УДК 517.9

Критерий определения порядка галеркинского приближения решения начально-краевых задач

© А. В. Анкилов[1], П. А. Вельмисов[2]

Аннотация. На основании анализа функционалов типа Ляпунова, построенных для дифференциального уравнения в частных производных, описывающего свободные колебания упругой пластины, доказана абсолютная и равномерная сходимость приближенных решений этого уравнения, полученных обобщенным методом Галеркина, к их точному решению. Получен критерий определения порядка приближенного решения для отыскания решения с заданной точностью. Разработанный критерий может быть использован при построении решений широкого класса других линейных дифференциальных уравнений в частных производных.

Ключевые слова: динамическая устойчивость; условная устойчивость; функционал; дифференциальное уравнение в частных производных.

1. Введение

Работа посвящена выводу критерия определения точности галеркинского приближения решения начально-краевых задач для дифференциального уравнения в частных производных, основанного на анализе разложений в ряд функций, задающих начальные условия. Вывод основан на исследовании функционалов типа Ляпунова. В качестве примера в работе исследуется задача о свободных колебаниях упругой пластины. Проведено исследование динамики и устойчивости этих колебаний.

Используются определение устойчивости упругого тела и соответствующее ему определение устойчивости решения начально-краевой задачи для дифференциального уравнения. Первое соответствует концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову и может быть сформулировано так: при каких значениях параметров, характеризующих упругую пластину (основными параметрами являются прочностные и инерционные характеристики пластины, действующие в связи с конструктивными особенностями заданные усилия и т.д.), малым отклонениям пластины от положения равновесия в начальный момент времени $t=0$ будут соответствовать малые отклонения и в любой момент времени $t>0$. Второе определение соответствует условной устойчивости решения начально-краевой задачи: при каких начальных условиях в момент времени $t=0$ и значениях параметров, входящих в дифференциальное уравнение, будет получено ограниченное решение в любой момент времени $t>0$. Используется так же определение условной неустойчивости решения начально-краевой задачи: при каких начальных условиях в момент времени $t=0$ и значениях параметров, входящих в дифференциальное уравнение, решение при $t\to\infty$ будет неограниченным.

На основе построения функционалов [1], соответствующих дифференциальному уравнению в частных производных, описывающему поперечные колебания пластины-полосы, получены достаточные условия устойчивости по Ляпунову, условной устойчивости и условной неустойчивости решений этого уравнения. Условная неустойчивость решений

[1]Доцент кафедры "Высшая математика", Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; ankil@ulstu.ru.

[2]Профессор, зав. кафедрой "Высшая математика", Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; velmisov@ulstu.ru.

модельного дифференциального уравнения играет важную роль при исследовании динамики, так как отыскание неограниченного решения не имеет смысла в связи с решением конкретной механической задачи.

Одним из методов получения достаточных и необходимых условий устойчивости по Ляпунову является анализ полученного численно решения дифференциального уравнения. В данном методе необходимо учитывать, что вместо области устойчивости по Ляпунову (изменения параметров механической системы), будет получена область условной устойчивости (изменения коэффициентов дифференциального уравнения в зависимости от начальных условий). При этом механическая область (устойчивости по Ляпунову) будет «не шире», чем математическая область (условной устойчивости). Поэтому только правильный выбор начальных условий, обсуждаемый в работе, позволит привести к согласованию этих областей. Следует отметить, что условия неустойчивости по Ляпунову для данного класса механических задач не могут быть получены на основании исследования функционалов типа Ляпунова (можно воспользоваться, например, частотным методом, который, однако, применим только к линейным дифференциальным уравнениям, в отличие от метода Ляпунова).

Исследование динамики упругой пластины основано на применении метода Галеркина. Как известно [2], построенная этим методом последовательность приближенных решений (отрезков ряда Фурье) сходится к обобщенному решению (сходимость в среднем, т.е. в интегральном смысле). При этом до сих пор остается неразрешенными два вопроса. Первый - является ли обобщенное решение точным и второй - каков должен быть порядок приближенного решения (длина отрезка ряда Фурье), чтобы это точное решение было найдено с заданной точностью. В данной работе с помощью функционалов типа Ляпунова, на примере исследования простейшего уравнения, доказана абсолютная и равномерная сходимость приближенных решений к точному, а также получен критерий определения порядка приближенного решения (в зависимости от параметров механической системы), гарантированно описывающего точное решение с любой заданной точностью в любой точке x в любой момент времени t. Выбор между методом Галеркина и разностным методом был сделан в пользу первого по двум причинам: первая – решение дифференциального уравнения четвертого порядка, рассматриваемого в данной работе, приводит к достаточно сложной разностной схеме и к большим затратам машинного времени (а построение областей устойчивости становится практически невозможным); вторая – возможность отыскания решения уравнения на любом временном отрезке, в том числе неограниченном.

В соответствии с вышесказанным поставлена цель данной работы – на примере простейшей механической задачи провести согласование математических и физических процессов. Для этого используются метод Ляпунова для исследования устойчивости и метод Галеркина для исследования динамики. Для последнего решается задача оценки точности полученного приближенного решения, в зависимости от его порядка.

2. Постановка задачи

В данной работе рассматривается дифференциальное уравнение, описывающее свободные колебания упругой пластины длины l:

$$M\ddot{w}(x,t) + Dw''''(x,t) + Nw''(x,t) + \beta w(x,t) = 0, \quad x \in (0,l)\,. \tag{2.1}$$

Здесь x – координата (пластина занимает на оси Ox отрезок $[0,l]$); t – время ($t \geq 0$); штрих обозначает производную по x, а точка – производную по t; D - изгибная жесткость; M – погонная масса пластины; N – сжимающая (растягивающая) пластину сила; β – коэффициент жесткости основания. Неизвестной является функция $w(x,t)$ – прогиб упругой пластины.

Начальные условия:

$$w\left(x,0\right)=f_1\left(x\right),\ \dot{w}\left(x,0\right)=f_2\left(x\right). \tag{2.2}$$

Предполагая, что концы пластины закреплены шарнирно, граничные условия для $w\left(x,t\right)$ запишем в виде

$$w(0,t)=w''(0,t)=w(l,t)=w''(l,t)=0. \tag{2.3}$$

Таким образом, получили начально-краевую задачу (2.1) - (2.3) для определения искомой функции $w(x,t)$.

Опишем на примере поставленной задачи (2.1)-(2.3) несколько возможностей использования функционалов типа Ляпунова.

3. Исследование устойчивости по Ляпунову точного решения

Получим достаточные условия устойчивости тривиального решения дифференциального уравнения (2.1) по отношению к возмущениям начальных условий.

Введем функционал

$$J(t)=\int\limits_0^l\left\{M\dot{w}^2+Dw''^2-Nw'^2+\beta w^2\right\}dx. \tag{3.1}$$

Найдем производную от $J(t)$ по t.

$$\dot{J}(t)=2\int\limits_0^l\left\{M\dot{w}\ddot{w}+Dw''\dot{w}''-Nw'\dot{w}'+\beta w\dot{w}\right\}dx. \tag{3.2}$$

Для функции $w(x,t)$, являющейся решением уравнения (2.1), равенство (3.2) примет вид:

$$\dot{J}\left(t\right)=2\int\limits_0^l\left\{-\dot{w}\left(Dw''''+Nw''+\beta w\right)+Dw''\dot{w}''-Nw'\dot{w}'+\beta w\dot{w}\right\}dx. \tag{3.3}$$

Интегрируя по частям с учетом граничных условий (2.3), получим

$$\int\limits_0^l\dot{w}w''''dx=\int\limits_0^l\dot{w}''w''dx,\quad \int\limits_0^l\dot{w}w''dx=-\int\limits_0^l\dot{w}'w'dx.$$

С учетом этих выражений, равенство (3.2) примет вид

$$\dot{J}(t)=0\quad\Rightarrow\quad J(t)=J(0). \tag{3.4}$$

Согласно (3.1), (3.4) имеем равенство

$$\int\limits_0^l\left\{M\dot{w}^2+Dw''^2-Nw'^2+\beta w^2\right\}dx=\int\limits_0^l\left\{M\dot{w}_0^2+Dw_0''^2-N{w_0'}^2+\beta w_0^2\right\}dx. \tag{3.5}$$

Здесь индекс 0 снизу означает, что значение берется при $t=0$.

Согласно неравенству Рэлея [3], имеют место оценки

$$\int_0^l w''^2(x,t)dx \ge \lambda_1 \int_0^l w'^2(x,t)dx, \quad \int_0^l w''^2(x,t)dx \ge \mu_1 \int_0^l w^2(x,t)dx, \tag{3.6}$$

где λ_1- наименьшее собственное значение краевой задачи $\psi''''(x) = -\lambda\psi''(x)$, μ_1- наименьшее собственное значение краевой задачи $\psi''''(x) = \mu\psi(x)$ с краевыми условиями (2.3). Тогда, учитывая (3.6), из (3.5) получим

$$\int_0^l \left\{M\dot{w}^2 + (\lambda_1 D - N)\, w'^2 + \beta w^2\right\} dx \le \int_0^l \left\{M\dot{w}_0^2 + \left(D + \lambda_1^{-1}|N| + \mu_1^{-1}\beta\right) w''^2_0\right\} dx. \tag{3.7}$$

Если выполняется условие

$$N < \lambda_1 D, \tag{3.8}$$

то из неравенства (3.7) следует устойчивость в среднем решения $w(x,t)$ *уравнения (2.1) и частных производных* $\dot{w}(x,t),\ w'(x,t)$ *по отношению к возмущениям начальных значений* $\dot{w}(x,0),\ w''(x,0),$ *если краевые условия имеют вид (2.3).*

Используя интегральное неравенство Коши-Буняковского и условия (2.3), получим

$$w^2(x,t) \le l \int_0^l w'^2(x,t)dx. \tag{3.9}$$

Учитывая неравенства (3.7) - (3.9), окончательно будем иметь оценку

$$(\lambda_1 D - N)\, w^2(x,t) \le l \int_0^l \left\{M\dot{w}_0^2 + \left(D + \lambda_1^{-1}|N| + \mu_1^{-1}\beta\right)\, w_0''^2\right\} dx,$$

из которой следует теорема.

Т е о р е м а 3.1. *Пусть выполнено условие (3.8), тогда решение* $w(x,t)$ *уравнения (2.1) устойчиво по отношению к возмущениям начальных значений* $\dot{w}(x,0),\ w''(x,0)$, *если краевые условия имеют вид (2.3).*

4. Исследование условной устойчивости и условной неустойчивости точного решения

Получим достаточные условия условной устойчивости решения дифференциального уравнения (2.1). Пусть имеют место условия:

$$\int_0^l w(x,t)\cdot g_i^{(1)}(x)\, dx = 0,\ i = 1 \div s, \quad \int_0^l w(x,t)\cdot g_i^{(2)}(x)\, dx = 0,\ i = 1 \div k, \tag{4.1}$$

где $g_i^{(1)}(x)$, $g_i^{(2)}(x)$ - собственные функции краевых задач $\psi''''(x) = -\lambda\psi''(x)$, $\psi''''(x) = \mu\psi(x)$ с краевыми условиями (2.3). Тогда в отличие от оценок (3.6) справедливы неравенства [3]:

$$\int_0^l w''^2(x,t)dx \geq \lambda_{s+1}\int_0^l w'^2(x,t)dx, \quad \int_0^l w''^2(x,t)dx \geq \mu_{k+1}\int_0^l w^2(x,t)dx, \tag{4.2}$$

где λ_{s+1} – $(s+1)$-е собственное значение краевой задачи $\psi''''(x) = -\lambda\psi''(x)$, а μ_{k+1} – $(k+1)$-е собственное значение краевой задачи $\psi''''(x) = \mu\psi(x)$ с краевыми условиями (2.3). Если же выполняются условия

$$\int_0^l w(x,t)\cdot g_1^{(1)}(x)\,dx \neq 0, \quad \int_0^l w(x,t)\cdot g_1^{(2)}(x)\,dx \neq 0, \tag{4.3}$$

то в оценках (4.2) необходимо положить $s=0,\ k=0$, т. е. получим (3.6).

С учетом (4.2) из (3.5) будем иметь

$$\int_0^l \left\{M\dot{w}^2 + (\lambda_{s+1}D - N)\,w'^2 + \beta w^2\right\}dx \leq \int_0^l \left\{M\dot{w}_0^2 + \left(D + \lambda_{s+1}^{-1}|N| + \mu_{k+1}^{-1}\beta\right)\,w_0''^2\right\}dx. \tag{4.4}$$

Если выполняется условие

$$N < \lambda_{s+1}D, \tag{4.5}$$

и начальные условия (2.2) таковы, что справедливы равенства (4.1), то из неравенства (4.4) следует условная устойчивость в среднем решения $w(x,t)$ уравнения (2.1) и частных производных $\dot{w}(x,t),\ w'(x,t)$ по отношению к возмущениям начальных значений $\dot{w}(x,0),\ w''(x,0),$ если краевые условия имеют вид (2.3).

Учитывая неравенства (3.9), (4.4), (4.5), получим оценку

$$(\lambda_{s+1}D - N)\,w^2(x,t) \leq l\int_0^l \left\{M\dot{w}_0^2 + \left(D + \lambda_{s+1}^{-1}|N| + \mu_{k+1}^{-1}\beta\right)\,w_0''^2\right\}dx, \tag{4.6}$$

из которой следует теорема.

Теорема 4.1. *Пусть выполнено условие (4.5) и начальные условия (2.2) таковы, что справедливы равенства (4.1). Тогда решение $w(x,t)$ уравнения (2.1) условно устойчиво по отношению к возмущениям начальных значений $\dot{w}_0,\ w_0''$, если краевые условия имеют вид (2.3).*

Получим достаточные условия условной неустойчивости решения дифференциального уравнения (2.1).

Введем функционал:

$$I(t) = \frac{1}{2}\int_0^l Mw^2dx. \tag{4.7}$$

Найдем производную от $I(t)$ по t.

$$\dot{I}(t) = \int_0^l M w\dot{w} dx.$$

Найдем вторую производную от $I(t)$ по t.

$$\ddot{I}(t) = \int_0^l \left(M\dot{w}^2 + Mw\ddot{w}\right) dx. \tag{4.8}$$

Для функции $w(x,t)$, являющейся решением уравнения (2.1), равенство (4.8) примет вид:

$$\ddot{I}(t) = \int_0^l \left\{M\dot{w}^2 - w\left(Dw'''' + Nw'' + \beta w\right)\right\} dx. \tag{4.9}$$

Интегрируя по частям с учетом (2.3), получим

$$\int_0^l ww'''' dx = \int_0^l w''^2 dx, \quad \int_0^l ww'' dx = -\int_0^l w'^2 dx.$$

Из (4.9) следует

$$\ddot{I}\left(t\right) = \int_0^l \left\{M\dot{w}^2 - Dw''^2 + Nw'^2 - \beta w^2\right\} dx. \tag{4.10}$$

Учитывая равенство (3.4):

$$\int_0^l \left\{-Dw''^2 + Nw'^2 - \beta w^2\right\} dx = \int_0^l M\dot{w}^2 dx - J\left(0\right),$$

окончательно получим

$$\ddot{I}\left(t\right) = \int_0^l 2M\dot{w}^2 dx - J\left(0\right).$$

Если $J(0) < 0$, т. е.

$$N\int_0^l w'^2\left(x,0\right) dx > \int_0^l \left\{M\dot{w}^2\left(x,0\right) + Dw''^2\left(x,0\right) + \beta w^2\left(x,0\right)\right\} dx, \tag{4.11}$$

то $\ddot{I}(t) > 0$ (график функции $I(t)$ вогнутый).

Так как $I(t) \geq 0, \quad \ddot{I}(t) > 0$ (причем $\lim\limits_{t\to\infty} \ddot{I}\left(t\right) \neq 0$ в силу (4.11)), то для непрерывно дифференцируемой функции $I(t)$ справедливо утверждение: начиная с некоторого момента времени $t_0 \geq 0$, функция $I(t)$ начнет неограниченно возрастать. Следовательно,

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = \infty \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \int_0^l Mw^2 dx = \infty. \tag{4.12}$$

На основании (4.12) доказана следующая теорема.

Т е о р е м а 4.2. *Если начальные условия (2.2) и параметры механической системы таковы, что справедливо условие (4.11), и краевые условия имеют вид (2.3), то решение $w(x,t)$ уравнения (2.1) условно неустойчиво.*

5. Обобщенный метод Галеркина

Решение уравнения (2.1) будем искать обобщеннным методом Галеркина (метод Галеркина-Петрова [2]), подчинив искомую функцию $w(x,t)$ краевым условиям (2.3) и начальным условиям (2.2), которые должны быть согласованы с краевыми условиями.

Согласно методу Галеркина приближенное решение уравнения (2.1) ищется в виде

$$w_{np(n)}(x,t) = \sum_{k=1}^{n} a_k(t) g_k(x), \tag{5.1}$$

где $g_k(x)$ - базисные функции, подобранные так, чтобы выполнялись заданные краевые условия, а функции $a_k(t)$ определяются из условия ортогональности невязки уравнения к системе поверочных функций $\{h_k(x)\}$. Индексом в скобках в (5.1) указывается длина отрезка ряда, и в дальнейшем это решение будем называть n-м приближением точного решения.

В качестве базисных возьмем функции

$$g_k(x) = A_k cos\gamma_k x + B_k sin\gamma_k x + C_k + D_k x, \qquad k = 1,2,3,\dots \tag{5.2}$$

Коэффициенты A_k, B_k, C_k, D_k и параметр γ_k выберем так, чтобы на каждом из концов отрезка $[0,l]$ выполнялись условия:

$$g_k(x) = g_k''(x) = 0; \quad k = 1,2,3,\dots \tag{5.3}$$

Тогда функция $w(x,t)$ в виде (5.1) будет удовлетворять условиям (2.3). Заметим, что γ_k и $g_k(x)$ - собственные значения и собственные функции краевой задачи

$$g''''(x) = -\gamma^2 g''(x) \tag{5.4}$$

с граничными условиями (5.3). Задача (5.4), (5.3) - самосопряженная и полностью определенная, следовательно, система функций $\{g_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ ортогональна на $[0,l]$ в обобщенном смысле, т. е. справедливы равенства

$$\int_0^l g_k(x)\, g_m''(x) dx = 0, \qquad \int_0^l g_k(x)\, g''''_m(x) dx = 0, \quad k \neq m \tag{5.5}$$

и из них

$$\int_0^l g_k'(x) g_m'(x) dx = 0, \quad \int_0^l g_k''(x) g_m''(x) dx = 0, \quad \int_0^l g_k''(x) g_m''''(x) dx = 0, \quad k \neq m,$$

$$\int_0^l g_m''^{\,2}(x) dx = \int_0^l g_m(x) g_m''''(x) dx = -\gamma_m^2 \int_0^l g_m(x) g_m''(x) dx = \gamma_m^2 \int_0^l g'^2_m(x) dx, \tag{5.6}$$

$$\int_0^l g''_m(x)g''''_m(x)dx = -\gamma_m^2 \int_0^l g''^{\,2}_m(x)dx = -\gamma_m^4 \int_0^l g'^2_m(x)dx,$$

$$\int_0^l g_m(x)g''_m(x)dx = -\gamma_m^2 \int_0^l g'^2_m(x)dx, \quad m = 1, 2, \ldots.$$

В этом случае, согласно теореме о разложении [3], любую функцию $U(x)$, четырехкратно непрерывно дифференцируемую в $(0, l)$ и удовлетворяющую соответствующим краевым условиям, можно разложить в ряд Фурье $U(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k g_k(x)$, абсолютно и равномерно сходящийся в $(0, l)$, где c_k – коэффициенты Фурье:

$$c_k = \left(\int_0^l g_k(x)g''_k(x)dx \right)^{-1} \cdot \int_0^l U(x)g''_k(x)dx.$$

В случае шарнирно закрепленных концов пластины

$$g_k(x) = sin\left(\gamma_k x\right), \; \gamma_k = \frac{k\pi}{l}, \; k = 1, 2, \ldots$$

и, поэтому, дополнительно выполняются равенства

$$\int_0^l g_k(x)g_m(x)dx = 0, \quad k \neq m, \quad \int_0^l g'^2_m(x)dx = \gamma_m^2 \int_0^l g_m^2(x)dx, \quad \int_0^l g_m^2(x)dx = \frac{\pi}{2}. \tag{5.7}$$

В силу равенств (5.5) - (5.7), возьмем в качестве поверочных функций $h_k(x) = g_k(x), \; k = 1, 2, \ldots$.

Условия ортогональности невязки уравнения (2.1) к системе функций $\{g_m(x)\}_{m=1}^n$ с учетом (5.6), (5.7) позволяют записать систему уравнений для $a_m(t)$:

$$\left[D\gamma_m^4 a_m(t) - N\gamma_m^2 a_m(t) + Ma''_m(t) + \beta a_m(t)\right]\delta_m = 0, \tag{5.8}$$

где $\delta_m = \int\limits_0^l g_m^2(x)dx, \; m = 1, 2, ..., n$. Заметим, что система (5.8) может быть получена методом разделения переменных.

Условия ортогональности невязки начальных условий (2.2) к системе функций $\{g_m(x)\}_{m=1}^n$ позволяют найти начальные значения $a_m(0)$:

$$a_m\left(0\right) = \frac{1}{\delta_m} \int_0^l f_1\left(x\right) g_m\left(x\right) dx, \quad a'_m\left(0\right) = \frac{1}{\delta_m} \int_0^l f_2\left(x\right) g_m\left(x\right) dx. \tag{5.9}$$

Таким образом, получили задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (5.8) с начальными условиями (5.9).

6. Устойчивость решения в n-ом приближении

Получим достаточные условия устойчивости тривиального решения системы дифференциальных уравнений (5.8) по отношению к возмущениям начальных условий. Запишем систему (5.8) в виде

$$A_m a''_m(t) + B_m a_m(t) = 0, \tag{6.1}$$

где

$$A_m = M\delta_m, \quad B_m = \left(D\gamma_m^4 - N\gamma_m^2 + \beta\right)\delta_m, \quad m = 1, \ldots, n.$$

Получим достаточные условия устойчивости по Ляпунову для произвольного решения системы уравнений (6.1). Поскольку уравнения системы линейные, то достаточно исследовать устойчивость тривиального решения $\{a_1(t), a_2(t), \ldots, a_n(t)\} \equiv \{0, 0, \ldots, 0\}$.

Введем функционал:

$$\Phi_n(t) = \sum_{m=1}^{n} \Big(A_m {a'}_m^2(t) + B_m a_m^2(t)\Big). \tag{6.2}$$

Найдем производную от Φ_n по t

$$\dot{\Phi}_n = 2\sum_{m=1}^{n} \left(A_m a'_m(t)\, a''_m(t) + B_m a_m(t)\, a'_m(t)\right). \tag{6.3}$$

Для функций $a_1(t), a_2(t), \ldots, a_n(t)$, являющихся решением системы уравнений (6.1), равенство (6.3) примет вид

$$\dot{\Phi}_n(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi_n(t) = \Phi_n(0). \tag{6.4}$$

Таким образом, получим равенство

$$\sum_{m=1}^{n} \Big(A_m {a'}_m^2(t) + B_m a_m^2(t)\Big) = \sum_{m=1}^{n} \Big(A_m {a'}_m^2(0) + B_m a_m^2(0)\Big).$$

из которого следует теорема.

Т е о р е м а 6.1. *Пусть выполнено условие*

$$D\gamma_m^4 - N\gamma_m^2 + \beta > 0, \tag{6.5}$$

тогда решение $\{a_1(t), a_2(t), \ldots, a_n(t)\}$ *системы уравнений (6.1) и его производная* $\{a'_1(t), a'_2(t), \ldots, a'_n(t)\}$ *устойчивы по отношению к возмущениям начальных значений* $a_1(0), a_2(0), \ldots, a_n(0)$, $a'_1(0), a'_2(0), \ldots, a'_n(0)$.

Условие (6.5) теоремы 6.1, в отличие от условия (3.8) теоремы 3.1, учитывает влияние реакции основания на устойчивость решения. При этом $\lambda_1 = \gamma_1^2$.

Определение. Число

$$\Delta_n = J(0) - \Phi_n(0) \tag{6.6}$$

будем называть невязкой решения (5.1), где $\Phi_n(0)$ есть значение функционала (6.2) в момент времени $t = 0$, т. е.

$$\Phi_n(0)=\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{M}{\delta_m}\left(\int\limits_0^l f_2\left(x\right)g_m\left(x\right)dx\right)^2+\frac{D\gamma_m^4-N\gamma_m^2+\beta}{\delta_m}\left(\int\limits_0^l f_1\left(x\right)g_m\left(x\right)dx\right)^2\right),$$

а $J(0)$ в соответствии с начальными условиями (2.2) примет вид:

$$J(0)=\int\limits_0^l\Big\{Mf_2^2(x)+Df_1''^2(x)-Nf_1'^2(x)+\beta f_1^2(x)\Big\}\,dx. \tag{6.7}$$

7. Сравнение приближенных решений

Докажем, что, начиная с некоторого номера n, последовательность $\{\Phi_k(t)\}_{k=n}^{\infty}$ возрастающая для любого $t\geq 0$. Для этого сравним два приближения $\Phi_n(t),\ \Phi_{n+1}(t)$, используя равенство (6.4), справедливое для любого $n\in N$:

$$\Phi_{n+1}(t)-\Phi_n(t)=\Phi_{n+1}(0)-\Phi_n(0)=\sum_{m=1}^{n+1}\Big(A_m{a'}_m^2(0)+B_ma_m^2(0)\Big)-$$

$$-\sum_{m=1}^{n}\Big(A_m{a'}_m^2(0)+B_ma_m^2(0)\Big)=A_{n+1}{a'}_{n+1}^2(0)+B_{n+1}a_{n+1}^2(0).$$

Таким образом

$$\Phi_{n+1}(t)\geq\Phi_n(t), \tag{7.1}$$

если выполняется условие

$$D\gamma_{n+1}^4-N\gamma_{n+1}^2+\beta\geq 0. \tag{7.2}$$

При выполнении условия (7.2) получим неравенство $D\gamma_m^4-N\gamma_m^2+\beta\geq 0$, справедливое для любого $m>n$, а, следовательно, последовательность $\{\Phi_k(t)\}_{k=n}^{\infty}$ возрастающая для любого $t\geq 0$. Условие (7.2) будет справедливым, в частности, в области устойчивости (3.8).

8. Исследование функционала в предельном случае

Рассмотрим функционал (6.2) при $n\to\infty$. Введем обозначение

$$\lim_{n\to\infty}w_{np(n)}(x,t)=w_{np(\infty)}(x,t),\quad \lim_{n\to\infty}\Phi_n(t)=\Phi_\infty(t).$$

В дальнейшем решение $w_{\text{пр}(\infty)}(x,t)$ будем называть предельным приближенным решением.

В силу равенства (6.4) получим

$$\Phi_\infty(t)=\Phi_\infty(0)=\sum_{m=1}^{\infty}\Big(A_m{a'}_m^2\left(0\right)+B_ma_m^2\left(0\right)\Big). \tag{8.1}$$

$$\Phi_\infty(t) = \int\limits_0^l \left\{ M\left(\sum_{m=1}^{\infty}\left(a'_m(0)\, g_m(x)\right)\right)^2 + D\left(\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m(0)\, g''_m(x)\right)\right)^2 - \right.$$

$$\left. -N\left(\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m(0)\, g'_m(x)\right)\right)^2 + \beta\left(\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m(0)\, g_m(x)\right)\right)^2 \right\} dx.$$

Так как $a_m(0), a'_m(0)$ в соответствии с (5.9) являются коэффициентами рядов Фурье для функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, то в соответствии с (3.4), (4.7) окончательно получим

$$\Phi_\infty(t) = \int\limits_0^l \left\{ M f_2^2(x) + D f''^2_1(x) - N f'^2_1(x) + \beta f_1^2(x) \right\} dx = \Phi_{\text{точ}}(0) = \Phi_{\text{точ}}(t).$$

Таким образом, невязку (6.6) приближенного решения $w_{np(n)}(x,t)$ можно вычислить по формуле

$$\Delta_n = \left|\Phi_\infty(t) - \Phi_n(t)\right|. \tag{8.2}$$

Определение. Функцию $R_\infty(x,t)$ будем называть остаточным членом предельного приближенного решения, если

$$w_{\text{точ}}(x,t) = w_{np(\infty)}(x,t) + R_\infty(x,t), \tag{8.3}$$

где $w_{\text{точ}}(x,t)$ - точное решение начально-краевой задачи (2.1) - (2.3).

Так как уравнение (2.1) линейное, то, учитывая (8.3), получим уравнение

$$M\ddot{w}_{\text{пр}(\infty)}(x,t) + D w''''_{\text{пр}(\infty)}(x,t) + N w''_{\text{пр}(\infty)}(x,t) + \beta w_{\text{пр}(\infty)}(x,t) +$$

$$+ M\ddot{R}_\infty(x,t) + D R''''_\infty(x,t) + N R''_\infty(x,t) + \beta R_\infty(x,t) = 0, \quad x \in (0,l). \tag{8.4}$$

Условия ортогональности невязки уравнения (8.4) к базисным функциям $\{g_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ позволяют записать систему уравнений для $R_\infty(x,t)$:

$$\int\limits_0^l \Big(M\ddot{R}_\infty(x,t) + D R''''_\infty(x,t) + N R''_\infty(x,t) + \beta R_\infty(x,t) \Big) g_k(x) dx, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Так как система функций $\{g_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ полная, то

$$M\ddot{R}_\infty(x,t) + D R''''_\infty(x,t) + N R''_\infty(x,t) + \beta R_\infty(x,t) = 0, \quad x \in (0,l).$$

Таким образом, из (5.7) получим систему уравнений для определения $w_{\text{пр}(\infty)}(x,t)$:

$$M\ddot{w}_{\text{пр}(\infty)}(x,t) + D w''''_{\text{пр}(\infty)}(x,t) + N w''_{\text{пр}(\infty)}(x,t) + \beta w_{\text{пр}(\infty)}(x,t) = 0, \quad x \in (0,l)$$

с начальными условиями (2.2). Следовательно, в силу единственности решения задачи (2.1) - (2.3), получим

$$w_{\text{точ}}(x,t) = w_{\text{пр}(\infty)}(x,t), \quad R_\infty(x,t) \equiv 0. \tag{8.5}$$

9. Оценка остаточного члена и выбор начального порядка приближения

Определение. Функцию $R_n(x,t)$ будем называть остаточным членом n-го приближения (5.1), если

$$w_{\text{точ}}(x,t) = w_{\text{пр}(n)}(x,t) + R_n(x,t), \tag{9.1}$$

где $w(x,t)$ есть точное решение начально-краевой задачи (2.1)-(2.3). При этом функция $R_n(x,t)$ удовлетворяет граничным условиям:

$$R_n(x,t) = R_n''(x,t) = 0, \quad x = 0,\ x = l. \tag{9.2}$$

Так как уравнение (2.1) линейное, то, подставляя решение в виде (9.1), получим уравнение

$$M\ddot{w}_{np(n)}(x,t) + Dw''''_{np(n)}(x,t) + Nw''_{np(n)}(x,t) + \beta w_{np(n)}(x,t) +$$
$$+M\ddot{R}_n(x,t) + DR''''_n(x,t) + NR''_n(x,t) + \beta R_n(x,t) = 0, \quad x \in (0,l). \tag{9.3}$$

Условия ортогональности невязки уравнения (9.4) к базисным функциям $\{g_m(x)\}_{m=1}^n$ позволяют записать систему уравнений для $R_n(x,t)$:

$$\int\limits_0^l \Big(M\ddot{R}_n(x,t) + DR''''_n(x,t) + NR''_n(x,t) + \beta R_n(x,t) \Big) g_k(x)dx = 0, \quad k = 1,2,\dots. \tag{9.4}$$

с начальными условиями

$$\int\limits_0^l R_n(x,0)g_m(x)dx = 0, \quad \int\limits_0^l \dot{R}_n(x,0)g_m(x)dx = 0, \quad m = 1,...,n,$$

$$\int\limits_0^l R_n(x,0)g_m(x)dx = \int\limits_0^l f_1(x)g_m(x)dx, \tag{9.5}$$

$$\int\limits_0^l \dot{R}_n(x,0)g_m(x)dx = \int\limits_0^l f_2(x)g_m(x)dx, \quad m = n+1,...$$

В соответствии с граничными условиями (9.2), запишем первые n уравнений (9.3) в виде

$$Mb''_m(t) + C_m b_m(t) = 0, \tag{9.6}$$

где

$$b_m(t) = \int\limits_0^l R_n(x,t)g_m(x)dx, \quad C_m = D\gamma_m^4 - N\gamma_m^2 + \beta, \quad m = 1,\dots,n$$

с начальными условиями

$$b_m(0) = 0, \quad b'_m(0) = 0, \quad m = 1,...,n. \tag{9.7}$$

Решение задачи Коши (9.6), (9.7) имеет вид

$$b_m(t) \equiv 0, \Rightarrow \int_0^l R_n(x,t) sin(\gamma_m x)\, dx = 0, \quad m = 1, \ldots, n. \tag{9.8}$$

Проведем оценку остаточного члена. Пусть невязка приближенного решения (5.1) в момент времени $t = T$ равна Δ_n, тогда

$$\Delta_n = J(0) - \Phi_n(0) = J(T) - \Phi_n(T) =$$

$$= \int_0^l \Big\{ M\dot{w}^2(x,T) + Dw''^2(x,T) - Nw'^2(x,T) + \beta w^2(x,T) \Big\}\, dx -$$

$$- \int_0^l \Big\{ M\dot{w}^2_{\text{пр}(n)}(x,T) + D{w''_{\text{пр}(n)}}^2(x,T) - Nw'^2_{\text{пр}(n)}(x,T) + \beta w^2_{\text{пр}(n)}(x,T) \Big\}\, dx =$$

$$= \int_0^l \big\{ M \left(\dot{w}(x,T) - \dot{w}_{np(n)}(x,T)\right) \left(\dot{w}(x,T) + \dot{w}_{np(n)}(x,T)\right) +$$

$$+ D \Big(w''_{\text{точ}}(x,T) - w''_{\text{пр}(n)}(x,T) \Big) \Big(w''(x,T) + w''_{\text{пр}(n)}(x,T) \Big) -$$

$$- N \Big(w'_{\text{точ}}(x,T) - w'_{\text{пр}(n)}(x,T) \Big) \left(w'(x,T) + w'_{np(n)}(x,T) \right) +$$

$$+ \beta \left(w(x,T) - w_{np(n)}(x,T) \right) \left(w(x,T) + w_{np(n)}(x,T) \right) \big\}\, dx =$$

$$= \int_0^l \Big\{ M\dot{R}_n(x,T) \Big(\dot{R}_n(x,T) + 2\dot{w}_{np(n)}(x,T) \Big) + DR''_n(x,T) \left(R''_n(x,T) + 2w''_{np(n)}(x,T) \right) -$$

$$- NR'_n(x,T) \left(R'_n(x,T) + 2w'_{np(n)}(x,T) \right) + \beta R_n(x,T) \left(R_n(x,T) + 2w_{np(n)}(x,T) \right) \big\}\, dx =$$

$$= \int_0^l \Big\{ M\dot{R}^2_n(x,T) + DR''^2_n(x,T) - NR'^2_n(x,T) + \beta R^2_n(x,T) \Big\}\, dx +$$

$$+ 2 \int_0^l \Big\{ M\dot{R}_n(x,T)\dot{w}_{np(n)}(x,T) + DR''_n(x,T)w''_{np(n)}(x,T) -$$

$$- NR'_n(x,T)w'_{np(n)}(x,T) + \beta R_n(x,T)w_{np(n)}(x,T) \Big\}\, dx =$$

$$= \int_0^l \Big\{ M\dot{R}^2_n(x,T) + DR''^2_n(x,T) - NR'^2_n(x,T) + \beta R^2_n(x,T) \Big\}\, dx +$$

$$+ 2 \int_0^l \Big\{ M\dot{R}_n(x,T)\dot{w}_{np(n)}(x,T) + w_{np(n)}(x,T) \left[DR''''_n(x,T) + NR''_n(x,T) + \beta R_n(x,T) \right] \big\} dx =$$

$$= \int_0^l \Big\{ M\dot{R}^2_n(x,T) + DR''^2_n(x,T) - NR'^2_n(x,T) + \beta R^2_n(x,T) \Big\}\, dx +$$

$$+2\int\limits_0^l \Big\{M\dot{R}_n(x,T)\dot{w}_{np(n)}(x,T) - M\ddot{R}_n(x,T)w_{np(n)}(x,T)\Big\}dx.$$

Согласно (9.8), получим

$$\Delta_n = \int\limits_0^l \Big\{M\dot{R}_n^2(x,T) + DR_n''^2(x,T) - NR'^2_n(x,T) + \beta R_n^2(x,T)\Big\}\,dx. \tag{9.9}$$

Согласно граничным условиям (9.2), используя неравенства Рэлея [1, с.138] и Коши-Буняковского, можно записать оценки

$$\int\limits_0^l R_n''^2(x,T)dx \geq \lambda_{n+1}\int\limits_0^l R'^2_n(x,T)dx, \quad \int\limits_0^l R'^2_n(x,T)dx \geq \frac{R_n^2(x,T)}{l}, \tag{9.10}$$

где λ_{n+1} - $(n+1)$-е собственное значение краевой задачи $\psi''''(x) = -\lambda\psi''(x)$ с краевыми условиями (9.2). При этом $\lambda_{n+1} = \gamma_{n+1}^2$.

Используя (9.10), из (9.9) окончательно получим

$$\Delta_n \geq \int\limits_0^l (D\lambda_{n+1} - N)\,R'^2_n(x,T)dx \geq \frac{D\lambda_{n+1} - N}{l}R_n^2(x,T), \tag{9.11}$$

если выполняется условие

$$N < \lambda_{n+1}D. \tag{9.12}$$

Таким образом, в любой точке $x \in [0,l]$ в любой момент времени $t \geq 0$ справедлива оценка

$$|R_n(x,t)| \leq \frac{\Delta_n l}{D\lambda_{n+1} - N}, \tag{9.13}$$

при условии (9.12). Следовательно, порядок начального приближения находим из условия (9.12):

$$n_0 = \begin{cases} 1, \text{ если } N < \lambda_1 D, \\ \left[\dfrac{l}{\pi}\sqrt{\dfrac{N}{D}}\right], \text{ если } N \geq \lambda_1 D. \end{cases} \tag{9.14}$$

10. Пример

Проведем процедуру метода Галеркина для n приближений в случае шарнирного закрепления концов упругой пластины.

Рассмотрим отдельно решение каждого уравнения (5.8):

1) Если $B_i = 0$, то решение задачи Коши (6.1), (5.9)

$$a_i(t) = a_i(0) + \dot{a}_i(0)t. \tag{10.1}$$

Следовательно, если $\dot{a}_i(0) = 0$, то решение i-го уравнения условно устойчиво, иначе условно неустойчиво.

2) Если $B_i > 0$, то решение задачи Коши (6.1), (5.9)

$$a_i(t) = a_i(0)cos\sqrt{\frac{B_i}{A_i}}t + \sqrt{\frac{A_i}{B_i}}\dot{a}_i(0)sin\sqrt{\frac{B_i}{A_i}}t. \qquad (10.2)$$

Следовательно, решение i-го уравнения условно устойчиво.

3) Если $B_i < 0$, то решение задачи Коши (6.1), (5.9)

$$a_i(t) = \frac{1}{2}\left(a_i(0) + \sqrt{-\frac{A_i}{B_i}}\dot{a}_i(0)\right)e^{\sqrt{-\frac{B_i}{A_i}}t} + \frac{1}{2}\left(a_i(0) - \sqrt{-\frac{A_i}{B_i}}\dot{a}_i(0)\right)e^{-\sqrt{-\frac{B_i}{A_i}}t}. \qquad (10.3)$$

Следовательно, если $\sqrt{-B_i}a_i(0) + \sqrt{A_i}\dot{a}_i(0) = 0$, то решение i-го уравнения условно устойчиво, иначе условно неустойчиво.

В некоторых случаях можно найти точное решение задачи (2.1) - (2.3). Пусть заданы начальные условия

$$w(x,0) = 0,01 \cdot sin\left(\frac{4\pi x}{l}\right), \quad \dot{w}(x,0) = 0,01 \cdot sin\left(\frac{4\pi x}{l}\right), \qquad (10.4)$$

тогда условия (5.9) примут вид

$$a_k(0) = \begin{cases} 0, & k \neq 4, \\ 0,01, & k = 4. \end{cases} \qquad \dot{a}_k(0) = \begin{cases} 0, & k \neq 4, \\ 0,01, & k = 4. \end{cases} \qquad (10.5)$$

Используя решения (10.1) - (10.3), получим точное решение (так как $a_k(t) \equiv 0,\ k \neq 4$)

$$w(x,t) = \begin{cases} 0,01 \cdot (1+t)\, sin\gamma_4 x \quad \text{при} \quad D\gamma_4^4 - N\gamma_4^2 + \beta = 0, \\ 0,01 \cdot \left(cos\sqrt{\frac{D\gamma_4^4 - N\gamma_4^2 + \beta}{M}}t + \sqrt{\frac{M}{D\gamma_4^4 - N\gamma_4^2 + \beta}}sin\sqrt{\frac{D\gamma_4^4 - N\gamma_4^2 + \beta}{M}}t\right) \times \\ \times sin\gamma_4 x \quad \text{при} \quad D\gamma_4^4 - N\gamma_4^2 + \beta > 0, \\ 0,01 \cdot \left(ch\sqrt{-\frac{D\gamma_4^4 - N\gamma_4^2 + \beta}{M}}t + \sqrt{-\frac{M}{D\gamma_4^4 - N\gamma_4^2 + \beta}}sh\sqrt{-\frac{D\gamma_4^4 - N\gamma_4^2 + \beta}{M}}t\right) \times \\ \times sin\gamma_4 x \quad \text{при} \quad D\gamma_4^4 - N\gamma_4^2 + \beta < 0. \end{cases}$$

Рассмотрим следующую механическую систему: пластина изготовлена из алюминия ($E = 7 \cdot 10^{10}$, $\rho_{\text{пл}} = 8480$), а параметры механической системы имеют значения $l = 2$, $h = 0,005$, $M = \rho_{\text{пл}}h = 42,4$, $\nu = 0,31$, $D = \dfrac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)} = 806,7$, $N = 1000$, $\beta = 4$ (все значения приведены в системе СИ).

Так как $D\gamma_4^4 - N\gamma_4^2 + \beta > 0$, то получим точное решение

$$w(x,t) = 0,01 \cdot \left(cos\sqrt{\frac{D\gamma_4^4 - N\gamma_4^2 + \beta}{M}}t + \sqrt{\frac{M}{D\gamma_4^4 - N\gamma_4^2 + \beta}}sin\sqrt{\frac{D\gamma_4^4 - N\gamma_4^2 + \beta}{M}}t\right)sin\gamma_4 x.$$

В случае, когда бесконечное число членов разложения начальных функций (2.2) в ряд Фурье ненулевые, точное решение получено быть не может.

Рассмотрим предложенную механическую систему. Пусть начальные условия имеют вид $w(x,0) = 0,01 \cdot x^3\left(l-x\right)^3 \quad \dot{w}(x,0) = -0,005 \cdot x^4\left(l-x\right)^4$.

Применяя теорему 3.1, получим, что при $N < 7961,8$ решение уравнения (2.1) устойчиво, следовательно, решение для нашей механической системы устойчиво по Ляпунову и порядок начального приближения $n_0 = 1$.

Пусть решение уравнения (2.1) необходимо найти с точностью $\varepsilon = 10^{-10}$. С помощью математической системы Mathcad для данных значений параметров получим, что при $n = 21$ в соответствии с (9.11) выполняется оценка $|R_n(x,t)| \leq 7,085 \cdot 10^{-11}$ и решение имеет вид

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^{21} \left(a_i(0) cos \sqrt{\frac{D\gamma_i^4 - N\gamma_i^2 + \beta}{M}} t + \right.$$

$$\left. + \dot{a}_i\,(0) \sqrt{\frac{M}{D\gamma_i^4 - N\gamma_i^2 + \beta}} sin \sqrt{\frac{D\gamma_i^4 - N\gamma_i^2 + \beta}{M}} t \right) sin\gamma_i x,$$

где

$$a_i(0) = \frac{0,02}{\pi} \int_0^l x^3 \,(l-x)^3\, sin\gamma_i x dx, \quad \dot{a}_i(0) = -\frac{0,01}{\pi} \int_0^l x^4 \,(l-x)^4\, sin\gamma_i x dx.$$

11. Заключение

На основании анализа функционалов типа Ляпунова, построенных для дифференциального уравнения в частных производных, описывающего свободные колебания упругой пластины, доказана абсолютная и равномерная сходимость приближенных решений этого уравнения, полученных обобщенным методом Галеркина, к их точному решению. Получен критерий определения порядка приближенного решения для отыскания точного решения с заданной точностью.

Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (2009-2013г.г.), ГК №П1122, а также поддержана грантом РФФИ № 09-01-97005.

Список литературы

1. Шестаков А. А. Обобщенный прямой метод Ляпунова для систем с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1990. – 320 с.

2. Марчук Г. И., Агошков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. – М.: Наука, 1981. – 416 с.

3. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. – М.: Наука, 1968. – 503с.

Дата поступления 22.05.2010

Criterion of determination of order of Galerkin's approximation of decision of initially boundary value problems

© A. V. Ankilov[3], P. A. Velmisov[4]

Abstract. On account of analysis of the functional of Lyapounov's type constructed for partial differential equation, describing of the plate free vibrations, the absolute and uniform convergence of the approximate decisions of this equations obtained by the Galerkin's method to the exact decision is proved. The criterion of determination of order of approximate decision for the finding of exact decision with given accuracy is obtained. The developed criterion is maybe used under constructing of the decisions of broad class of others linear partial differential equations.
Key Words: dynamic stability; conditional stability; functional; partial differential equation.

References

1. Shestakov A. A. Generalized direct Lyapounov's method for system with divided parameters. – Russia, Moscow: Science, 1990. – 320 p.

2. Marchuk G. I., Agoshkov V. I. Leading into projection-grid methods. – Russia, Moscow: Science, 1981. – 416 p.

3. Kollatc L. Eigenvalue problems. – Russia, Moscow: Science, 1968. – 503 p.

[3]Associate professor of Higher Mathematics Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; ankil@ulstu.ru.
[4]Professor, Head of Higher Mathematics Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; velmisov@ulstu.ru.