УДК 519.71

Продолжимость решений систем с переменной структурой на многообразиях переключения

© **В. И. Сафонкин**[1]

Аннотация. В статье устанавливаются необходимые и достаточные условия, накладываемые на параметры системы с переменной структурой, гарантирующие переход решений из областей однозначности функций управления на поверхность переключения и их правая единственность.

Ключевые слова: доопределение, единственность, включение, переменная структура, модель.

1. Введение

Как известно, к классу систем управления с переменной структурой относятся системы регулирования, математическими моделями которых являются дифференциальные уравнения вида

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u(t, x)) \tag{1.1}$$

где $x \in R^n$, $f(t, x, u)$ - непрерывная по совокупности аргументов функция, управляющая функция $u(t, x), u \in \Re^m$ претерпевает разрыв первого рода на некоторой поверхности S в пространстве переменных $t, x_1, x_2, ..., x_n$, задаваемой уравнением $s(t, x_1, ..., x_n) = 0$ и представляющая собой множество M меры нуль, состоящее из точек границ областей $s(x) > 0$ и $s(x) < 0$. Таким образом, функция $f(t, x, u(t, x))$ является непрерывной вплоть до общей границы указанных областей.

Области $s(t, x) > 0$, $s(t, x) < 0$ будем называть областями однозначности. В них, соответственно, $u(t, x) = u^{(1)}(t, x)$ при $s(x) > 0$ и $u(t, x) = u^{(2)}(t, x)$ при $s(x) < 0$. Где функции $u^{(1)}(t, x)$ и $u^{(2)}(t, x) \in C([t_0, +\infty)) \times \Re^n$.

Введем обозначения: $u^+(t, x)$ и $u^-(t, x)$ - предельные значения функции $u(t, x)$ с обеих сторон поверхности S; $f^+(t, x, u)$ и $f^-(t, x, u)$ - значения функции $f(t, x, u)$ в предельных значениях функции $u(t, x)$; f_N^+ и f_N^- - проекции векторов $f^+(t, x, u)$ и $f^-(t, x.u)$ на нормаль к поверхности S в точке $x \in S$, направленную из области $S < 0$ в область $S > 0$.

В дальнейшем будем также предполагать, что как $f(t, x, u)$, так и $\partial f / \partial x_i$, $i = 1, 2, ..., n$ непрерывны в областях однозначности функции $f(t, x, u)$ вплоть до границы поверхности $s(x) = 0$.

О п р е д е л е н и е 1.1. *Решением уравнения* (1.1) *будем считать решение дифференциального включения*

[1]Доцент кафедры прикладной математикМордовский госуниверситет им. Н. П. Огарева, г. Саранск; appmath@svmo.ru.

$$\frac{dx}{dt} \in f(t, x, U(t, x)) \tag{1.2}$$

т.е. абсолютно непрерывную функцию $x(t)$, определенную на некотором отрезке значений t, для которой почти всюду на этом отрезке имеет место

$$\frac{dx(t)}{dt} \in f(t, x(t), U(t, x(t))). \tag{1.3}$$

Множество $U(t, x)$, а, следовательно, и множество $f(t, x, U(t, x))$ получены одним из методов доопределения уравнения (1.1) на множестве S (см. также [2]).

О п р е д е л е н и е 1.2. *Для уравнения* (1.1) *имеет место правая единственность в области* D, *если для* $\forall (t_0, x_0)$ *каждые два решения, удовлетворяющие условию* $x(t_0) = x_0$ *совпадают на каждом отрезке* $t_0 \le t \le t_1$ *в предположении, что они оба существуют и проходят в этой области.*

О п р е д е л е н и е 1.3. *Многозначную функцию* $F(p)$ *будем называть непрерывной в точке* p, *если* $\alpha(F(p'), F(p)) \to 0$ *при* $p' \to p$, *где* $\alpha(A, B) = \max(\sup \rho(a, B), \sup \rho(b, A)), a \in A, b \in B$, A *и* B - *множества.*

2. Постановка задачи

Для реальных физических систем с переменной структурой оказывается важным создание такого режима ее поведения, при котором траектория из областей однозначности функции $f(t, x, u)$ попадает на многообразие S, где изображающая точка остается на нем в течение некоторого промежутка времени. Решение таких задач обычно проводятся в два этапа: на первом показываются условия, при которых траектории из областей однозначности попадают в некоторую δ- окрестность многообразия S (S^δ); на втором – переход изображающей точки из δ - окрестности S^δ на само многообразие S и сохранение движения на нем при $t > t_0$.

В работе [5] на основе асимптотического подхода путем сравнения решений в областях однозначности и решений на многообразии $s(x) = 0$, определенных путем применения метода эквивалентного управления, получены необходимые и достаточные условия попадания траекторий из любой точки $(t_0, x_0) \in S$ в сколь угодно малую окрестность S^δ.

Здесь же ставится задача: определить необходимые условия, накладываемые на множество $F(t, x, u)$, а, следовательно, и функцию правой части уравнения (1.1), при выполнении которых оказывается выполненным второй этап. Очевидно, при этом должны быть выполнены условия существования решения на поверхности $s(x) = 0$ и его правая единственность.

3. Решение задачи

В дальнейшем: coA - наименьшее выпуклое множество, содержащее множество A ; S^δ - замкнутая δ - окрестность множества S ; $S^\delta \bigcup S$ - объединение множеств.

За область $D \in R^n$, где рассматривается решение уравнения (1.1), будем принимать объединение множеств S - множество меры нуль и множества S^δ.

Доопределяя уравнение (1.1) методом Филиппова (см. [3], оно приводится к дифференциальному включению вида

$$\frac{dx}{dt} = coF(t,x), \tag{3.1}$$

где $F(t,x) = f(t,x,U(t,x)$ - множество векторов правой части системы в точках разрыва $u(t,x)$ на поверхности S. В этой области $F(t,x)$ - замкнутое выпуклое множество, а в окрестности S^δ - есть точка. При линейном вхождении $u(t,x)$ в правую часть уравнения (1.1) $F(t,x)$ - есть отрезок, соединяющий точки $u^+(t,x)$ и $u^-(t,x)$.

Дополнив множество $U(t,x)$ точкой $u(t',x') \in S^\delta$ и приняв условие $dist((t',x'),S) \to 0$ при $x' \to x \in S$, уравнение (1.1) приводится к дифференциальному включению

$$\frac{dx}{dt} \in F_1(t,x), \tag{3.2}$$

где $F_1(t,x)$ - множество векторов правой части уравнения (1.1), полученное на множестве $u(t,x) \bigcup U(t,x)$.

Согласно сформулированной задачи и принятых ранее соглашений оказывается справедливым следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Если для любых двух точек p и p' множества $S \bigcup S^\delta$ области D имеет место*

$$\alpha(F_1(t,p'), F_1(t,p)) \leq l(t)\,|p'-p|\,, \tag{3.3}$$

где $l(t)$ - суммируемая функция, то для решений уравнения (1.1) при сделанных выше предположениях имеет место правая единственность в области D.

Доказательство. Поскольку функция $F_1(t,x)$ непрерывна по обеим переменным (это следует из свойств функции), то для любых двух точек $p' \in S^\delta$ и $p \in S$ условие (3.3) может быть переписано в виде

$$f(t,p',u(t,p')) - f(t,p,u(t,p)) \leq l(t)\,|p'-p|\,,$$

где $(t,p') \in S^\delta, (t,p) \in S, S^\delta \in D, S \in D.$(3.4)

Очевидно соотношение (3.4) остается справедливым и для включения ( ). Умножая неравенство (3.4) слева и справа на величину $|p'-p|$, оказываются выполненными условия теоремы 2 [3] о существовании не более одного решения уравнения (1.1), т.е. имеет место правая единственность решений, как в окрестности S^δ, так и на поверхности S.

Прежде, чем сформулировать следующее утверждение, сделаем предположение о том, что система (1.1) доопределяется методом эквивалентного управления [2], который приводит к уравнению $\nabla s(x) \cdot f(t, x, u_{eq}(t)) = 0$ ($\nabla s(x)-$ градиент функции $s(x)$), из которого и должна быть в последующем определена функция $u_{eq}(t, x)$, эквивалентная функции $u(t, x)$, указанной в уравнении (1.1). Сам метод доопределения читатель может найти в источниках [2],[4].

Теорема 3.2. *Если выполнены условия теоремы 3.1., а функция* $u_{eq}(t, x)$ *определена однозначно. Кроме того, один из векторов* f_N^- *или* f_N^+ *направлен в сторону множества* S, *а другой равен нулю, то решение уравнения* (1.1) *попав из области* D *с начальными условиями* $x(t_0) = x_0$ *на множество* S, *остается там для всех* $t > t_0$.

Доказательство. Будем рассматривать случай $f_N^- = 0$, $f_N^+ < 0$. При сделанном предположении с учетом свойств функции $F_1(t, x)$ в предположении $t_0 \to t,\ x_0 \to x,$ где $x \in S$, имеет место $u(t, x) \in [u^*(t, x), u^+(t, x)]$, здесь u^* - предельное значение функции $u(t, x)$, когда (t_0, x_0) принадлежит δ - окрестности множества S. Важно заметить то, что множество $F_1(t, x)$ при выше сделанных предположениях содержит одновременно векторы правых частей уравнений доопределенных как методом Филиппова [3], так и методом эквивалентного управления [2]. То есть $f_0(t, x) \in F_1$ и $f(t, x, u_{eq}(t, x)) \in F_1$.

Введем в рассмотрение функцию $f_s(t, x)$, определив ее значение равенством $f_s(t, x) = (f_{eq}(t, x) - f^+(t, x))/(u_{eq}(t, x) - u^+(t, x))$, которое вытекает из соотношения

$$f_s = \int_0^1 \frac{\partial f(t, x, u)}{\partial u} d\sigma, \tag{3.5}$$

где $u(t, x) \in [u_{eq}(t, x), f^+(t, x)]$, а функция $f_{eq}(t, x)$ - есть функция правой части уравнения (1.1) в точке $(t, x, u_{eq}(t, x))$.

Если предположить, что вектор $f_{eq}(t, x)$ расположен между векторами $f(t, x, u^*(t, x))$ и $f_0(t, x)$, этого всегда можно добиться, устремляя δ к нулю, то при $x_0 \to x \in S$ с учетом непрерывности функции $F_1(t, x, u(t, x))$ имеет место $|f^* - f_0| = r(t, x) \to 0$. Откуда следует, вектор $f_{eq}(t, x)$ будет стремиться к вектору $f_0(t, x)$, находящемуся на касательной плоскости к поверхности S. Последнее означает, что решение, пришедшее из области $S < 0$ или $S > 0$ на многообразии $s(x) = 0$ совпадают.

4. Выводы.

Приведенные утверждения показывают, что при наложенных условиях и сделанных предположениях в отношении параметров правой части системы (1.1) в ней может возникать режим перехода изображающей точки из достаточно малой окрестности многообразия переключения на это множество, на котором это движение сохраняется некоторое время. Как известно, на практике такие режимы имеют важное значение при синтезе скользящего режима на поверхности разрыва управляющей функции.

Список литературы

1. Емельянов С.В. Теория систем с переменной структурой. – М.: Наука,1970, - 592с.

2. Уткин В.И. Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 368с.

3. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М.: Наука, 1985. – 223с.

4. Пятницкий Е.С. Избранные труды (теория управления). Т.1. – М.: Физматлит, 2004. – 382с.

5. Сафонкин В.И. Асимптотика поведения решений систем с переменной структурой Труды Средневолжского математического общества. Саранск: Из-во СВМО, 2005. Т7, №1. – С. 251-256.

Continuability of solutions of variable structure systems on the switching manifolds

© В.И. Сафонкин[2]

Abstract. In the article necessary and sufficient conditions guaranteeing the transition of solutions from the regions of single-valuedness to the switching surface and their right uniqueness are established.
Key Words: доопределение, единственность, включение, переменная структура, модель

References

1. Emelynov S.V. Theory of systems with variable structure. – M.: Nauka, 1970, - 592 p.
2. Utkin V.I. Sliding modes in optimization and control problems. – M.: Nauka, 1981. – 368 p.
3. Filippov A.F. Differential equation with discontinuous riqht-hand side. – M.: Nauka, 1985. – 223 p.
4. Pyatnitsky E.S. Selected works (control theory). v.1. – M.: Fizmatlit, 2004. – 382 p.
5. Safonkin V.I. Asymptotic behavior of solutions to systems with variable structure Proc. of Middle-Volga Math. Soc. (Trudy Srednevolzhskogo Mathematitcheskogo Obshchestva), Saransk, v. 7, 1, p. 251-256, 2005.

[2]Associate professor of applied mathematics chair, Mordovian state university after N. P. Ogarev, Saransk; appmath@svmo.ru