УДК 517.9

Преобразования Ляпунова нелинейных периодических дифференциальных уравнений.

© Д. В. Пашуткин

Аннотация. Хорошо известно, что линейные периодические дифференциальные уравнения приводимы к линейному автономному уравнению с постоянной матрицей (теорема Флоке-Ляпунова). Рассматриваются нелинейные периодические дифференциальные уравнения и строится пример дифференциального уравнения, неприводимого к автономному уравнению в специальной группе нелинейных преобразований Ляпунова, содержащей линейные преобразования Ляпунова.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения,приводимость,преобразования Ляпунова.

1. Введение

Рассмотрим множество Ξ дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \tag{1.1}$$

где $f \in C^{(0,1)}([T,+\infty) \times R^n, R^n)$, решения задачи Коши $x(t : t_0, x_0)$ с начальными условиями (t_0, x_0) существуют при всех $t \in [T, +\infty)$.

На множестве Ξ рассмотрим группу преобразований LG_2 таких, что:

1) $\varphi \in C^{(1,2)}([T,+\infty) \times R^n, R^n)$, $\|\varphi(t,x)\| \le C\|x\|$, где C - постоянная, зависящая от φ;

2) φ^{-1} существует и принадлежит LG_2.

Такие преобразования играют ту же роль, что и линейные преобразования Ляпунова на множестве линейных дифференциальных уравнений [1].

Далее будем полагать, что f периодична по t, $f(t,x) \equiv f(t+\omega, x)$, $\omega > 0$.

Если $f(t,x) = A(t)x$, где $A(t)$ - непрерывная ω-периодическая матрица, то по теореме Флоке-Ляпунова уравнение (1.1) приводимо к линейному уравнению с постоянной матрицей при помощи линейного периодического по t преобразования $\varphi(t,x) = L(t)x$, $\varphi \in LG_2$.

Верно ли аналогичное утверждение для нелинейных уравнений: всегда ли существует преобразование $\varphi \in LG_2$, переводящее уравнение (1.1) в автономное уравнение? Оказывается, что для нелинейных уравнений, даже при естественном дополнительном ограничении на правую часть $\|f(t,x)\| \le C\|x\|$, это утверждение неверно.

2. Контрпример

Для построения контрпримера рассмотрим линейное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{t^2 \ln^2 t} \\ 1 & \frac{\ln t + 1}{t \ln t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, t \ge 2. \tag{2.1}$$

Вектор-функция

$$u(t,u_{01},u_{02}) = \left[\begin{array}{c} u_1(t,u_{01},u_{02}) \\ u_2(t,u_{01},u_{02}) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} \cos(\ln(\frac{\ln t}{\ln 4})) & -\frac{1}{4\ln 4}\sin(\ln(\frac{\ln t}{\ln 4})) \\ t\ln t\sin(\ln(\frac{\ln t}{\ln 4})) & \frac{t\ln t}{4\ln 4}\cos(\ln(\frac{\ln t}{\ln 4})) \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} u_{01} \\ u_{02} \end{array}\right]$$

является решением задачи Коши для (2.1) с начальными условиями $u(4,u_{01},u_{02}) = (u_{01},u_{02})^T$. Легко видеть, что для любого вектора $(u_{01},u_{02}) \neq (0,0)$ существует последовательность $t_k \to +\infty$, $k \to \infty$ такая, что $\|u(t_k,u_{01},u_{02})\| \geq Ct_k \ln t_k$.

Далее рассмотрим функцию $a : R \times R \times R \to R^2$

$$a(t,u_1,u_2) = \left[\begin{array}{c} a_1(t,u_1,u_2) \\ a_2(t,u_1,u_2) \end{array}\right] = \alpha(u_1) \left\{ \begin{array}{ll} \left[\begin{array}{cc} 0 & -\frac{1}{t^2\ln^2 t} \\ 1 & \frac{\ln t+1}{t\ln t} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \end{array}\right] & ,t \geq 2 \\ \left[\begin{array}{cc} 0 & -\frac{1}{2^2\ln^2 2} \\ 1 & \frac{\ln 2+1}{2\ln 2} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \end{array}\right] & ,t < 2 \end{array}\right. ,$$

функция $\alpha \in C^1(R,R)$ такая, что

$$\alpha(p) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & ,p \in [-1,1] \\ 0 & ,p \notin (-2,2) \end{array}\right.$$

При $u_{01}^2 + u_{02}^2 < 1$, $t \geq 4$ функция $u(t) = u(t,u_{01},u_{02})$ является решением уравнения

$$\frac{d}{dt}\left[\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \end{array}\right] = a(t,u_1,u_2), \tag{2.2}$$

так как при $u_{01}^2 + u_{02}^2 < 1$ значения функции $u(t,u_{01},u_{02})$ не покидают полосы $|u_1| < 1$, а на этой полосе правые части уравнений (2.2) и (2.1) при $t \geq 4$ совпадают.

Определим функцию $b : R\times R\times R \to R^2$ следующим образом: $b(t,u_1,u_2) = a(t+4n,u_1-4n,u_2)$ при $t \in R, u_1 \in [4n-2,4n+2], n \in Z, u_2 \in R$. А функцию $c : R \times R \times R \to R^2$ как $c(t,u_1,u2) = b(t,u_1-t,u_2)$. Функция c 4-периодична по t. Действительно, для любых t, u_1, u_2 выберем $n \in Z$ такое, что $u_1 - t \in [4n-2,4n+2]$. Тогда $u_1 - t - 4 \in [4(n-1)-2, 4(n-1)+2]$ и

$$c(t+4,u_1,u_2) = b(t+4,u_1-t-4,u_2) = a(t+4+4(n-1),u_1-t-4-4(n-1),x_2) =$$

$$= a(t+4n,u_1-t-4n,u_2) = b(t,u_1-t,u_2) = c(t,u_1,u_2).$$

Наконец определим функцию $d : R \times R \times R \to R^2$:

$$d(t,x_1,x_2) = \beta(x_1-1)c(t,x_1-4,x_2),$$

где $\beta \in C^1(R)$, причем

$$\beta(p) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & p \geq 1 \\ 0 & p \leq 0 \end{array}\right.$$

Очевидно, что d является 4-периодической по t, $d(t,0,0) = 0$, $\|d(t,x_1,x_2)\| \leq C\|(x_1,x_2)^T\|$, а уравнение

$$\frac{d}{dt}\left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array}\right] = d(t,x_1,x_2) \tag{2.3}$$

принадлежит множеству Ξ.

Так как $u(t) = u(t,u_{01},u_{02})$ является решением и для уравнения

$$\frac{d}{dt}\left[\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \end{array}\right] = b(t,u_1,u_2) \tag{2.4}$$

при $u_{01}^2 + u_{02}^2 < 1$, $t \geq 4$ (правые части (2.2) и (2.4) совпадают на полосе $|u_1| < 1$ при $t \geq 4$), то

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t, x_{01}, x_{02}) \\ x_2(t, x_{01}, x_{02}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(t, x_{01} - 8, x_{02}) + 4 + t \\ u_2(t, x_{01}, x_{02}) \end{bmatrix}$$

является решением уравнения (2.3) при $(x_{01} - 8)^2 + x_{02}^2 < 1$, $t \geq 4$.

Пусть уравнение (2.3) приводимо к автономному уравнению

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = h(y_1, y_2) \tag{2.5}$$

класса Ξ.

Согласно критерию приводимости [2], существует преобразование $\varphi \in LG_2$ такое, что функция $y(t, y_{01}, y_{02}) = \varphi(t, x(t, y_{01}, y_{02}))$ является решением уравнения (2.5) при $(y_{01} - 8)^2 + y_{02}^2 < 1$, $t \geq 4$. Откуда вытекает, что $tC_1 \leq \|y(t, 8, 0)\| \leq tC_2$, где $C_1, C_2 > 0$. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда $y(t + \varepsilon, y_{01}, y_{02})$ также решение уравнения (2.5). Если ε достаточно мало, то $y(t + \varepsilon, y_{01}, y_{02}) = y(t, \tilde{y}_{01}, \tilde{y}_{02})$, где $(\tilde{y}_{01} - 8)^2 + \tilde{y}_{02}^2 < 1$, $(\tilde{y}_{01}, \tilde{y}_{02}) \neq (8, 0)$. Существует последовательность $t_k \to +\infty$, $k \to \infty$ такая, что $\|x(t_k, \tilde{y}_{01}, \tilde{y}_{02})\| \geq Ct_k \ln t_k$. Откуда получаем цепочку неравеств:

$$C_3 t_k \ln t_k \leq \|\varphi(t_k, x(t, \tilde{y}_{01}, \tilde{y}_{02})\| = \|y(t_k + \varepsilon, \tilde{y}_{01}, \tilde{y}_{02})\| \leq C_4(t_k + \varepsilon).$$

Противоречие.

Список литературы

1. Воскресенский Е.В. Ляпуновские группы преобразований //Изв. вузов. Математика. – 1994. – N7. – C.13-19.

2. Воскресенский Е.В. О приводимости нелинейных дифференциальных уравнений // Изв. вузов. Математика. – 1998. – N9. – С. 33-37.

Liapunov transformations of nonlinear periodic differential eqautions.

© D. Pashutkin

Abstract. It's a well known fact that linear differential equations are reducible to linear autonomous deffintial equation with a constant matrix (Floquet-Liapunov theorem). We consider nonlinear periodic differential equation and construct the example of nonreducible differential equation to autonomous equation in the special Liapunov group of nonlinear transformations containing linear Liapunov transformations

Key Words: differential equations,reducibility,Liapunov trasformation.

References

1. Voskresensky E.V. Lyapounov transformation groups // Izv. vuzov. Mathematics. – 1994. – № 7. – P. 13-19.

2. Voskresensky E.V. On the reducibility of nonlinear differential equations // Izv. vuzov. Mathematics. – 1998. – № 9. – P. 33-37.