

УДК 517.9

Параметризация поверхностей методом продолжения решения по параметру

© Е. Б. Кузнецов¹, П. А. Филатов²

Аннотация. В работе рассмотрены теоретические аспекты метода продолжения решения по параметру. Особое внимание уделено применению этого метода в задачах параметрического приближения поверхностей сплайнами. Приведены результаты численных исследований, которые подтверждают необходимые и достаточные условия выбора наилучших параметров при параметризации поверхностей.

Ключевые слова: параметризация, наилучший параметр, главные кривизны, интерполяция, кубический сплайн.

1. Введение

При исследовании проблемы проектирования поверхностей, которая важное значение имеет в авиации и космонавтике при создании и эксплуатации аэрокосмической техники, возникает необходимость в параметрической аппроксимации этих поверхностей. Пусть гладкая поверхность S в пространстве \mathbb{R}^3 задана уравнением

$$F(x, y, z) = 0. \quad (1.1)$$

Требуется построить ее параметрическое представление вида

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v). \quad (1.2)$$

В равенствах (1.2) параметры u , v могут быть выбраны различными способами, но именно они определяют успех параметризации. При неудачном выборе параметров на приближаемой поверхности могут появиться осциляции и петли [1]. Поэтому можно поставить вопрос о выборе, в некотором смысле, наилучшей параметризации поверхности (1.1). Этот вопрос может быть решен, если параметризацию поверхности рассматривать с позиции метода продолжения решения по параметру [2]. Тогда наилучшие параметры в каждой точке поверхности должны лежать в касательной плоскости, построенной к поверхности в данной точке, и быть длинами дуг, вычисляемых вдоль двух ортогональных направлений [3]. Причем эти направления должны совпадать с главными кривизнами поверхности [4].

2. Параметризация поверхностей

Параметризация (1.2) поверхности, заданной уравнением (1.1), может быть получена при помощи метода продолжения решения по параметру. Для этого введем некоторые параметры u и v такие, что переменные x , y , z являются дифференцируемыми функциями этих параметров. Представим дифференциалы параметров в виде

$$du = \alpha_1 dx + \alpha_2 dy + \alpha_3 dz, \quad dv = \beta_1 dx + \beta_2 dy + \beta_3 dz. \quad (2.1)$$

¹Профессор Московского авиационного института, г. Москва; kuznetsov@mai.ru.

²Аспирант Московского авиационного института, г. Москва.

Здесь векторы $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T$ и $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T$ задают направления, вдоль которых отсчитываются параметры u и v . Для того чтобы направления были равноправны, векторы α и β должны быть одинаковой длины. Пусть они будут единичными, тогда их компоненты должны удовлетворять равенствам

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1, \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1. \quad (2.2)$$

Векторы α и β не должны быть коллинеарными, в противном случае оси системы координат (u, v) будут параллельны, а параметры u, v - линейнозависимыми.

Если наряду с равенствами (2.1) запишем выражение для дифференциала уравнения (1.1), получим систему уравнений продолжения решения

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} du \\ dv \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

где $F_x = \partial F / \partial x, F_y = \partial F / \partial y, F_z = \partial F / \partial z$.

Для того чтобы осуществить процесс продолжения решения, необходимо разрешить эту систему относительно дифференциалов dx, dy, dz . Процесс разрешения системы (2.3) относительно дифференциалов будет тем эффективнее, чем лучше обусловлена матрица этой системы.

Мера обусловленности системы уравнений продолжения (2.3) может быть представлена в виде

$$|D| = |\Delta|/d, \quad (2.4)$$

где $d = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$ - произведение квадратичных норм строк матрицы системы (2.3) с учетом равенств (2.2), а Δ - определитель системы (2.3).

Имеет место теорема [5], определяющая условия наилучшей обусловленности системы (2.3).

Теорема 2.1. *Для того чтобы система линейных уравнений продолжения решения (2.3) была наилучшим образом обусловлена, необходимо и достаточно, чтобы в любой точке гладкой поверхности множества решений нелинейного уравнения (1.1) параметры продолжения решения u и v выбирались в касательной плоскости к этой поверхности и являлись длинами дуг, вычисляемых вдоль двух ортогональных направлений.*

Доказательство. Необходимость. Исследуем на экстремум величину $D = \Delta/d$ как функцию компонент векторов α и β при условиях (2.2). Из равенства (2.4) следует, что экстремумы функции D и определителя Δ системы (2.3) будут достигаться одновременно. Таким образом, задача сводится к исследованию на экстремум функции $\Delta(\alpha, \beta)$ при условиях (2.2).

Составим функцию Лагранжа

$$L = \Delta + \gamma_1 \left(1 - \sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 \right) + \gamma_2 \left(1 - \sum_{i=1}^3 \beta_i^2 \right). \quad (2.5)$$

Здесь γ_1, γ_2 - множители Лагранжа.

Разложив определитель матрицы системы (2.3) по элементам 1-й и 2-й строки, получим выражения

$$\Delta = \sum_{i=1}^3 \alpha_i A_{1i} = \sum_{i=1}^3 \beta_i A_{2i}, \quad (2.6)$$

где A_{1i} - алгебраическое дополнение, соответствующее элементу α_i , A_{2i} - алгебраическое дополнение, соответствующее элементу β_i , $i = 1, 2, 3$.

Необходимым условием экстремума функции Лагранжа является равенство нулю частных производных:

$$\partial L / \partial \alpha_i = A_{1i} - 2\gamma_1 \alpha_i = 0, \quad \partial L / \partial \beta_i = A_{2i} - 2\gamma_2 \beta_i = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.7)$$

Из равенств (2.7) и (2.2) получим выражения для компонент векторов α и β :

$$\alpha_i = \pm \frac{A_{1i}}{(A_{11}^2 + A_{12}^2 + A_{13}^2)^{1/2}}, \quad \beta_i = \pm \frac{A_{2i}}{(A_{21}^2 + A_{22}^2 + A_{23}^2)^{1/2}}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.8)$$

доставляющих экстремум функции Лагранжа (2.5).

Если выражения (2.8) подставить в равенства (2.6), то получим, что определитель системы должен удовлетворять равенствам

$$\Delta = \pm (A_{11}^2 + A_{12}^2 + A_{13}^2)^{1/2} = \pm (A_{21}^2 + A_{22}^2 + A_{23}^2)^{1/2} \quad (2.9)$$

и экстремум функции Лагранжа достигается при значениях

$$\alpha_i = \frac{A_{1i}}{\Delta}, \quad \beta_i = \frac{A_{2i}}{\Delta}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.10)$$

Достаточные условия экстремума подтверждают, что выражения (2.10) доставляют функции Лагранжа (2.5) максимум. Установим расположение по отношению к поверхности S векторов α и β , компоненты которых удовлетворяют равенствам (2.10).

Вычислим скалярные произведения (\mathbf{N}, α) и (\mathbf{N}, β) , где $\mathbf{N} = (F_x, F_y, F_z)$ - вектор нормали к поверхности в произвольной точке (x, y, z) :

$$\begin{aligned} F_x \alpha_1 + F_y \alpha_2 + F_z \alpha_3 &= \pm \frac{F_x A_{11} + F_y A_{12} + F_z A_{13}}{\Delta}, \\ F_x \beta_1 + F_y \beta_2 + F_z \beta_3 &= \pm \frac{F_x A_{21} + F_y A_{22} + F_z A_{23}}{\Delta}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Суммы в числителях дробей правых частей равенств (2.11) представляют собой суммы произведений элементов 3-й строки на алгебраические дополнения элементов 1-й и 2-й строк. В силу свойства определителей, все такие суммы равны нулю. Следовательно, векторы α и β ортогональны вектору нормали $\mathbf{N} = (F_x, F_y, F_z)$ к поверхности S , т.е. лежат в плоскости, касательной к этой поверхности.

Докажем ортогональность векторов α и β . Скалярное произведение этих векторов

$$\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 = \pm \frac{A_{11} \beta_1 + A_{12} \beta_2 + A_{13} \beta_3}{\Delta} \quad (2.12)$$

равно нулю, так как числитель дроби правой части равенства (2.12) равен нулю в силу свойства определителей. Следовательно, векторы α и β , определяющие в каждой точке поверхности направление линий наилучших параметров $v = \text{const}$ и $u = \text{const}$, проходящих через эту точку, ортогональны.

Докажем теперь, что наилучшие параметры u и v являются длинами дуг параметрических линий $v = \text{const}$ и $u = \text{const}$ соответственно.

При $v = \text{const}$ дифференциал параметра v равен нулю и система уравнений продолжения решения (2.3) принимает вид

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} du \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Разделив все уравнения системы (2.13) на du , получим систему линейных уравнений относительно производных $x_u = dx/du, y_u = dy/du, z_u = dz/du$:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Решение системы (2.14), полученное по правилу Крамера, может быть записано в виде

$$x_u = \frac{A_{11}}{\Delta}, \quad y_u = \frac{A_{12}}{\Delta}, \quad z_u = \frac{A_{13}}{\Delta}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.15)$$

Выражения для производных x_u, y_u, z_u из (2.15) совпадают с выражениями для компонент вектора α из (2.10), доставляющих наилучшую обусловленность системе уравнений продолжения (2.3). Т.е. при $v = \text{const}$ выполняются равенства

$$\alpha_1 = x_u, \quad \alpha_2 = y_u, \quad \alpha_3 = z_u. \quad (2.16)$$

Подставляя значения (2.16) в первое из выражений (2.1) и умножая полученное равенство на du , получаем соотношение

$$(du)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2. \quad (2.17)$$

Т.е. параметр u является длиной дуги кривой $v = \text{const}$.

Аналогично можно показать, что при $u = \text{const}$ выполняются равенства

$$\beta_1 = x_v, \quad \beta_2 = y_v, \quad \beta_3 = z_v \quad (2.18)$$

и дифференциал параметра v удовлетворяет соотношению

$$(dv)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2. \quad (2.19)$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Выберем в качестве параметров u и v длины дуг ортогональных параметрическим линиям $v = \text{const}$ и $u = \text{const}$.

Векторы $\mathbf{r}_u = (x_u, y_u, z_u)^T$ и $\mathbf{r}_v = (x_v, y_v, z_v)^T$ являются касательными к параметрическим линиям $v = \text{const}$ и $u = \text{const}$. Смысл единичных векторов α и β состоит в том, что они определяют направление отсчета параметров, поэтому они тоже должны быть касательными к кривым $v = \text{const}$ и $u = \text{const}$. Следовательно, вектор α коллинеарен вектору \mathbf{r}_u , а вектор β коллинеарен вектору \mathbf{r}_v .

Дифференциалы выбранных параметров удовлетворяют равенствам (2.17), (2.19). Разделив равенство (2.17) на $(du)^2$, а равенство (2.19) - на $(dv)^2$, получим соотношения $x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 = r_u^2 = 1$, $x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 = r_v^2 = 1$. Т.е. векторы \mathbf{r}_u и \mathbf{r}_v , так же как и векторы α и β , являются единичными. Из равенств векторов $\alpha = \mathbf{r}_u$ и $\beta = \mathbf{r}_v$ следуют равенства их компонент (2.16), (2.18). Кроме того, из условий $\alpha^2 = \mathbf{r}_u^2 = 1$, $\beta^2 = \mathbf{r}_v^2 = 1$ с учетом (2.16), (2.18) можно записать равенства

$$\alpha \mathbf{r}_u^T = 1, \quad \beta \mathbf{r}_v^T = 1. \quad (2.20)$$

По условию теоремы, параметры отсчитываются в ортогональных направлениях, поэтому вектор α ортогонален вектору β , а значит, и вектор \mathbf{r}_u ортогонален вектору β , а вектор \mathbf{r}_v ортогонален вектору α .

Поскольку \mathbf{r}_u и \mathbf{r}_v лежат в плоскости, касательной к поверхности S , они ортогональны вектору нормали $\mathbf{N} = (F_x, F_y, F_z)$ к этой поверхности.

Из первого соотношения (2.20) и из условий равенства нулю скалярных произведений (\mathbf{r}_u, β) и $(\mathbf{r}_u, \mathbf{N})$ можно составить систему уравнений (2.14), решением которой являются выражения (2.15). Из выражений (2.15) и равенств компонент (2.16) вытекают выражения (2.10) для компонент вектора α , доставляющих наилучшую обусловленность системе уравнений продолжения решения (2.3).

Аналогично, исходя из второго соотношения (2.20) и из условий равенства нулю скалярных произведений (\mathbf{r}_v, α) и $(\mathbf{r}_v, \mathbf{N})$, можно доказать, что при выбранном параметре v компоненты вектора β доставляют наилучшую обусловленность системе уравнений продолжения решения (2.3).

Доказательство закончено.

3. Параметрическая интерполяция поверхностей

В прикладных исследованиях поверхность обычно задается не уравнением (1.1), а набором точек

$$(x_i, y_i, z_i), \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

по которым необходимо восстановить эту поверхность. Такой аналог дискретно-точечного задания поверхности называется каркасным. В области $\Omega : [a, b] \times [c, d]$ вещественных переменных u и v рассматривается параметрическая сетка

$$\Delta : a = u_1 < u_2 < \dots < u_N = b; c = v_1 < v_2 < \dots < v_M = d. \quad (3.2)$$

Совокупность координатных линий на поверхности, прообразами которых являются линии сетки (3.2), образует каркас поверхности. Куски поверхности, на которые ее разбивает каркас, называются клетками, а точки взаимопересечений каркасных линий - узловыми точками или узлами каркаса.

В инженерной геометрии одним из методов восстановления поверхности по узловым точкам является ее интерполяция по этим точкам. Под кусочно-непрерывной интерполяцией поверхности понимается приближение ее некоторой параметризацией, задаваемой вектор-функцией $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$. Для построения частей приближающей составной поверхности необходимо сначала построить ее каркас, состоящий из координатных линий, которые задаются вектор-функциями $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_i, v)$, $i = 1, \dots, N$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v_j)$, $j = 1, \dots, M$. При этом выбор узловых значений параметров u_i и v_j и выбор расположения координатных линий неоднозначны. Одна и та же поверхность может иметь разные параметрические представления, от которых и будет зависеть точность ее приближения.

Поскольку поверхность задается в дискретно-точечной форме значениями \mathbf{r}_{ij} , $i = 1, \dots, N$; $j = 1, \dots, M$, то ее параметризацию можно получить в виде вектора-сплайна двух переменных, определенного в области $\Omega : [a, b] \times [c, d]$ вещественных переменных u и v , который определяется следующим образом:

$$\mathbf{W}(u, v) = X(u, v)\mathbf{e}_1 + Y(u, v)\mathbf{e}_2 + Z(u, v)\mathbf{e}_3, \quad (3.3)$$

где $X(u, v)$, $Y(u, v)$, $Z(u, v)$ - кубические сплайн-функции, заданные на параметрической сетке $\Delta = \Delta_u \times \Delta_v$, $\Delta_u : a = u_1 < u_2 < \dots < u_N = b$, $\Delta_v : c = v_1 < v_2 < \dots < v_M = d$; $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ - орты декартовых координатных осей.

Решение может быть продолжено, если заданным точкам (3.1) поставить в соответствие значения u_i, v_j из области Ω . Для этого воспользуемся хордовой параметризацией

[5], при которой в качестве параметра выбирается длина ломаной, соединяющей узловые точки. Доказано, что такая хордовая параметризация близка к наилучшей.

Сначала необходимо определить начальную точку, координаты которой будут соответствовать нулевым значениям параметров u и v . Затем надо выбрать две каркасные линии с номерами i^* и j^* из разных семейств, которые будут пересекаться в начальной точке. Принимая в качестве параметров u и v текущую длину вписанной ломаной с вершинами в заданных точках, для этих линий можно подсчитать приращения параметров Δu и Δv . В результате получим параметрическую сетку $\Delta = \Delta_u \times \Delta_v$, для которой $\mathbf{r}(u_i, v_j) = \mathbf{r}_{ij}$.

Теперь параметрическое приближение поверхности сводится к задаче интерполяции этой поверхности вектором-сплайном, принимающим в узлах сетки (3.2) заданные значения

$$\mathbf{W}(u_i, v_j) = \mathbf{r}_{ij}, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M, \quad (3.4)$$

причем элементы этого вектора-сплайна представляют из себя кубические параметрические сплайны. При этом задача интерполяции поверхности кубическими сплайнами может быть сведена к задаче параметрического приближения этой поверхности эрмитовыми кубическими сплайнами, если частные производные по параметрам в узловых точках заменить на их конечно-разностные аналоги, которые определяются из условий непрерывности старших производных, а именно: на линиях $u = u_2$ и $u = u_{N-1}$ непрерывны все производные до порядка $D^{3,2}\mathbf{W}(u, v)$, а на линиях $v = v_2$ и $v = v_{M-1}$ - до порядка $D^{2,3}\mathbf{W}(u, v)$. Кроме того, в областях $[u_r, u_{r+2}] \times [v_k, v_{k+2}]$, $r = 1, \dots, N - 2$, $k = 1, \dots, M - 2$ непрерывны все производные, включая $D^{3,3}\mathbf{W}(u, v)$.

Построение элементов вектора-сплайна $\mathbf{W}(u, v)$ рассмотрим на примере кубического сплайна $X(u, v)$, который в узлах сетки $\Delta = \Delta_u \times \Delta_v$ принимает заданные значения

$$X(u_i, v_j) = x_{i,j}, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M. \quad (3.5)$$

Сплайн $X(u, v)$, согласно [6], может быть представлен в виде

$$X(u, v) = \varphi^T(t) F_m \varphi(s), \quad (3.6)$$

где

$$\varphi^T(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), h_i \varphi_3(t), h_i \varphi_4(t)), \quad (3.7)$$

$$F_m = \begin{pmatrix} x_{i,j} & x_{i,j+1} & m_{i,j}^{(0,1)} & m_{i,j+1}^{(0,1)} \\ x_{i+1,j} & x_{i+1,j+1} & m_{i+1,j}^{(0,1)} & m_{i+1,j+1}^{(0,1)} \\ m_{i,j}^{(1,0)} & m_{i,j+1}^{(1,0)} & m_{i,j}^{(1,1)} & m_{i,j+1}^{(1,1)} \\ m_{i+1,j}^{(1,0)} & m_{i+1,j+1}^{(1,0)} & m_{i+1,j}^{(1,1)} & m_{i+1,j+1}^{(1,1)} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

$$\varphi(s) = \begin{pmatrix} \varphi_1(s) \\ \varphi_2(s) \\ l_j \varphi_3(s) \\ l_j \varphi_4(s) \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Здесь введены обозначения $h_i = u_{i+1} - u_i$, $l_j = v_{j+1} - v_j$, $t = \frac{u-u_i}{h_i}$, $s = \frac{v-v_j}{h_j}$, $\varphi_1(t) = (1-t)^2(1+2t)$, $\varphi_2(t) = t^2(3-2t)$, $\varphi_3(t) = t(1-t)^2$, $\varphi_4(t) = -t^2(1-t)$, $\varphi_1(s) = (1-s)^2(1+2s)$, $\varphi_2(s) = s^2(3-2s)$, $\varphi_3(s) = s(1-s)^2$, $\varphi_4(s) = -s^2(1-s)$,

$m_{i,j}^{(0,1)}$ - частная производная сплайна $X(u, v)$ по переменной v , $m_{i,j}^{(1,0)}$ - частная производная сплайна $X(u, v)$ по переменной u , $m_{i,j}^{(1,1)}$ - смешанная производная сплайна $X(u, v)$ по переменным u, v .

Теперь интерполяционная задача состоит в том, чтобы из уравнений (3.5) и условий непрерывности старших производных найти неизвестные величины $m_{i,j}^{(1,0)}$, $m_{i,j}^{(0,1)}$, $m_{i,j}^{(1,1)}$. Для этого применяется алгоритм, содержащий три шага построения сплайна $X(u, v)$, который основан на том, что при фиксированном значении одной из переменных, например $v = v_j$, сплайн $X(u, v)$ и его частные производные по v являются кубическими сплайнами от переменной u .

Шаг 1. Построение кубических сплайнов $X(u, v_j)$ от переменной u вдоль координатных линий $v = v_j$, $j = 1, \dots, M$. На этом шаге решается M одномерных задач. В результате будут найдены величины $m_{i,j}^{(1,0)} = D^{1,0}X(u_i, v_j)$, $(u_i, v_j) \in \Delta$.

Шаг 2. Построение кубических сплайнов $X(u_i, v)$ от переменной v вдоль координатных линий $u = u_i$, $i = 1, \dots, N$. В результате будут найдены величины $m_{i,j}^{(0,1)} = D^{0,1}X(u_i, v_j)$, $(u_i, v_j) \in \Delta$. Причем на этом шаге решается уже N одномерных задач.

Шаг 3. Построение кубических сплайнов $\tilde{X}(u_i, v)$ от переменной v , но в качестве начальных данных необходимо принять значения частных производных в узловых точках по переменной u , которые были найдены на первом шаге данного алгоритма. Значения производных сплайнов $D^{0,1}\tilde{X}(u_i, v)$ в узлах параметрической сетки Δ представляют собой смешанные производные искомого сплайна на сетке Δ , т.е. $m_{i,j}^{(1,1)} = D^{1,1}X(u_i, v_j)$. Число решаемых одномерных задач такое же как на втором шаге и равно N .

Таким образом, построение двумерного сплайна сводится к решению $2N + M$ одномерных задач, которые представляют из себя решение следующей системы уравнений (для случая построения сплайна от переменной u):

$$\begin{cases} (1 + \gamma_1)m_{2,j} + \gamma_1 m_{3,j} = \tilde{x}'_{2,j} + 2\gamma_1 x[u_2, u_3], \\ \lambda_i m_{i-1,j} + 2m_{i,j} + \mu_i m_{i+1,j} = 3\tilde{x}'_{i,j}, \quad i = 3, \dots, N-2, \\ \gamma_N m_{N-2,j} + (1 + \gamma_N)m_{N-1,j} = \tilde{x}'_{N-1,j} + 2\gamma_N x[u_{N-2}, u_{N-1}]. \end{cases} \quad (3.10)$$

Здесь введены обозначения $j = j^*$, $\gamma_1 = \frac{h_1}{h_2}$, $\gamma_N = \frac{h_{N-1}}{h_{N-2}}$, $\lambda_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i-1}}$, $\mu_i = 1 - \lambda_i$, $x[u_i, u_{i+1}] = \frac{x(u_{i+1}, v_j) - x(u_i, v_j)}{u_{j+1} - u_j}$ - разделенные разности, $\tilde{x}'_{i,j} = \lambda_i x[u_{i-1}, u_i] + \mu_i x[u_i, u_{i+1}]$ - формула конечно-разностной аппроксимации производной по трем точкам.

Система (3.10) определяет $m_{2,j}$, $m_{3,j}$, ..., $m_{N-1,j}$, а $m_{1,j}$, $m_{N,j}$ находят из соотношений

$$m_{1,j} + (1 - \gamma_1^2)m_{2,j} - \gamma_1^2 m_{3,j} = 2(x[u_1, u_2] - \gamma_1^2 x[u_2, u_3]), \quad (3.11)$$

$$-\gamma_N^2 m_{N-2,j} + (1 - \gamma_N^2)m_{N-1,j} + m_{N,j} = 2(x[u_{N-1}, u_N] - \gamma_N^2 x[u_{N-2}, u_{N-1}]). \quad (3.12)$$

Общий вид системы уравнений (3.10) $Az = g$. Матрица такой системы - ленточная с диагональным преобладанием, т.е., если a_{ij} - элемент i -ой строки j -го столбца, то

$$r_i = |a_{ii}| - \sum_{i \neq j} |a_{ij}| > 0 \quad (3.13)$$

для всех i . В связи с этим система вида (3.10) решается методом прогонки. Определители матриц с диагональным преобладанием отличны от нуля, и системы имеют решения, притом единственные. Это значит, что интерполяционный кубический сплайн, удовлетворяющий условию (3.5) и условиям непрерывности своих старших производных, существует и единственен.

Рассмотрим примеры параметрического приближения поверхностей кубическими сплайнами.

Пример 3.1. *Круговой цилиндр, диаметр которого равен его высоте, задан в дискретно-точечной форме ($x^2 + y^2 = 1, z \in [0; 2]$). Для цилиндрической поверхности главными кривизнами являются окружность с максимальным значением кривизны, равной $1/R$ (R - радиус цилиндра), и образующая с нулевым значением кривизны. Интерполяция производится по 40 точкам, причем неоднозначный выбор узловых точек позволяет изменять расположение координатных осей каркаса поверхности.*

Рассматриваются пять случаев расположения координатных осей:

- ортогональные оси направлены по главным кривизнам;
- ортогональные оси направлены под углом в 30° к главным кривизнам;
- ортогональные оси направлены под углом в 45° к главным кривизнам;
- одна из осей направлена вдоль главной кривизны, другая - под углом в 30° ;
- одна из осей направлена вдоль главной кривизны, другая - под углом в 45° ;

Во всех случаях по одной из координатной оси берется 5 узлов интерполяции, по другой - 9, причем первый и последний узлы совпадают.

О точности приближения поверхности позволяет судить ошибка интерполяции, вычисляемая в метрике Хаусдорфа и определяемая как максимальное расстояние между множеством точек полученной параметрическим приближением поверхности и множеством точек исходной поверхности, заданной алгебраическим уравнением. Под хаусдорфовым расстоянием между двумя точечными ограниченными множествами E и F понимается величина

$$\Delta = r(E, F) = \max \left[\max_{P \in E} \min_{Q \in F} \rho(P, Q), \max_{P \in F} \min_{Q \in E} \rho(P, Q) \right] \quad (3.14)$$

где $\rho(P, Q)$ - евклидово расстояние между точками P и Q .

На рис.3.1 изображен каркас цилиндрической поверхности в случае, когда координатные оси направлены вдоль главных кривизн. На рисунке выделены точки по которым производилась интерполяция, а стрелками показаны направления параметризации поверхности. Ошибка интерполяции составила $\Delta = 0.011$.

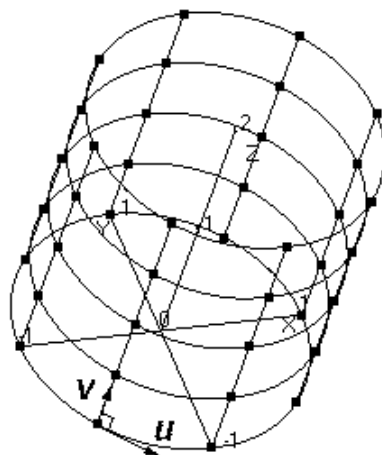
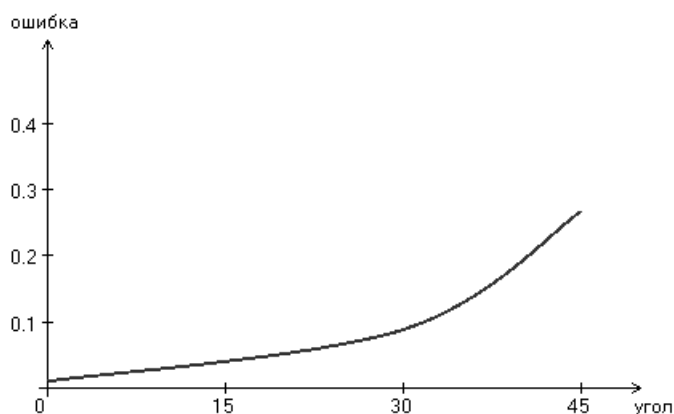


Рисунок 3.1

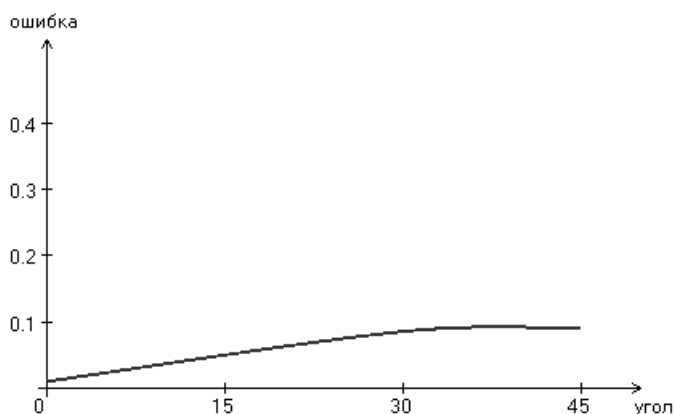
Для случаев, когда оси направлены под углами в 30° и 45° к главным кривизнам ошибка существенно возрастает и принимает значения $\Delta = 0.089$ и $\Delta = 0.267$ соответственно. При этом координатные линии каркаса поверхности представляют из себя уже не окружности и прямые, а эллипсы и спирали.

На рис.3.2 построен график зависимости угла поворота координатных осей относительно главных направлений цилиндрической поверхности от ошибки интерполяции. На графике видно, что чем ближе к главным кривизнам расположены координатные линии, тем точнее приближение цилиндра.



Р и с у н о к 3.2

Теперь рассмотрим поведение погрешности параметрического приближения для случаев, когда координатные оси не являются ортогональными. В данной ситуации исследуется поворот только одной координатной линии, а именно образующей цилиндра. При повороте на угол в 30° ошибка интерполяции составила $\Delta = 0.086$, а на угол в 45° - $\Delta = 0.09$.



Р и с у н о к 3.3

График, изображенный на рис.3.3, показывает, что при увеличении угла отклонения координатной линии от образующей цилиндра ошибка интерполяции увеличивается, а своего минимума она достигает при взаимноортогональном расположении координатных линий, которое совпадает с направлениями вдоль главных кривизн.

Пример 3.2. Задан однополостный круговой гиперболоид в дискретно-точечной форме ($x^2 + y^2 - z^2 = 1, z \in [-0.5; 0.5]$). Окружности переменного радиуса и образующие в виде гиперболы являются главными кривизнами такой поверхности.

Так же как и в примере 3.1. интерполяция проводится по 40 точкам, при этом рассматривается только два случая расположения координатных осей:

- ортогональные оси направлены по главным кривизнам;
- ортогональные оси направлены не по главным кривизнам.

В обоих случаях по одной координатной оси берется 5 узлов интерполяции, по другой - 9 узлов, причем во втором случае от главного направления отклоняется только образующая и, за счет кривизны гиперболической поверхности, угол отклонения лежит в диапазоне от 65° до 71° .

Оценка близости множеств точек полученных параметрическим приближением гиперboloида к множеству точек исходной поверхности, заданной алгебраическим уравнением, также рассчитывается в метрике Хаусдорфа.

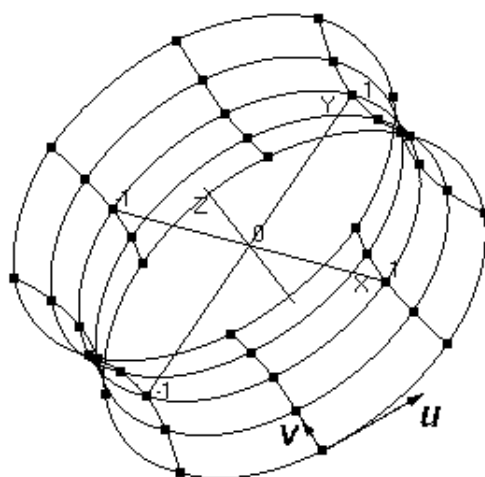


Рисунок 3.4

На рис.3.4 изображен каркас однополостного гиперboloида в результате наилучшей параметризации, направленной по главным кривизнам поверхности. В этом случае ошибка интерполяции составила $\Delta = 0.03$. Во втором случае при нарушении условий ортогональности и направленности по главным направлениям координатных осей ошибка увеличилась более чем в два раза и ее значение составило $\Delta = 0.078$.

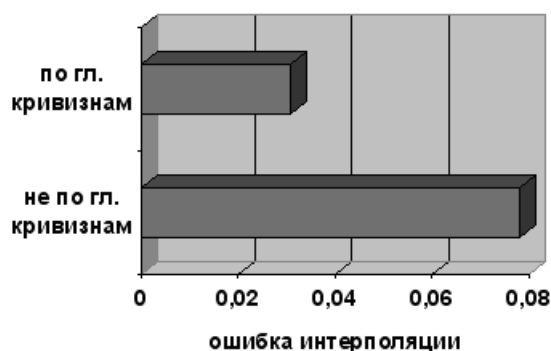


Рисунок 3.5

Диаграмма на рис.3.5 показывает разницу в точности приближения однополостного гиперboloида, которая говорит о том, что погрешность интерполяции поверхности минимальна при соблюдении всех условий наилучшей параметризации этой поверхности.

4. Выводы

Найденные условия наилучшей параметризации поверхности, полученные при помощи метода продолжения решения по параметру, показывают, что параметризация, при которой параметры выбираются в касательной плоскости к этой поверхности и являются длинами дуг, вычисляемых вдоль двух ортогональных направлений совпадающими с главными кривизнами поверхности, является наилучшей. Причем в задачах интерполяции поверхностей в качестве параметров используется длина ломаной, соединяющей узловые точки. В результате имеется параметризация, близкая к наилучшей. На примере кругового цилиндра и однополостного гиперboloида подтверждены необходимые и достаточные условия наилучшей параметризации.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №10-08-00013) и целевой программы Министерства образования и науки РФ (шифр проекта 2.1.1/5267).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фокс А., Пратт М. Вычислительная геометрия. – М.:Мир, 1982.
2. Шалапилин В.И., Кузнецов Е.Б. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация. – М.:Эдиториал УРСС, 1999.
3. Кузнецов Е.Б. О наилучшей параметризации // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2008. – Т. 48, № 12. – С. 2129-2140.
4. Кузнецов Е.Б. Многомерная параметризация // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2010. – Т. 50, № 2. – С. 155-167.
5. Кузнецов Е.Б., Якимович А.Ю. Наилучшая параметризация в задачах приближения кривых и поверхностей // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2005. – Т. 45, № 5. – С. 760-774.
6. Завьялов Ю.С., Леус В.А., Скорospelов В.А. Сплайны в инженерной геометрии. – М.:Машиностроение, 1985.

Parametrization of surfaces by a method of continuation of solution on parameter

© E. B. Kuznetsov³, P. A. Filatov⁴

Abstract. In work theoretical aspects are considered of a method of continuation of solution on parameter. The special attention is given application of this method in tasks of parametrical approach of surfaces splines. The shown results of computational investigation confirm requisite and sufficient conditions to get the best parameters for surfaces parametrization.

Key Words: parametrization, best parameter, main curvatures, interpolation, cubic spline.

REFERENCES

1. Faux A., Pratt M. Computational geometry. – M.:Mir, 1982.
2. Shalashilin V.I., Kuznetsov E.B. Method of continuation of solution on parametre and the best parametrization. – M.:Editorial URSS, 1999.
3. Kuznetsov E.B. On the best parametrization. // Computational Mathematics and Mathematical Physics – 2008. – V. 48, № 12. – P. 2129-2140.
4. Kuznetsov E.B. Multidimensional parametrization. // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2010. – V. 50, № 2. – P. 155-167.
5. Kuznetsov E.B., Yakimovich A.Yu. The best parametrization in problems of approach of curves and surfaces. // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2005. – V. 45, № 5. – P. 760-774.
6. Zavyalov Yu.S., Leus V.A., Skorospelov V.A. Splines in engineering geometry. – M.: Mashinostroenie, 1985.

³Professor of the Moscow Aviation Institute, Moscow city; kuznetsov@mai.ru

⁴The post-graduate student of the Moscow Aviation Institute, Moscow city.