем гомоклинические траектории седло-фокусов O_1 и O_2, разрушение которых является главной бифуркацией гомоклинического каскада.
Применим к исходной системе (1.2) преобразование $w = -\sigma x + \delta y$:

$$\begin{cases} \dot{x} = w, \\ \dot{w} = (\mu - \sigma)w + (\mu(\delta+\sigma) - \beta\delta z)x, \\ \dot{z} = \alpha\sigma x^2/\delta + \alpha w x/\delta - \gamma z. \end{cases} \tag{6.1}$$

Особые точки в координатах $(x,\ w,\ z)$ имеют вид:

$$O_0(0,\ 0,\ 0), \quad O_{1,2}\left(\pm\sqrt{\frac{\gamma\mu(\delta+\sigma)}{\alpha\beta\sigma}},\ 0,\ \frac{\mu(\delta+\sigma)}{\beta\delta}\right). \tag{6.2}$$

Найдем якобиеву матрицу системы (6.1):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \mu(\delta+\sigma) - \beta\delta z & \mu - \sigma & -\beta\delta x \\ \dfrac{2\alpha\sigma x}{\delta} + \dfrac{\alpha w}{\delta} & \dfrac{\alpha x}{\delta} & -\gamma \end{pmatrix}. \tag{6.3}$$

В точке O_1 получим матрицу линеаризации системы:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mu - \sigma & -\delta\sqrt{\dfrac{\beta\gamma\mu(\delta+\sigma)}{\alpha\sigma}} \\ \dfrac{2}{\delta}\sqrt{\dfrac{\alpha\gamma\mu\sigma(\delta+\sigma)}{\beta}} & \dfrac{1}{\delta}\sqrt{\dfrac{\alpha\gamma\mu(\delta+\sigma)}{\beta\sigma}} & -\gamma \end{pmatrix} \tag{6.4}$$

и характеристическое уравнение:

$$\det(A_1 - \lambda E) = -(\lambda^3 + (\gamma - \mu + \sigma)\lambda^2 + \gamma\Big(\sigma + \frac{\delta\mu}{\sigma}\Big)\lambda + 2\gamma\mu(\sigma+\delta)) = 0$$

имеет два комплексно-сопряженных корня $\lambda_{1,2} = a \pm ib$ с положительной действительной частью $a > 0$ и действительный отрицательный корень λ_3.
Приведем матрицу линейной части системы к каноническому виду:

$$B = \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \tag{6.5}$$

Вычислим матрицу перехода C из условия $B = C^{-1}A_1C$ или $CB = A_1C$.

$$\begin{pmatrix} x \\ w \\ z \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{w} \end{pmatrix}.$$

Выберем начальные условия в виде:

$$\hat{u}_0 = \varepsilon\cos\varphi, \quad \hat{v}_0 = \varepsilon\sin\varphi, \quad \hat{w}_0 = 0.$$

Решая систему (6.1) в прямом времени, получим траекторию сколь угодно близкую к сепаратрисе, выходящей из седло-фокуса O_1. Решая систему (6.1) в обратном времени, получим траекторию сколь угодно близкую к сепаратрисе, входящей в седло-фокус O_1. Сшивку осуществляем при $w = 0$.

Список литературы

1. Магницкий Н.А., Сидоров С.В. Новые методы хаотической динамики. - М.: УРСС, 2004. - 320 с.

2. Шаповалов В.И., Каблов В.Ф., Башмаков В.А., Авакумов В.Е. Синергетическая модель устойчивости средней фирмы. В книге «Синергетика и проблемы теории управления», ред. Колесников А.А. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. - С.454-464.

3. Калошин Д.А. О построении бифуркационнной поверхности гомоклинической бабочки в системе Лоренца//Дифференциальные уравнения, 2003.- Т.39.- №11.- С.1564-1565.

4. Литовченко В.А. Исследование перехода к хаосу и стабилизация детерминированных экономических систем. Дипломная работа. - МАИ, 2010.- 95 с.

Homoclinic cascade of bifurcations in the system of Lorenz's type.

© T. A. Gurina[1], I. A. Dorofeev[2]

Abstract. In system of the differential equations of the Lorenz's type, being model of stability of the average firm, it is found full double homoclinic cascade of the bifurcations, leading to formation of the strange attractor.

Key Words: Lorenz system, bifurcation, critical point, limit cycle, homoclinic contour, homoclinic cascade of bifurcations, strange attractor, transition to a dynamical chaos.

References

1. Magnitskii N.A, Sidorow S.V. New methods of the Chaotic Dynamics. M.: URSS, 2004.- 320 p.

2. Shapovalov V.I., Kablov V.F., Bashmakov V.A., Avakumov V.E. Sinergetic model of the stability of the average firm. In the book «Sinergy and problems of the control theory», editor Kolesnikov A.A.- M.: PHISMATLIT, 2004.- C.454-464.

3. Kaloshin D.A. About construction of the bifurcational surface of the homoclinic butterfly in the Lorenz system//Differential equations, 2003.-V.39.- №11.- P.1564-1565.

4. Litovchenko V.A. Research of the transition to a dynamical chaos and stabilization deterministic chaos of the economic systems. Graduate work. - MAI, 2010.- 95 p.

[1]Docent of Probability Theory Chair, Moscow Aviation Institute (State University of Aerospace Technologies), Moscow; gurina_mai@mail.ru

[2]Assistant of Probability Theory Chair, Moscow Aviation Institute (State University of Aerospace Technologies); softcat@mail.ru