УДК 517.9

Об одном классе интегро–алгебраических уравнений с переменными пределами интегрирования

© **М. В. Булатов[1],М. Н. Мачхина[2]**

Аннотация. В работе приведены достаточные условия существования единственного непрерывного решения системы интегро–алгебраических уравнений с переменными пределами интегрирования.

Ключевые слова: интегро-алгебраические уравнения, переменные пределы интегрирования.

1. Введение

В данной статье рассмотрены интегро-алгебраические уравнения с переменными пределами интегрирования. Такие задачи возникают при описании математических моделей электроэнергетических установок [3]. Приведены достаточные условия существования единственного непрерывного решения для данного класса задач.

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему интегральных уравнений

$$A(t)x(t) + \int\limits_{t-c}^{t} K(t,s)x(s)ds = f(t), t \in [0,T], s \in [0,t], \tag{2.1}$$

где $A(t)$ и $K(t,s)-$ $(n \times n)-$матрицы, $f(t)-n-$мерная вектор–функция, $c-$ известная положительная постоянная величина. Для данной задачи задано начальное значение

$$x(t) = x^0(t), \quad t \in [-c, 0). \tag{2.2}$$

Предполагается, что элементы матриц $A(t), K(t,s)$ и $f(t)$ обладают необходимой степенью гладкости и

$$\det A(t) \equiv 0. \tag{2.3}$$

Под решением рассматриваемой задачи будем понимать непрерывную вектор–функцию $x(t)$ обращающую уравнение (2.1) в тождество.

Задачи (2.1), (2.2) при выполнении условия (2.3) будем называть интегро-алгебраическими уравнениями с переменными пределами интегрирования. К настоящему времени известны немногие результаты относящиеся к качественной теории и численным методам решения интегро-алгебраических уравнений с постоянным нижним пределом интегрирования. Обзор по этой теме можно найти в [1], [2]. В данной работе сформулированы достаточные условия существования единственного непрерывного решения поставленной задачи.

[1]Главный научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления СО РАН, г. Иркутск; mvbul@icc.ru

[2]Магистрант, Восточно–Сибирская государственная академия образования, г. Иркутск; masha888888@mail.ru

3. Теорема существования и единственности

К настоящему времени авторами не обнаружено каких–либо результатов по исследованию, а тем более по численному решению представленной в статье задачи. Однако в монографии [3] были приведены примеры таких уравнений и показана прикладная значимость задач такого рода. Перед формулировкой основного результата, приведем одно определение

Определение 3.1. [4] *Матрица, обозначаемая как A^-, называется полуобратной к матрице A, если она является решением уравнения*

$$AA^-A = A.$$

Это уравнение перепишем в виде

$$WA = 0, \;\; W = E - AA^-.$$

Теорема 3.1. *Пусть для исходной задачи элементы $A(t), K(t,s), f(t)$ являются непрерывно дифференцируемыми функциями и выполнены условия:*

1) $rank A(0) = rank \left(A(0)|f(0) - \int\limits_{-c}^{0} K(0,s)x^0(s)ds \right);$
$rank A(t) = k = const \quad \forall t \in [0,T],$

2) $\det(\lambda A(t) + K(t,t)) = \lambda^k a_0(t) + \lambda^{k-1}a_1(t) + ... + a_k(t),$
$a_0(t) \neq 0 \quad \forall t \in [0,T];$

3) $Wf'(0) = W\left[K(0,0)x^0(0) - K(0,-c)x^0(-c) + A'(0)x^0(0)\right] + W\int\limits_{-c}^{0} K'_t(0,s)x^0(s)ds;$

4) $A(0)x^0(-0) = f(0) - \int\limits_{-c}^{0} K(0,s)x^0(s)ds.$

Тогда существует единственное непрерывное решение задачи (2.1), (2.2).

Прокомментируем условия теоремы. Первое условие можно интерпретировать как теорему Кронекера–Капелли, которая является условием разрешимости исходной системы (2.1) в начальной точке. Второе условие теоремы говорит о том, что на отрезке интегрирования отсутствуют сингулярные точки, т.е. точки в которых решения не существует, или через которые проходит множество решений, а третье условие гарантирует непрерывность решения поставленной задачи.

В заключительном параграфе приведем некоторые примеры, иллюстрирующие данную теорему.

4. Иллюстративные примеры

Пример 4.1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + \int\limits_{t-1}^{t} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(s) \\ v(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1]$$

$$u(t) = u^0(t) = 0, \quad v(t) = v^0(t) = 0 \quad t \in [-1,0).$$

Из первого уравнения системы получаем, что

$$u(t) = -v(t).$$

Из второго уравнения систеы, учитывая стартовые значения неизвестных функций, получаем

$$\int\limits_0^t v(s)ds = e^t.$$

Это уравнение неразрешимо в классе непрерывных функций.

Проверим выполнение условий теоремы. Очевидно, что первое условие теоремы нарушено,так как

$$rank A(0) = 1,$$

а ранг расширенной матрицы

$$rank\left(A(0)|f(0) - \int\limits_{-1}^{0} K(0,s)x^0(s)ds\right) = rank\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

равен двум.

Таким образом, ранг матрицы $A(t)$ в начальной точке не равен рангу расширенной матрицы в той же точке.

П р и м е р 4.2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + \int\limits_{t-1}^{t}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & t-s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(s) \\ v(s) \end{pmatrix}ds = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1]$$

$$u(t) = u^0(t) = 0, \quad v(t) = v^0(t) = 0 \quad t \in [-1, 0).$$

Учитывая стартовые значения неизвестных функций, из первого уравнения системы получаем

$$u(t) + \int\limits_0^t v(s)ds = 0,$$

а второе уравнение данной системы сведется к уравнению

$$\int\limits_0^t [u(s) + (t-s)v(s)]ds = 0,$$

эквивалентному первому уравнению. В этом можно убедиться продифференцировав последнее уравнеение по переменной t. Данная система имеет множество решений.

$$u(t) = -\frac{Ct^{k+1}}{k+1}, \quad v(t) = Ct^k \quad k \geq 0, \quad \forall C, \quad t \in [0,1].$$

Входные данные этого примера удовлетворяют первому условию теоремы. Проверяем второе условие

$$rank A(t) = 1 = const,$$

$$\det(\lambda A(t) + K(t,t)) = -1$$
$$\deg(-1) = 0 = const.$$

Видим, что второе условие теоремы нарушенно, так как, ранг матрицы $A(t)$ и степень определителя пучка матриц $\lambda A(t)+K(t,t)$ являются постаянными величинами, но они не совпадают.

Пример 4.3.

$$\begin{pmatrix} \frac{t}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + \int\limits_{t-1}^{t} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(s) \\ v(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1]$$

$$u(t) = u^0(t) = 0, \quad v(t) = v^0(t) = 0 \quad t \in [-1,0).$$

Перейдем к системе вида

$$\begin{cases} \frac{t}{2}u(t) - \int\limits_0^t u(s)ds = 0 \\ \int\limits_0^t v(s)ds = 0 \end{cases}$$

Из второго уравнения сразу имеем $v(t) = 0$, а решением первого уравнения является класс функций $u(t) = Ct$, где C — любое число. Таким образом данная система имеет множество решений

$$u(t) = Ct, \quad v(t) = 0, \quad t \in [0,1].$$

В этом примере входные данные удовлетворяют первому условию теоремы, но второе условие нарушено, так как

$$rankA(t) = \begin{cases} 0 & ,t = 0 \\ 1 & ,t \neq 0. \end{cases}$$

Пример 4.4.

$$\begin{pmatrix} t & 1-t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + \int\limits_{t-1}^{t} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(s) \\ v(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1]$$

$$u(t) = u^0(t) = 0, \quad v(t) = v^0(t) = 0 \quad t \in [-1,0).$$

Первое условие теоремы выполнено, но второе нарушено, так как

$$rankA(t) = 1 = const,$$

но степень характеристического многочлена пучка матриц $\lambda A(t)+K(t,t)$ непостоянна. В самом деле

$$\det(\lambda A(t) + K(t,t)) = \lambda(2t-1) - 3,$$
$$\deg\det\left(\lambda(2t-1) - 3\right) = \begin{cases} 0 & ,t = \frac{1}{2} \\ 1 & ,t \neq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Таким образом, точка $t = \frac{1}{2}$ является сингулярной и, как нетрудно убедиться, через нее проходит множество решений

$$u(t) = \begin{cases} 0 & ,t \in [0, \frac{1}{2}] \\ C\sqrt{2t-1} & ,t \in (\frac{1}{2}, 1], \end{cases} \quad v(t) = \begin{cases} 0 & ,t \in [0, \frac{1}{2}] \\ -C\sqrt{2t-1} & ,t \in (\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

где C — любое число.

П р и м е р 4.5.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + \int\limits_{t-1}^{t} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(s) \\ v(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in [1,3]$$

$$u(t) = u^0(t) = 1 \quad v(t) = v^0(t) = 1 \quad t \in [0,1).$$

Для данного примера выполнены первое и второе условия теоремы, но нарушенно третье условие. Действительно, взяв в качестве W матрицу

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

должны получить равенство

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

которое несправедливо.

Итак, третье условие теоремы не выполняется. Найдем решение данной задачи. Для этого от исходной системы перейдем к системе вида

$$\begin{cases} u(t) = v(t) \\ \int\limits_{t-1}^{1} v^0(s)ds + \int\limits_{1}^{t} v(s)ds = t. \end{cases}$$

Воспользовавшись методом шагов [5], *получим*

$$\int\limits_{1}^{t} v^1(s)ds = t - \int\limits_{t-1}^{1} v^0(s)ds = 2t - 2 \Rightarrow v^1(t) = 2 \quad t \in [1,2).$$

Проводя аналогичные рассуждения, получим разрывное решение вида

$$u(t) = v(t) = \begin{cases} 2 & , t \in [1,2) \\ 3 & , t \in [2,3) \\ 4 & , t = 3. \end{cases}$$

Работа была поддержана грантом РФФИ 10-01-00571а.

Список литературы

1. Булатов М.В. Методы решения дифференциально-алгебраических и вырожденных интегральных систем.— Дисс. ... докт. физ.—мат. наук, Иркутск, 2002, 244 с.

2. Чистяков В.Ф. Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром.— Новосибирск: Наука. —1996, 278 с.

3. Апарцин А.С. Некласические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы. — Новосибирск: Наука. Сибирская издательская фирма РАН. — 1999, 193 с.

4. Ваарман О. Обобшенные обратные отображения.—Таллинн: Валгус.—1988, 120 с.

5. Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. —М.-Л.: Гостехиздат.—1951, 255 с.

On one class of integral-algebraic equations with variable limits of integration

© M. V. Bulatov[3],M. N. Machkhina[4]

Abstract. In the paper sufficient conditions of existence of unique continuous solutions for the system of integro-differential equations with variable integration limits are given.
Key Words: integral-algebraic equations, variable integration limits.

References

1. Bulatov M. V. Methods of Solution of Differential-Algebraic and Singular Integral Equations.–Dr.Sc. Thesis, Irkutsk, 2002, pp.244.

2. Chistykov V.F. Algebro-Differential Operators With Finite-Dimensional Core. Novosibirsk: Nayka. — 1996, 278 p.

3. Apartsyn A.S. Nonclassical Equation of Volterra of the first kind: Theory and Numerical Methods.— Novosibirsk: Nauka. Sibirskaja Izdatel'skaja Firma RAN.—1999, 193 p.

4. Vaarmann O.Generalized Inverse Reflection.— Tallinn: Valgus.—1988, 120 p.

5. Myschkis A.D. Linear Differential Equations with Delay Argument. —M.-L.: Gostehizdat.—1951, 255 p.

[3]chif reseacher, ISDCT SB RAS, Irkutsk; mvbul@icc.ru.
[4]Ph.D. student, Irkutsk State Pedagogical Academy, Irkutsk; masha888888@mail.ru