УДК 517.9

Численное решение краевой задачи для линейных дифференциально-алгебраических уравнений второго порядка

© М. В. Булатов[1], Н. П. Рахвалов[2], Ta Duy Phuong[3]

Аннотация. В работе рассмотрены численные методы решения краевой задачи для дифференциально-алгебраических уравнений второго порядка. Выделены условия, при выполнении которых предложенные алгоритмы являются устойчивыми и сходятся к точному решению. Приведены результаты численных расчетов

Ключевые слова: линейные дифференциально - алгебраические системы, матричный полином, краевая задача, метод матричной прогонки.

1. Введение

В данной работе рассмотрены численные методы решения краевой задачи для дифференциально-алгебраических уравнений второго порядка. Выделены условия, при выполнении которых предложенные алгоритмы являются устойчивыми и сходятся к точному решению.

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу

$$A(t)x''(t) + B(t)x'(t) + C(t)x(t) = f(t), \quad t \in [0, \quad 1], \tag{2.1}$$

$$x(0) = x_0, \quad x(1) = x_N, \tag{2.2}$$

где $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ – $(n \times n)$ матрицы, $f(t)$ – заданная вектор функция, $x(t)$ - искомая вектор функция и $\det(A) \equiv 0$. В этом случае систему (2.1) принято называть дифференциально-алгебраическим уравнением (ДАУ) второго порядка.

Краевые условия будем считать согласованными и будем полагать, что на отрезке интегрирования решение задачи (2.1), (2.2) существует и единственно. В данной работе рассмотрена задача, у которой матричный полином $\lambda A(t) + \mu B(t) + C(t)$, где λ и μ - скалярные параметры, удовлетворяет условиям:

$$rank A(t) = k = const \text{ для любого } t \in [0, 1]; \tag{2.3}$$

$$rank(A(t)|B(t)) = k + l = const \text{ для любого } t \in [0, 1]; \tag{2.4}$$

[1]Главный научный сотрудник, ИДСТУ СО РАН, г. Иркутск; mvbul@icc.ru.
[2]Ассистент кафедры Информатики и МОИ, ГОУ ВПО ВСГАО, г. Иркутск; nikolar@mail.ru
[3]Старший научный сотрудник ИМ ВАНТ, г. Ханой; Вьетнам; tdphuong@math.ac.vn

$$\det(\lambda A(t)+\mu B(t)+C(t))=a_0(t)\lambda^k\nu^l+\ldots \text{ причем } a_0(t)\neq 0 \text{ для любого } t\in[0,\,1]\,. \quad (2.5)$$

Известно [1], что для таких матричных полиномов существуют невырожденные для любого $t\in[0,\,1]$ матрицы $P(t)$ и $Q(t)$ такие что, умножая слева (2.1) на матрицу $P(t)$ и заменяя переменную $x(t)=Q(t)y(t)$, исходная система может быть приведена к виду $PA(Qy)''+PB(Qy)'+PCQy=(PAQ)y''+(2PAQ'+PBQ)y''+(PAQ''+PBQ'+PCQ)y=Pf(t),$ с матрицами

$$PAQ=\begin{pmatrix} E_k & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$2PAQ'+PBQ=\begin{pmatrix} J_1(t) & 0 & J_2(t)\\ 0 & E_1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$PAQ''+PBQ'+PCQ=\begin{pmatrix} C_1(t) & C_2(t) & 0\\ C_3(t) & C_4(t) & 0\\ 0 & 0 & E_{n-k-l}\end{pmatrix},$$

где E_k, E_l и E_{n-k-l} единичные матрицы размерности k,l и $n-k-l$ соответственно, J_1, J_2 и $C_i, i=1,\ldots,4$ матричные блоки соответствующих размеров.

Таким образом, исходную систему (2.1) путем неособенных преобразований привели к виду

$$\begin{pmatrix} E_k & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}y''+\begin{pmatrix} J_1(t) & 0 & J_2(t)\\ 0 & E_l & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}y'+\begin{pmatrix} C_1(t) & C_2(t) & 0\\ C_3(t) & C_4(t) & 0\\ 0 & 0 & E_{n-k-l}\end{pmatrix}y=F(t) \quad (2.6)$$

Опишем численный метод решения задачи (2.1), (2.2) для которой выполнены условия (2.3), (2.4), (2.5).

На отрезке $[0,\,1]$ введем сетку $t_i=ih,\ \ i=0,\ldots N,\ \ h=1/N.$, и применим для численного решения задачи (2.1), (2.2) разностную схему вида

$$\bar{A}_i\Delta_1 x_{i+1}+h\bar{B}_i\Delta_2 x_{i+1}+h^2\bar{C}_i\Delta_3 x_{i+1}=\bar{f}_i(t),\quad i=0,\ldots,N,\ \ x_0=x(0),\ \ x_N=x(1), \quad (2.7)$$

где $\bar{A}_i,\ \bar{B}_i,\ \bar{C}_i$ - значения матриц $A(t),\ B(t),\ C(t)$ вычисленные в точке $\bar{t}_i\in[t_{i-1},t_{i+1}]$, а разностные операторы $\Delta_1 g_{i+1},\ \Delta_2 g_{i+1},\ \Delta_3 g_{i+1}$ на вектор функцию g_{i+1} определены по правилам:

$$\Delta_1 g_{i+1}=g_{i+1}-2g_i+g_{i-1},$$

$$\Delta_2 g_{i+1}=\rho_0 g_{i+1}+\rho_1 g_i+\rho_2 g_{i-1}, \quad (2.8)$$

$$\Delta_3 g_{i+1}=\sigma_0 g_{i+1}+\sigma_1 g_i+\sigma_2 g_{i-1}.$$

Конкретный выбор точки $\bar{t}_i$ и коэффициентов $\rho_j,\ \sigma_j,\ j=0,\ 1,\ 2$ будет указан ниже. Такая аппроксимация приводит к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) блочно-трехдиагонального вида

$$R_i x_{i-1} + L_i x_i + M_i x_{i+1} = F_i, \quad x_0 = x(0),\ x_N = x(1),\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1, \tag{2.9}$$

с матрицами

$$R_i = \bar{A}_i + \rho_2 h \bar{B}_i + \sigma_2 h^2 \bar{C}_i, \tag{2.10}$$

$$L_i = -2\bar{A}_i + \rho_1 h \bar{B}_i + \sigma_1 h^2 \bar{C}_i, \tag{2.11}$$

$$M_i = \bar{A}_i + \rho_0 h \bar{B}_i + \sigma_0 h^2 \bar{C}_i, \tag{2.12}$$

$$F_i = h^2 \bar{f}_i. \tag{2.13}$$

Если матрицы L_i являются невырожденными, то СЛАУ (2.6) может быть решена методом матричной прогонки [2], описание которого приведено ниже.

Решение системы (2.6) ищется в виде

$$x_i = \alpha_{i+1} x_{i+1} + \beta_{i+1}, i = N-1, \ldots, 2,, \tag{2.14}$$

где матрицы α_{i+1} и вектора β_{i+1} определены по правилу

$$\alpha_{i+1} = -(R_i \alpha_i + L_i)^{-1} M_i, \beta_{i+1} = -(R_i \alpha_i + L_i)^{-1}(F_i - R_i \beta_i), i = 2, \ldots, N, \tag{2.15}$$

$\alpha_1 = 0, \beta_1 = x_0$.

Обычно для численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений применяют аппроксимацию в точке t_i. В этом случае разностные операторы $\Delta_2 g_{i+1}$, $\Delta_3 g_{i+1}$ определены следующим образом:

$$\Delta_2 g_{i+1} = \frac{1}{2}(g_{i+1} - g_{i-1}),$$

$$\Delta_3 g_{i+1} = g_i.$$

Матрицы L_i из формулы (2.11) имеют вид $L_i = -2A(t_i) + h^2 C(t_i)$. Эти матрицы будут невырожденны только в случае регулярности матричного пучка $\lambda A_i + C_i$, что значительно сужает класс рассматриваемых задач. Мы предлагаем применить другую аппроксимацию задачи, которая сохраняет второй порядок аппроксимации и охватывает более широкий класс задач, а именно будем аппроксимировать задачу (2.1), (2.2) в точках $\bar{t}_i = t_{i-1}$ или $\bar{t}_i = t_{i+1}$.

Приведем аппроксимацию в точке t_{i-1}. Условиями аппроксимации второго порядка будут (см., напр., [3].)

$$\begin{cases} \rho_0 + \rho_1 + \rho_2 = 0, \\ \rho_0 - \rho_2 - 1 = 0, \\ \rho_2 + \rho_0 + 2 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2 = 1, \\ \sigma_0 - \sigma_2 + 1 = 0. \end{cases}$$

Коэффициенты $\rho_j,\ j = 0,\ 1,\ 2$, определены единственным образом,

$$\rho_0 = -\frac{1}{2}, \quad \rho_1 = 2, \quad \rho_2 = -\frac{3}{2}$$

а коэффициенты $\sigma_j, \ j = 0, \ 1, \ 2$ удовлетворяют соотношениям

$$\sigma_0 = -\frac{1}{2}\sigma_1, \quad \sigma_2 = 1 - \frac{1}{2}\sigma_1, \quad \sigma_1 \geq 1.$$

При такой аппроксимации матрицы $R_i, \ L_i, \ M_i$ (см. формулы (2.10), (2.11), (2.12)) имеют вид:

$$R_i = \bar{A}_i - \frac{3}{2}h\bar{B}_i + (1 - \frac{1}{2}\sigma_1)h^2\bar{C}_i, \tag{2.16}$$

$$L_i = -2\bar{A}_i + 2h\bar{B}_i + \sigma_1 h^2\bar{C}_i, \tag{2.17}$$

$$M_i = \bar{A}_i - \frac{1}{2}h\bar{B}_i + (-\frac{1}{2}\sigma_1)h^2\bar{C}_i, \tag{2.18}$$

где $\bar{A}_i, \bar{B}_i, \bar{C}_i$ – значения матриц$A(t), B(t), C(t)$ вычисленые в точке $t_{i-1}.$, а $F_i = h^2 f(t_{i-1})$

Аналогично, аппроксимируя задачу (2.1), (2.2) в точке t_{i+1}, получим следующие разностные коэффициенты

$$\rho_0 = \frac{3}{2}, \quad \rho_1 = -2, \quad \rho_2 = \frac{1}{2},$$

$$\sigma_0 = -\frac{1}{2}\sigma_1, \quad \sigma_2 = 1 - \frac{1}{2}\sigma_1, \quad \sigma_1 \geq 1,$$

а матрицы R_i, L_i, M_i имеют вид

$$R_i = \bar{A}_i + \frac{3}{2}h\bar{B}_i + (1 - \frac{1}{2}\sigma_1)h^2\bar{C}_i, \tag{2.19}$$

$$L_i = -2\bar{A}_i - 2h\bar{B}_i + \sigma_1 h^2\bar{C}_i, \tag{2.20}$$

$$M_i = \bar{A}_i + \frac{1}{2}h\bar{B}_i + (-\frac{1}{2}\sigma_1)h^2\bar{C}_i, \tag{2.21}$$

здесь $\bar{A}_i, \ \bar{B}_i, \ \bar{C}_i$ - значения матриц $A(t), \ B(t), \ C(t)$ вычисленные в точке t_{i+1}, , а $F_i = h^2 f(t_{i+1})$.

Таким образом, при выполнении условий (2.3), (2.4), (2.5) матрицы будут невырожденны и формально мы можем применить метод матричной прогонки.

3. Численные эксперименты

Были проведены численные эксперименты на ряде модельных примеров удовлетворяющих условиям (2.3), (2.4), (2.5).

Самый простой пример имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x''(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x'(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2e^{2t} \\ e^t \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Как уже отмечалось выше, стандартная аппроксимация в точке t_i

$$\bar{A}_i = A(t_i),\ \bar{B}_i = B(t_i),\ \bar{C}_i = C(t_i),$$

$$\Delta_1 g_{i+1} = g_{i+1} - 2g_i + g_{i-1},$$

$$\Delta_2 g_{i+1} = \frac{1}{2}(g_{i+1} - g_{i-1}),$$

$$\Delta_3 g_{i+1} = g_i,$$

приведет к СЛАУ (2.9) с матрицами $R_i,\ L_i,\ M_i$

$$R_i = \bar{A}_i - \frac{1}{2}h\bar{B}_i,$$
$$L_i = -2\bar{A}_i + h^2\bar{C}_i,$$
$$M_i = \bar{A}_i + \frac{1}{2}h\bar{B}_i.$$

Легко заметить, что матрицы L_i будут тождественно вырождены для данного примера, таким образом метод матричной прогонки принципиально не применим (см. формулы (2.14), (2.15). Предлагаемые аппроксимации свободны от этого недостатка и методы (2.9), (2.14), (2.15) имеют второй порядок.

Другой пример получен следующим образом. Рассмотрим систему

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} y''(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} y'(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2t + t^2 \\ t^3 \end{pmatrix},$$

которую умножим на матрицу P(t) и произведем замену переменной $x(t) = Q(t)y(t)$ где

$$P(t) = \begin{pmatrix} e^t & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}(t + 1 - 6e^t)e^{-t} \\ 0 & \frac{1}{2}e^{-t} & -\frac{1}{2}(t + 1)e^{-2t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}, \quad Q(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t+1} & 0 & 0 \\ t^2 & \frac{t}{8} & e^{-t} \\ e^{-2t} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix}.$$

В итоге получим ДАУ вида (2.1) с переменными матрицами $A(t),\ B(t),\ C(t)$, причем матрица $C(t)$ не имеет нулевых элементов, а матрица $B(t)$ имеет две полностью заполненные строки. Конкретный вид этих матриц не приводится в виду их громоздкости. Результаты расчетов полученного примера приведены в таблице.

h	0.1	0.05	0.025	0.0125	0.00625
er_1	0.062738	0.016628	0.004272	0.001082	0.000272
er_2	0.037279	0.010199	0.002691	0.000695	0.000177

Здесь $er_j = \max_i \|y(t_i) - y_i\|$, j=1, 2, погрешность методов (2.9), (2.14), (2.15), у которых матрицы $R_i,\ L_i,\ M_i$ вычислены в точках t_{i-1} и t_{i+1}, соответственно, а $\|\cdot\|$ - максимум по модулю элементов вектора $y(t_i) - y_i$.

Был проведен ряд численных расчетов, которые показали, что при выполнении условий (2.3), (2.4) и (2.15) для рассматриваемых задач методы (2.16)-(2.18) и (2.19)-(2.21) сходятся к точному решению со вторым порядком. Обоснование метода предполагается провести в дальнейшем.

Список литературы

1. Булатов М. В., Минг Гонг Ли. Применение матричных полиномов к исследованию линейных дифференциально-алгебраических уравнений высокого порядка// Дифференциальные уравнения. – 2008. – Т. 44, №10.– С.1299-1305.

2. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. – М.: Наука, 1971. – 552 с.

3. Хайрер Э., Ваннер Г., Нёрсетт С. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. – М.: Мир, 1999. – 512 с.

Дата поступления 12.04.2010

Numerical solution boundary problem for linear differential-algebraic equations of second order

© **M. V. Bulatov[4],N. P. Rahvalov[5], Ta Duy Phuong[6]**

Abstract. In this paper the numerical methods of solution of boundary-value problem for differential-algebraic equations of the second order are considered.We found conditions fulfillment of which ensures stability and convergence to exact solution of proposed algorithms. The results of numerical calculations are given.
Key Words: linear differential-algebraic systems, matrix polynomial, boundary-value problem, matrix sweep method.

References

1. Bulatov M. V., Ming-Gong Lee. Application of Matrix Polynomials to the Analysis of Linear Differential-Algebraic Equations of the Higher Order – Differential Equations. – 2008. – Vol. 44, – №10.–P. 1353-1360.

2. Samarskiy A.M. Introduction in the Theory of Difference Schemes. M:Nauka, 1977. –552 p.

3. Hairer E., Norsett S. P., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equation I. Nonstiff Problems.– Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, – 1987. – 512 p.

[4]Chif reseacher, ISDCT SB RAS, Irkutsk; mvbul@icc.ru.
[5]Ph.D. student Irkutsk State Pedagogical Academy, Irkutsk; nikolar@mail.ru
[6]Assoc. Prof. Institute of Mathematics, VAST, Hanoi, Vietnam; tdphuong@math.vn