УДК 517.9

Динамика диффеоморфизмов поверхностей с конечным числом модулей топологической сопряженности

© **Т. М. Митрякова[1], О. В. Починка[2], А. Е. Шишенкова[3]**

Аннотация. В настоящей работе описывается динамика диффеоморфизмов, заданных на ориентируемых поверхностях и имеющих конечное число модулей топологической сопряженности.

Ключевые слова: топологическая сопряженность, модули топологической сопряженности, орбиты гетероклинического касания, одностороннее касание.

1. Класс Φ диффеоморфизмов с конечным числом модулей топологической сопряженности

Для определения рассматриваемого класса диффеоморфизмов дадим необходимые определения.

Пусть M^2 — гладкое двумерное замкнутое ориентируемое многообразие и $f: M^2 \to M^2$ — сохраняющий ориентацию диффеоморфизм.

Точка $x \in M^2$ называется *неблуждающей* для диффеоморфизма f, если для любой окрестности U_x точки x существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $f^n(U_x) \cap U_x \neq \emptyset$. В противном случае, точка называется *блуждающей*. Частным случаем неблуждающей точки является неподвижная точка. Точка $x \in M^2$ называется *неподвижной* точкой диффеоморфизма f, если $f(x) = x$.

Неподвижная точка диффеоморфизма f является *гиперболической*, если все ее собственные значения по модулю отличны от единицы. При этом, гиперболическая неподвижная точка называется *стоком (источником)*, если все ее собственные значения по модулю меньше (больше) единицы; *седлом* – если одно собственное значение μ_p по модулю больше, а другое λ_p по модулю меньше единицы. Гиперболическая неподвижная точка $p \in \Omega_f$ имеет *инвариантные многообразия*:

устойчивое многообразие $W^s_p = \{x \in M^2 : \lim\limits_{n\to+\infty} d(f^n(x), p) = 0\}$,

неустойчивое многообразие $W^u_p = \{x \in M^2 : \lim\limits_{n\to+\infty} d(f^{-n}(x), p) = 0\}$,

где d – метрика на M^2. При этом $\dim\ W^s_p$ ($\dim\ W^u_p$) совпадает с числом собственных значений точки p, по модулю меньших (больших) единицы, $W^s_p = g^s(\mathbb{R}^{\dim\ W^s_p})$ ($W^u_p = g^u(\mathbb{R}^{\dim\ W^u_p})$), где $g^s : \mathbb{R}^{\dim\ W^s_p} \to M^2$ ($g^u : \mathbb{R}^{\dim\ W^u_p} \to M^2$) – инъективная иммерсия, то есть инъективное C^r-отображение, ранг матрицы Якоби которого в каждой точке равен $\dim\ W^s_p$ ($\dim\ W^u_p$). Кроме того, касательные пространства $T_pW^s_p$ и $T_pW^u_p$ имеют дополнительные размерности и касательное пространство T_pM^2 к многообразию M^2 в точке p натягивается на касательные пространства к W^s_p и к W^u_p, то есть имеет место равенство $T_pW^s_p \oplus T_pW^u_p = T_pM^2$. Компонента связности мнжества $W^u_p \setminus p$ ($W^s_p \setminus p$) называется *сепаратрисой*. Будем обозначать ее через ℓ^u_p (ℓ^s_p). Для любого подмножества $P \subset \Omega_f$ будем обозначать через W^u_P (W^s_P) объединение неустойчивых (устойчивых) многообразий всех точек из множества P.

[1]Ассистент, ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород; tatiana.mitryakova@yandex.ru.
[2]Доцент, ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород; olga-pochinka@yandex.ru.
[3]Доцент, НГСХА, Нижний Новгород; math@agri.sci-nnov.ru.

Пусть p, q – гиперболические седловые периодические точки диффеоморфизма f такие, что пересечение $W^s_p \cap W^u_q$ непусто. Точка $x \in W^s_p \cap W^u_q$, отличная от p и от q называется *гетероклинической точкой* диффеоморфизма f, если $p \neq q$ и называется *гомоклинической точкой* диффеоморфизма f, если $p = q$. Орбита гетероклинической (гомоклинической) точки называется *гетероклинической (гомоклинической) орбитой*. Гетероклиническая (гомоклиническая) точка может быть точкой трансверсального или нетрансверсального пересечения в следующем смысле.

Два гладких подмногообразия N_1, N_2 многообразия M^2 пересекаются *трансверсально* в точке $x \in (N_1 \cap N_2)$, если $T_xN_1 + T_xN_2 = T_xM^2$. В противном случае, пересечение в точке x называется нетрансверсальным пересечением (касанием).

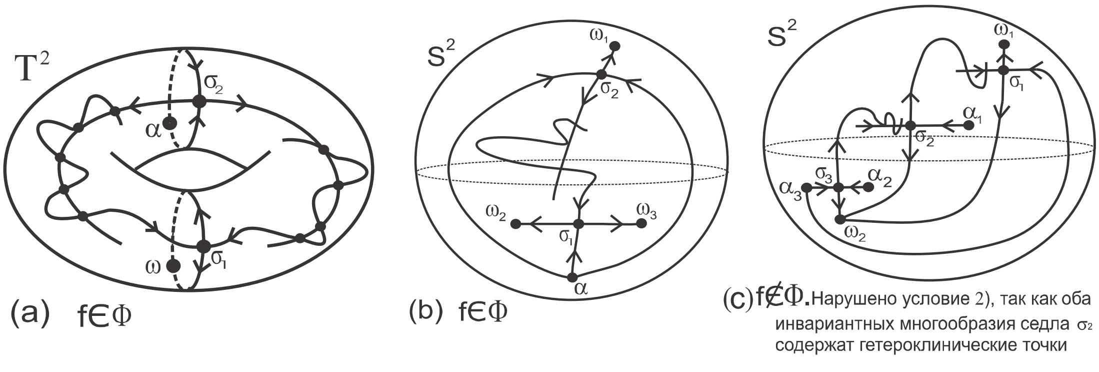
Точка касания x двух гладких одномерных подмногообразий N_1, N_2 многообразия M^2 называется точкой *одностороннего касания*, если существует окрестность V_x точки x такая, что N_2 пересекается не более, чем с одной компонентой связности множества $V_x \setminus N_1$.

В работе рассматривается класс Φ сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов $f \in Diff^r(M^2),\ r \geq 2$, заданных на гладком двумерном замкнутом ориентируемом многообразии M^2 и удовлетворяющих следующим условиям:

1) неблуждающее множество Ω_f состоит из конечного числа неподвижных гиперболических точек и собственные значения $\lambda_p,\ \mu_p$ любой седловой точки $p \in \Omega_f$ удовлетворяют условиям $0 < \lambda_p < 1 < \mu_p$;

2) если $(W^s_p \setminus p) \cap (W^u_q \setminus q) \neq \emptyset$ для седловых точек $p,\ q \in \Omega_f$, то $p \neq q$ и для любого седла $r \in \Omega_f$ (включая p и q) $(W^s_r \setminus r) \cap (W^u_p \setminus p) = \emptyset$ и $(W^s_q \setminus q) \cap (W^u_r \setminus r) = \emptyset$;

3) блуждающее множество f содержит конечное число орбит гетероклинического касания.



Р и с у н о к **1.1**

Примеры фазовых портретов диффеоморфизмов поверхностей

На рисунке 1.1 изображены примеры фазовых портретов диффеоморфизмов сферы $\mathbb{S}^2$ и тора $\mathbb{T}^2$. Диффеоморфизмы на рисунках 1.1 (a), 1.1 (b) принадлежат классу Φ, а на рисунке 1.1 (c) — не принадлежит классу Φ, поскольку нарушается условие 2). Согласно работам [3], [4], диффеоморфизмы класса Φ имеют конечное число модулей топологической сопряженности, то есть в некоторой окрестности диффеоморфизма f множество классов эквивалентности возможно описать с помощью конечного числа параметров (минимально возможное число таких параметров и называют *числом модулей топологической сопряженности (модальностью) диффеоморфизма* f).

Замечание 1.1. *Так как $f \in \Psi$ является C^2-диффеоморфизмом 2-многообразия M^2, то из теоремы Белицкого (см. [1] или [7], теорема 3.20) следует, что в некоторой окрестности неподвижной точки p диффеоморфизм f гладко сопряжен посредством C^1-диффеоморфизма своей линейной части.*

2. Динамика диффеоморфизмов класса Φ

Предложение 2.1. *Диффеоморфизм $f \in \Phi$ не имеет гомоклинических точек.*

Доказательство. Предположим противное: f имеет гомоклиническую точку x. По определению класса Φ, неблуждающее множество Ω_f состоит из конечного числа неподвижных гиперболических точек. По определению гомоклинической точки, x не является периодической точкой, в частности, она не является неподвижной точкой. С другой стороны, любая гомоклиническая точка является неблуждающей. Получили противоречие определению класса диффеоморфизмов Φ.
Доказательство закончено.

Предложение 2.2. *Пусть σ — гиперболическая седловая неподвижная точка диффеоморфизма $f : M^2 \to M^2$, $r \in (W^s_\sigma \backslash \sigma)$ и $U_r \subset W^s_\sigma$ — окрестность точки r. Тогда для любой последовательности точек $\{r_n\} \subset (M^2 \backslash U_r)$, сходящейся к точке r, существует подпоследовательность $\{r_{n_j}\}$, последовательность целых чисел $k_j \to +\infty$ и точка $q \in (W^u_\sigma \setminus \sigma)$ такие, что последовательность точек $\{f^{k_j}(r_{n_j})\}$ сходится к точке q.*

Доказательство. Пусть $a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — линейный диффеоморфизм, заданный формулой $a(x,y) = (2x, \frac{1}{2}y)$. Тогда начало координат O является неподвижной гиперболической седловой точкой с неустойчивым многообразием $W^u_O = Ox$ и устойчивым многообразием $W^s_O = Oy$ для диффеоморфизма a.

Согласно теореме 5.5 [5] существуют окрестности $V_\sigma \subset M^2$, $V_O \subset \mathbb{R}^2$ точек σ, O, соответственно, и гомеоморфизм $\psi : V_\sigma \to V_O$ такой, что $\psi(f(x)) = a(\psi(x))$ для любого $x \in (V_\sigma \cap f(V_\sigma))$. Не уменьшая общности можно считать, что $\{r_n\} \subset (V_\sigma \cap f(V_\sigma))$ и $\{(x,y) : (x^2+y^2) \leq 4\} \subset (V_O \cap a(V(O))$.

Положим $\psi(r_n) = ((r_n)_x, (r_n)_y)$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ существует единственное целое число m_n такое, что $1 \leq 4^{m_n}\left((r_n)^2_x + (r_n)^2_y\right) < 4$. Положим $q_n = a^{m_n}(r_n)$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = r \in (W^s_O \setminus \{O\})$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(r_n)_x = 0$ и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} m_n = +\infty$. Кроме того, последовательность $\{(r_n)_y\}$ ограничена и, следовательно, $(q_n)_y = \left(\frac{1}{2}\right)^{m_n}(r_n)_y \to 0$ при $n \to \infty$. Таким образом, координаты точек q_n удовлетворяют следующим условиям $1 \leq (q_n)_x < 4$ и $(q_n)_y \to 0$, то есть точки q_n лежат внутри некоторого компактного множества. Так как для любой последовательности, заданной на компакте, существует сходящаяся подпоследовательность, то существует подпоследовательность $\{m_{n_j}\}$ последовательности $\{m_n\}$ и точка $q \in (W^u_O \setminus O)$ такие, что $\lim\limits_{j\to\infty} q_{n_j} = q$. Положим $\{m_{n_j}\} = \{k_j\}$. Тогда $r_{n_j} = \psi^{-1}(a^{-k_j}(q_{n_j}))$ — искомая подпоследовательность.
Доказательство закончено.

Теорема 2.1. *Пусть $f \in \Phi$. Тогда:*
1) $M^2 = \bigcup\limits_{p\in\Omega_f} W^u_p \quad (*)$;

2) W^u_p является гладким подмногообразием многообразия M^2 для каждой точки $p\in\Omega_f$ и $f|_{W^u_p}$ сопряжено с сохраняющим ориентацию линейным растяжением;

3) если $x\in(cl(\ell^u_p)\setminus(\ell^u_p\cup p))$, то $x\in W^u_r$ для некоторой точки $r\in\Omega_f$ такой, что $\ell^u_p\cap W^s_r\neq\emptyset$ для любой точки $p\in\Omega_f$, в частности, если ℓ^u_p не имеет гетероклинических пересечений для седловой точки p, то $cl(\ell^u_p)\setminus(\ell^u_p\cup p)=\{\omega\}$, где ω — стоковая периодическая точка.

Доказательство.

1) Так как неблуждающее множество диффеоморфизма $f\in\Phi$ конечно и гиперболично, то соотношение (*) следует из теоремы 2.3 работы [6].

2) Пусть $p\in\Omega_f$. Докажем, что W^u_p является гладким подмногообразием многообразия M^2.

Если точка $p\in\Omega_f$ — источник, то $\dim W^u_p=\dim M^2=2$ и W^u_p — открыто. Следовательно, W^u_p — гладкое подмногообразие.

Если точка $p\in\Omega_f$ — сток, то $\dim W^u_p=0$. Следовательно, W^u_p — гладкое подмногообразие.

Пусть $p\in\Omega_f$ — седловая точка диффеоморфизма $f\in\Phi$. Покажем, что W^u_p является гладким подмногообразием M^2, диффеоморфным $\mathbb{R}^1$. Пусть $x\in W^u_p$ и $N_x\subset W^u_p$ — компактное множество, содержащее x. Тогда, существует карта $\psi:U_x\to\mathbb{R}^2$ многообразия M^2 такая, что $\psi(U_x\cap N_x)=\mathbb{R}^1$. Предположим противное: W^u_p не является гладким подмногообразием M^2. Тогда $(U_x\setminus N_x)\cap W^u_p\neq\emptyset$ для любой карты $\psi:U_x\to\mathbb{R}^2$ многообразия M^2 такой, что $\psi(U_x\cap N_x)=\mathbb{R}^1$. Следовательно, существует последовательность $\{x_n\}\subset(W^u_p\setminus N_x)$ такая, что $x_n\to x$ при $n\to+\infty$. Из предложения 2.2. следует, что существует подпоследовательность $\{x_{n_j}\}$, последовательность целых чисел $k_j\to+\infty$ и точка $y\in W^s_p$ такие, что последовательность точек $\{y_j=f^{-k_j}(x_{n_j})\}$ сходится к точке y. Так как $M^2=\bigcup\limits_{q\in\Omega_f}W^u_q$, то $y\in W^u_q$ для некоторой точки $q\in\Omega_f$. Рассмотрим три возможных случая: (a) q — источник, (b) q — сток, (c) q — седло.

(a) Если q — источник, то $y_j\in W^u_q$ для всех j, начиная с некоторого. Следовательно, $p=q$. Получили противоречие, откуда следует, что случай (a) невозможен.

(b) Если q — сток, то $W^u_q=q$, $y=q$. Следовательно $q\in W^s_p$. Получили противоречие, откуда следует, что случай (b) невозможен.

(c) Если q — седло, то точка q не может совпадать с точкой p, так как согласно предложению 2.1. диффеоморфизм $f\in\Phi$ не имеет гомоклинических точек. Следовательно, из предложения 2.2. следует, что существует подпоследовательность $\{y_{j_i}\}$, последовательность целых чисел $m_i\to+\infty$ и точка $z\in W^s_q$ такие, что последовательность точек $\{f^{m_i}(y_{j_i})\}$ сходится к точке z. Повторяя вышеприведенные рассуждения, мы получим, что W^s_q и W^u_q содержат гетероклинические точки. Получили противоречие с условием 2) определения класса Φ, откуда следует, что случай (c) невозможен.

Таким образом, W^u_p — гладкое подмногообразие многообразия M^2 для каждой точки $p\in\Omega_f$.

3) Докажем, что если $x\in(cl(\ell^u_p)\setminus(\ell^u_p\cup p))$, то $x\in W^u_r$ для некоторой точки $r\in\Omega_f$ такой, что $\ell^u_p\cap W^s_r\neq\emptyset$.

Пусть $x\in(cl(\ell^u_p)\setminus(\ell^u_p\cup p))$. Тогда существует последовательность $\{x_k\}\subset\ell^u_p$ такая, что $d(x_k,x)\to0$ при $k\to+\infty$. В силу соотношения (*), $x\in W^u_r$ для некоторой точки $r\in\Omega_f$. Рассмотрим три возможных случая: (a) r — источник, (b) r — сток, (c) r — седло.

(a) Если r — источник, то $x_k\in W^u_r$ для всех k, начиная с некоторого. Откуда $p=r$, $\ell^u_p\cup p=W^u_r$ и из условия $x\in(cl(\ell^u_p)\setminus(\ell^u_p\cup p))$ следует, что $x\notin W^u_r$. Получили противоречие, откуда следует, что случай (a) невозможен.

(b) Если r — сток, то $W^u_r = r$, $x = r$ и $x_k \in W^s_r$ для всех k, начиная с некоторого. Следовательно $\ell^u_p \cap W^s_r \neq \emptyset$, то есть импликация верна.

(c) Если r — седло, то, согласно пункту 2) настоящей теоремы, $r \neq p$. Тогда, согласно предложению 2.2., существует подпоследовательность x_{k_j}, последовательность целых чисел $m_j \to +\infty$ и точка $z \in W^s_r$ такие, что последовательность точек $z_j = f^{-m_j}(x_{k_j})$ сходится к точке z. Так как, согласно соотношению (*), $M^2 = \bigcup\limits_{q \in \Omega_f} W^u_q$, то $z \in W^u_q$ для некоторой точки $q \in \Omega_f$. Рассмотрим три возможных случая: (1) q — источник, (2) q — сток, (3) q — седло.

(1) Если q — источник, то $z_j \in W^u_q$ для всех j, начиная с некоторого. Следовательно, $q = p$ и p — источник. Получили, что $\ell^u_p \cap W^s_r \neq \emptyset$, то есть импликация верна.

(2) Если q — сток, то $W^u_q = q$, $z = q$. Следовательно, $q \in W^s_r$. Получили противоречие, откуда следует, что случай (2) невозможен.

(3) Если q — седло, то точка q не может совпадать с точкой r, так как, согласно предложению 2.1., диффеоморфизм $f \in \Phi$ не имеет гомоклинических точек, и $q \neq p$ в силу пункта 2) настоящей теоремы. Из предложения 2.2. следует, что существует подпоследовательность $\{z_{j_i}\}$, последовательность целых чисел $m_i \to +\infty$ и точка $y \in W^s_q$ такие, что последовательность точек $\{f^{m_i}(z_{j_i})\}$ сходится к точке y и $y \in W^u_t$ для некоторой точки $t \in \Omega_f$. Повторяя вышеприведенные рассуждения, мы получим, что точка t — седло, что противоречит условию 2) определения класса Φ. Следовательно, случай (3) для точки t невозможен.

В частности, если ℓ^u_p не имеет гетероклинических пересечений для седловой точки p, то $cl(\ell^u_p) \setminus (\ell^u_p \cup p) \subset \bigcup\limits_{r \in \Omega_f : \ell^u_r \cap W^s_r \neq \emptyset} W^u_r$. Пи этом точка r не может быть седловой, так как ℓ^u_p не имеет гетероклинических пересечений и не может быть источниковой, так как в этом случае $W^s_r = r$. Таким образом, $\ell^u_p \subset \bigcup\limits_{\omega \in \Delta^s_f} W^s_\omega$, где Δ^s_f — подмножество множества Ω_f, состоящее из стоков. Поскольку сепаратриса ℓ^u_p связна, то существует единственный сток ω такой, что $\ell^u_p \subset W^s_\omega$ и, следовательно, $cl(\ell^u_p) = \ell^u_p \cup \{p, \omega\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Обозначим через Δ^u_f (Δ^s_f) — подмножество множества Ω_f, состоящее из источников (стоков). Положим $\Delta_f = \Delta^u_f \cup \Delta^s_f$. Обозначим через Σ_f подмножество множества Ω_f, состоящее из всех седловых точек; через Σ^s_f — подмножество множества Σ_f, состоящее из седловых точек, устойчивые многообразия которых содержат гетероклинические точки.

Заметим, что если $\Sigma_f = \emptyset$, то неблуждающее множество диффеоморфизма f состоит из одного стока и одного источника, объемлющее многообразие M^2 гомеоморфно сфере $\mathbb{S}^2$, и все диффеоморфизмы "источник-сток" сопряжены между собой. Поэтому в дальнейшем мы предполагаем, что множество Σ_f не пусто. Положим $\Sigma^u_f = \Sigma_f \setminus \Sigma^s_f$. Так как, согласно теореме 2.1., $M^2 = \bigcup\limits_{p \in \Omega_f} W^s_p = \bigcup\limits_{p \in \Omega_f} W^u_p$, то, следовательно, множество Δ^u_f (Δ^s_f) непусто. Положим

$$\mathcal{M}_f = M^2 \setminus (W^u_{\Sigma^s_f} \cup W^s_{\Sigma^u_f} \cup \Delta_f).$$

Для диффеоморфизма f группа $F = \{f^n, n \in \mathbb{Z}\}$ является бесконечной циклической группой. Действие группы диффеоморфизмов F на множестве $\mathcal{M}_f$ называется *свободным*, если $f^n(x) \neq x$ для любого $x \in \mathcal{M}_f$ и любого $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Действие группы диффеоморфизмов F на множестве $\mathcal{M}_f$ называется *разрывным*, если для каждого компактного подмножества $K \subset \mathcal{M}_f$ множество элементов $f^n \in F$ таких, что $f^n(K) \cap K \neq \emptyset$ — конечно.

Замкнутое множество $\Lambda \subset M^n$ называется *аттрактором* диффеоморфизма $f : M^n \to M^n$, если Λ имеет компактную окрестность $U \neq M^n$ такую, что $f(U) \subset int\ U$ и

$\Lambda = \bigcap\limits_{k\geq 0} f^k(U)$. Множество называется *репеллером* диффеоморфизма f, если оно является аттрактором для f^{-1}.

Для доказательства теоремы 2.2. нам понадобится следующая техническая лемма.

Лемма 2.1. *Пусть ω — гиперболический сток диффеоморфизма $f : M^2 \to M^2$ и L_ω — множество неустойчивых одномерных сепаратрис ℓ гиперболических седловых точек σ диффеоморфизма f таких, что $cl(\ell) = \ell \cup \sigma \cup \omega$. Тогда существует гладкий 2-диск $D_\omega \subset W^s_\omega$, содержащий ω и такой, что любая сепаратриса $\ell \in L_\omega$ пересекает ∂D_ω в единственной точке.*

Доказательство. Пусть B_0 — гладкий 2-диск такой, что $\omega \in B_0 \subset W^s_\omega$. В силу теоремы о трансверсальности, диск B_0 можно выбрать трансверсальным пучку сепаратрис L_ω. Обозначим через $\mathcal{C}_{B_0}$ совокупность всех компонент связности (являющихся гладкими дугами) множества $L_\omega \cap B_0$. Представим $\mathcal{C}_{B_0}$ в виде объединения двух непересекающихся подмножеств $\mathcal{C}^1_{B_0}, \mathcal{C}^2_{B_0}$, таких, что пересечение каждой дуги из $\mathcal{C}^1_{B_0}$ ($\mathcal{C}^2_{B_0}$) с окружностью ∂B_0 состоит в точности из одной точки (двух точек).

Заметим, что число элементов множества $\mathcal{C}^1_{B_0}$ равно числу сепаратрис из множества L_ω. Если $\mathcal{C}^2_{B_0} = \emptyset$, то $D_\omega = B_0$ — искомый диск. В противном случае пронумеруем дуги множества $\mathcal{C}^2_{B_0}$: $c_1, \ldots, c_k$ и построим гладкие 2-диски $B_1, \ldots, B_k$ такие, что $\mathcal{C}^1_{B_i} = \mathcal{C}^1_{B_0}$ и $\mathcal{C}^2_{B_i} = \mathcal{C}^2_{B_0} \setminus \{c_1, \ldots, c_i\}$ для любого $i \in \{1, \ldots, k\}$. Тогда $D_\omega = B_k$ будет искомым диском.

Построим 2-диск B_1 с требуемыми свойствами. Пусть A^1_1 и A^1_2 концевые точки дуги c_1. Обозначим через $\tilde{c}_1$ замкнутую дугу окружности ∂B_0 с граничными точками A^1_1 и A^1_2 такую, что кривая $c_1 \cup \tilde{c}_1$ ограничивает на W^s_ω 2-диск d_1, не содержащий точки ω (так как многообразие W^s_ω диффеоморфно $\mathbb{R}^2$ и, следовательно, по теореме Шёнфлиса любая окружность, принадлежащая W^s_ω, ограничивает 2-диск). Тогда искомый диск B_1 получается сглаживанием углов и малым шевелением диска $B_0 \setminus int\ d_1$. Предполагая существование 2-диска B_{i-1}, аналогично вышесказанному устанавливается существование диска B_i для любого $i \in \{2, \ldots, k\}$.
Доказательство закончено.

Теорема 2.2. *Для любого диффеоморфизма $f \in \Phi$*

1) Множества $R_f = \Delta^u_f \cup W^s_{\Sigma^u_f}$ и $A_f = \Delta^s_f \cup W^u_{\Sigma^s_f}$ являются репеллером и аттрактором, соответственно.

2) Пространство $\mathcal{M}_f = M^2 \setminus (R_f \cup A_f)$ состоит из конечного числа k_f компонент связности $\mathcal{M}^0_f, \ldots, \mathcal{M}^{k_f-1}_f$, каждая из которых является f-инвариантной и группа $F = \{f^n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ действует свободно и разрывно на $\mathcal{M}^i_f$ для каждого $i \in \mathbb{Z}_{k_f}$.

3) Для каждого многообразия $\mathcal{M}^i_f$, $i \in \mathbb{Z}_{k_f}$ существует гомеоморфизм $\nu_i : \mathcal{M}^i_f \to \mathbb{R}^2 \setminus O$, сопрягающий диффеоморфизм $f|_{\mathcal{M}^i_f}$ с гомотетией — отображением $b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, заданным формулой $b(x,y) = (\frac{x}{2}, \frac{y}{2})$.

Доказательство. 1) Покажем, что множество A_f является аттрактором и имеет гладкую компактную окрестность $U_{A_f} \neq M^2$ такую, что $f(U_{A_f}) \subset int\ U_{A_f}$ и каждая компонента связности множества $f(U_{A_f}) \setminus int\ U_{A_f}$ диффеоморфна двумерному кольцу.

Пусть $\sigma \in \Sigma_f$. Согласно замечанию 1.1. существуют окрестности $U_\sigma \subset M^2$, $U_O \subset \mathbb{R}^2$ точек σ, O, соответственно, и гомеоморфизм $\psi : U_\sigma \to U_O$ такие, что в окрестности U_σ диффеоморфизм f гладко сопряжен своей линейной части. Пусть $H = \{(x,y) \in U_O\ :\ y^2 - x^2 \leq 1\}$, $\Gamma = \{(x,y) \in U_O\ :\ y^2 - x^2 = 1\}$, $H_\sigma = \psi^{-1}_\sigma(H)$ и $\Gamma_\sigma = \psi^{-1}_\sigma(\Gamma)$. Положим $H_{\Sigma^s_f} = \bigcup\limits_{\sigma \in \Sigma^s_f} H_\sigma$ и $\Gamma_{\Sigma^s_f} = \bigcup\limits_{\sigma \in \Sigma^s_f} \Gamma_\sigma$.

Пусть $\omega \in \Delta^s_f$. В силу сопряженности $f|_{W^s_\omega}$ с Df_ω для каждого ω (см., замечание 1.1.), существует гладкий 2-диск $D_\omega \subset W^s_\omega$ такой, что $f(D_\omega) \subset int\ D_\omega$. Положим $D_{\Delta^s_f} = \bigcup\limits_{\omega \in \Delta^s_f} D_\omega$. Согласно лемме 2.1. $D_{\Delta^s_f}$ можно выбрать так, что любая сепаратриса из множества $W^u_{\Sigma^s_f}$ пересекает $\partial D_{\Delta^s_f}$ в единственной точке и $D_{\Delta^s_f}$ является гладким подмногообразием. В силу λ-леммы существует число $n \in \mathbb{N}$ такое, что $f^{-n}(\partial D_{\Delta^s_f})$ трансверсально пересекает множество $\Gamma_{\Sigma^s_f}$. Положим $U_{A_f} = H_{\Sigma^s_f} \cup f^{-n}(D_{\Delta^s_f})$. По построению U_{A_f} является компактной окрестностью A_f гомеоморфной диску с дырами такой, что $A_f \subset f(U_{A_f}) \subset int\ U_{A_f}$ и $A_f = \bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} f^k(U_{A_f})$. Таким образом, множество A_f является аттрактором. По построению $U_{R_f} = M^2 \setminus int\ U_{A_f}$ — захватывающая окрестность U_{R_f} и, следовательно, R_f — репеллер.

2) Так как множество $W^u_{\Sigma^s_f} \cup W^s_{\Sigma^u_f}$ содержит ровно по одному инвариантному многообразию каждой седловой точки множества Σ_f и не содержит гетероклинических точек, то, по построению, множества R_f и A_f состоят из конечного числа попарно непересекающихся дуг и конечного числа точек, откуда следует, что множество $M^2 \setminus (R_f \cup A_f)$ является двумерным многообразием и состоит из конечного числа компонент связности. Обозначим их через $\mathcal{M}^0_f, \ldots, \mathcal{M}^{k_f-1}_f$. Каждая компонента связности $\mathcal{M}^i_f,\ i \in \mathbb{Z}_{k_f}$ является f-инвариантной. Заметим, что $\mathcal{M}^i_f \cap \Omega_f = \emptyset$ и, следовательно, группа $F = \{f^n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ действует свободно на $\mathcal{M}^i_f$. Покажем, что F действует разрывно на $\mathcal{M}^i_f$.

По построению $\mathcal{M}_f = W^s_{A_f \cap \Omega_f} \setminus A_f = W^u_{R_f \cap \Omega_f} \setminus R_f$. Тогда, в силу пункта 1), для любого компактного множества $K \subset \mathcal{M}_f$ существует число $\mathcal{N} \in \mathbb{N}$ такое, что $K \subset M^2 \setminus (f^{\mathcal{N}}(U_{A_f}) \cup f^{-\mathcal{N}}(U_{R_f}))$. Тогда $K \cap f^n(K) = \emptyset$ для любого $n\ :\ |n| > 2\mathcal{N}$.

3) Построенная в пункте 1) окрестность U_{A_f} аттрактора A_f гомотопически эквивалентна этому аттрактору. Следовательно, каждая компонента связности множества $U_{A_f} \setminus int\ f(U_{A_f})$ гомеоморфна двумерному кольцу. Кроме того, $U_{A_f} \setminus int\ f(U_{A_f})$ — фундаментальная область диффеоморфизма $f|_{\mathcal{M}_f}$ и каждая её компонента связности K_i является фундаментальной областью диффеоморфизма $f|_{\mathcal{M}^i_f}$ и диффеоморфна двумерному кольцу. Обозначим через $S_{1,i}$ и $S_{2,i} = f(S_{1,i})$ граничные окружности K_i. Фундаментальной областью диффеоморфизма $b|_{\mathbb{R}^2 \setminus O}$ является кольцо $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$ и $S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x^2 + y^2 = 4\}$, $S_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x^2 + y^2 = 1\} = b(S_1)$ — его граничные окружности. Пусть $\hat{\nu}_{1,i} : S_{1,i} \to S_1$ — сохраняющий ориентацию гомеоморфизм. Положим $\hat{\nu}_{2,i}(t) = b^{-1}(\hat{\nu}_{1,i}(f(t)))$ для любого $t \in S_{2,i}$. Тогда, существует гомеоморфизм $\hat{\nu}_i : K_i \to K$ такой, что $\hat{\nu}_i|_{S_{1,i}} = \hat{\nu}_{1,i}$ и $\hat{\nu}_i|_{S_{2,i}} = \hat{\nu}_{2,i}$ (см., например, [2], глава 5, теорема 3.2). Тогда искомый гомеоморфизм определяется формулой $\nu_i(t) = b^{-m}(\hat{\nu}_i(f^m(t)))$, где $t \in \mathcal{M}^i_f$ и $f^m(t) \in K_i$.

Доказательство закончено.

Благодарности. Авторы благодарят В.З. Гринеса за постановку задачи и руководство, грант РФФИ номер 08-01-00547 за финансовую поддержку.

Список литературы

1. Белицкий Г.Р. Нормальные формы, инварианты и локальные отображения. – Киев. Наукова думка. 1979. – 174 с.

2. Келдыш Л. В. Топологические вложения в евклидово пространство. – Труды математического института им. В. А. Стеклова. 1966. 81. – 183 с.

3. Melo W. Moduli of stability of two-dimensional diffeomorphisms. – Topology. 1980. 19. – P. 9–21.

4. Melo W., Strien S. J. Diffeomorphisms on surfaces with a finite namber of moduli. – Ergod. Th. and Dynam. Sys. 1987. 7. – P. 415–462.

5. Палис Я., Мело В. Геометрическая теория динамических систем. – М. Мир. 1998.

6. Smale S. Differentiable dynamical systems. – Bull. Amer. Math. Soc. 1967. 73. № 6. – P. 747–817. (Пер. на рус. яз.: Смейл С. Дифференцируемые динамические системы. – УМН. 1970. 25. № 1. – С. 113–185.)

7. Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. – Москва-Ижевск. Институт компьютерных исследований. 2003. – 428 с.

Dynamics of diffeomorphisms on surfaces with the finite number of topological conjugacy moduli

© T. V. Mitryakova[4], O. V. Pochinka[5], A. E. Shishenkova[6]

Abstract. In the present paper dynamics of diffeomorphisms on orientable surfaces with the finite number of moduli of topological conjugacy are described.
Key Words: topological conjugacy, moduli of topological conjugacy, orbits of heteroclinic tangency, one-sided tangency

References

1. Belitskii G.R. Normal Forms, Invariants, and Local Mappings. – Kiev. Naukova Dumka. 1979.

2. Keldysh, L.: Topological embeddings in euclidean space. – M. Nauka. Proceedings of Math. Inst. V. A. Steklova. 1966. 81.

3. Melo W. Moduli of stability of two-dimensional diffeomorphisms. – Topology. 1980. 19. – P. 9–21.

4. Melo W., Strien S. J. Diffeomorphisms on surfaces with a finite namber of moduli. – Ergod. Th. and Dynam. Sys. 1987. 7. – P. 415–462.

5. Palis J., Melo W. Geometrical theory of dynamical systems. – Springer. New York Heidelberg Berlin. 1982.

6. Smale S. Differentiable dynamical systems. – Bull. Amer. Math. Soc. 1967. 73. № 6. – P. 747–817.

7. Shilnikov L.P., Shilnikov A.L., Turaev D.V., Chua L. Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics. – World Scientific. Singapur-London-Hong Kong. 2003. – 428 c.

[4]Assistant, Nizhnii Novgorod State University, Nizhny Novgorod; tatiana.mitryakova@yandex.ru.
[5]Assistant professor, Nizhnii Novgorod State University, Nizhny Novgorod; olga-pochinka@yandex.ru.
[6]Assistant professor, Nizhnii Novgorod State Agricultural Academy, Nizhnii Novgorod State; math@agri.sci-nnov.ru.