

УДК 517.938

О топологически несопряженных диффеоморфизмах Морса-Смейла с тривиальными пучками сепаратрис

© В. З. Гринес¹, Е. Я. Гуревич², В. С. Медведев³

Аннотация. Работа посвящена построению примера двух топологически несопряженных сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса-Смейла трехмерной сферы с тривиальными пучками сепаратрис и изоморфными графами.

Ключевые слова: Топологическая эквивалентность, диффеоморфизмы Морса-Смейла, граф Пейкшото

1. Введение

Напомним, что диффеоморфизм $f : M^n \rightarrow M^n$, заданный на гладком замкнутом многообразии M^n , называется *диффеоморфизмом Морса-Смейла*, если выполняются следующие условия:

- 1) неблуждающее множество $\Omega(f)$ конечно и состоит из гиперболических периодических точек;
- 2) устойчивые и неустойчивые многообразия различных периодических точек пересекаются трансверсально.

В этой работе мы будем рассматривать диффеоморфизмы Морса-Смейла без гетероклинических пересечений, то есть такие диффеоморфизмы, для которых устойчивое и неустойчивое многообразия различных седловых точек не пересекаются.

Следуя идеям Е.А. Андроновой-Леонтович, А.А. Майера и М. Пейкшото, каждому такому диффеоморфизму f поставим в соответствие ориентируемый граф $\Gamma(f)$, множество вершин которого изоморфно неблуждающему множеству диффеоморфизма, а множество ребер — множеству сепаратрис седловых периодических точек. Диффеоморфизм f индуцирует на графе $\Gamma(f)$ автоморфизм $P(f)$.

Как следует, в частности, из работ [1], [9], в случае $n = 2$ граф (оснащенный некоторой дополнительной информацией о взаимном расположении сепаратрис) вместе с автоморфизмом является полным топологическим инвариантом. В случае $n = 3$ ситуация принципиально иная: на 3-многообразиях существует счетное множество топологически несопряженных диффеоморфизмов Морса-Смейла с изоморфными графами. Этот эффект связан прежде всего с возможностью дикого вложения замыкания сепаратрис седловых периодических точек в несущее многообразие, что приводит к необходимости введения новых инвариантов для описания такой ситуации (см. работы [2]–[6] в которых получена классификация диффеоморфизмов Морса-Смейла в предположениях различной общности).

В случае $n > 3$ одномерные сепаратрисы не могут быть дико вложены и, как показано в работе [10], граф снова является полным топологическим инвариантом для сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса-Смейла, множество неустойчивых сепаратрис которых одномерно и не содержит гетероклинических пересечений.

¹Профессор, НГСХА, Нижний Новгород; vgrines@yandex.ru.

²Старший преподаватель, ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород; elena_gurevich@list.ru.

³Старший научный сотрудник, НИИ ПМК при ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород; medvedev@unn.ac.ru.

В связи с вышеизложенным естественно возникает вопрос: является ли для $n = 3$ требование отсутствия дико вложенных пучков сепаратрис седловых периодических точек (точное определение дано ниже) достаточным для того, чтобы граф диффеоморфизма был полным топологическим инвариантом.

В данной работе дается отрицательный ответ на этот вопрос.

2. Вспомогательные определения и формулировка результата

Пусть M^n — топологическое многообразие размерности $n \geq 3$ и $N^k \subset \text{int } M^n$ — компактное топологическое многообразие размерности $k < n$, вообще говоря, с непустым краем. Согласно [7] многообразие N^k называется *локально плоским в точке* $x \in N^k$, если существует окрестность $U(x) \subset M^n$ точки x и гомеоморфизм $\varphi : U(x) \rightarrow \mathbf{R}^n$ такой, что $\varphi(N^k \cap U(x)) \subset \mathbf{R}^k$, где \mathbf{R}^n — евклидово пространство, а $\mathbf{R}^k \subset \mathbf{R}^n$ — гиперплоскость размерности k . Если многообразие N^k является локально плоским в каждой своей точке, то оно называется *локально плоским*. Заметим, что в последнем случае множество N^k является подмногообразием многообразия M^n . Если многообразие N^k не является локально плоским хотя бы в одной точке $x \in N^k$, то оно называется *диким* в M^n .

Локальная плоскостность подмногообразия N^k в многообразии M^n в ряде случаев влечет за собой "тривиальность" подмногообразия N^k , означающую, что многообразие N^k может быть переведено в стандартный объект гомеоморфизмом объемлющего многообразия M^n .

Так, из [11] (§1 гл. 4) следует, что локально плоская компактная дуга l^4 в евклидовом пространстве \mathbf{R}^n (или любом триангулируемом многообразии M^n) является ручной, то есть может быть переведена в отрезок прямой (объединение одномерных граней триангуляции) гомеоморфизмом пространства \mathbf{R}^n (многообразия M^n). В силу [7] локально плоская сфера S^{n-1} в \mathbf{R}^n (S^n) является тривиально вложенной, то есть может быть отображена гомеоморфизмом пространства \mathbf{R}^n (сферы S^n) в стандартную единичную сферу (экватор).

Однако, поведение объединений локально-плоских объектов может быть более сложным. Пусть $L = \{L^1, \dots, L^k\}$ — множество попарно различных прямолинейных лучей в евклидовом пространстве \mathbf{R}^3 , выходящих из начала координат O ($k > 1$).

О п р е д е л е н и е 2.1. *Подмножество $L \subset \mathbf{R}^3$ называется k -пучком, если существует гомеоморфизм $h : L \rightarrow L$. При этом k -пучок L называется *ручным*, если существует гомеоморфизм $H : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ такой, что $H(L) = L$; в противном случае k -пучок называется *L диким*.*

В работе [8] построен пример так называемого *умеренно дикого k -пучка*, то есть такого дикого k -пучка L , что каждая дуга, входящая в этот пучок, является локально-плоской.

В работе [12] построены диффеоморфизмы Морса-Смейла на сфере S^3 , сепаратрисы которых образуют умеренно дикие пучки. Отсюда следует, в частности, что два диффеоморфизма Морса-Смейла, имеющие изоморфные графы, могут быть топологически не сопряженными даже в случае локально-плоских сепаратрис.

Обозначим через $\Sigma_6(S^3)$ класс сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса-Смейла сферы S^3 , обладающих следующими свойствами:

- 1) для любого $f \in \Sigma_6(S^3)$ неблуждающее множество $\Omega(f)$ состоит в точности из 6 неподвижных точек: одного источника, четырех седел и пяти стоков;

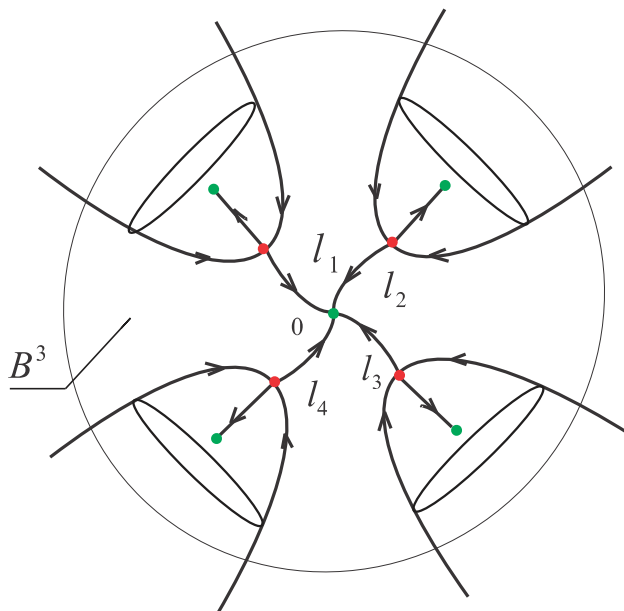
⁴Компактной дугой $l \subset M^n$ будем называть образ отрезка $[0, 1]$ при отображении $e : [0, 1] \rightarrow M^n$, таком, что сужение e на l является гомеоморфизмом.

- 2) неустойчивые многообразия всех седловых точек одномерны и их замыкания являются ручными дугами;
- 3) существует стоковая точка ω_0 , в области притяжения $W^s(\omega_0)$ которой лежат в точности четыре одномерные неустойчивые сепаратрисы l_1, l_2, l_3, l_4 (по одной от каждой седловой точки);
- 4) множество $L(f) = \bigcup_{i=1}^{i=4} l_i \cup \omega_0$ является тривиальным пучком в $W^s(\omega_0)$ ⁵.

Отметим, что все диффеоморфизмы из класса $\Sigma_6(S^3)$ имеют изоморфные графы.

Теорема 2.1. *Существуют два топологически несопряженных диффеоморфизма $f, f' \in \Sigma_6(S^3)$.*

3. Доказательство теоремы 2.1.



Р и с у н о к 3.1

Фазовый портрет диффеоморфизма из класса $\Sigma_{5,\infty}(\mathbf{R}^3)$.

Обозначим через $\Sigma_{5,\infty}(\mathbf{R}^3)$ класс диффеоморфизмов евклидовой плоскости такой, что для любого гомеоморфизма $f \in \Sigma_{5,\infty}(\mathbf{R}^3)$ выполняются следующие свойства:

- 1) существует шар $B^3 \in \mathbf{R}^3$ такой, что $f(B^3) \subset \text{int } B^3$ и $\Omega(f) \subset \text{int } B^3$;
- 2) $\Omega(f)$ состоит в точности из четырех седловых и пяти стоковых неподвижных гиперболических точек;
- 3) неустойчивые многообразия всех седловых точек одномерны и их замыкания являются ручными дугами;
- 4) начало координат является стоковой точкой ω_0 , в области притяжения которой лежат в точности четыре одномерные неустойчивые сепаратрисы l_1, l_2, l_3, l_4 (по одной от каждой седловой точки диффеоморфизма f);

⁵Мы отождествляем здесь $W^s(\omega_0)$ с \mathbf{R}^3 .

5) множество $L(f) = \bigcup_{i=1}^{i=4} l_i \cup \omega_0$ является тривиальным пучком в $W^s(\omega_0)$.

С помощью одноточечной компактификации пространства \mathbf{R}^3 любой диффеоморфизм $f \in \Sigma_{5,\infty}(\mathbf{R}^3)$ можно доопределить до диффеоморфизма $\hat{f} \in \Sigma_6(S^3)$ ⁶, ограничение которого на сферу S^3 с одной выколотой точкой N топологически сопряжено диффеоморфизму f , а точка N является для диффеоморфизма \hat{f} гиперболическим источником. Таким образом, для доказательства теоремы 2.1. достаточно построить два топологически несопряженных диффеоморфизма f, f' из $\Sigma_{5,\infty}(\mathbf{R}^3)$.

Схема построения диффеоморфизмов f, f' такова.

Шаг 1. Построение диффеоморфизма f .

Пусть $\theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi], \rho \in [0, +\infty)$ — сферические координаты в \mathbf{R}^3 . Вначале определим поток X_0^t соотношениями $X_0^t(\theta, \varphi, \rho) = (\theta, \varphi, e^{-t}\rho)$. Поток X_0^t имеет единственное состояние равновесия - гиперболический устойчивый узел, находящийся в начале координат O . Модифицируем поток X_0^t в стиле Черри следующим образом. Фиксируем четыре траектории этого потока и “раздувая” их, присоединим:

- 1) в точности 4 седла, для которых неустойчивые многообразия одномерны и принадлежат прямолинейным лучам, идущим из начала координат;
- 2) 4 устойчивых узла, не совпадающих с началом координат и лежащих в замыкании неустойчивых сепаратрис присоединенных седел.

Обозначим полученный поток X^t и определим диффеоморфизм f как сдвиг на единицу времени вдоль траекторий потока X^t .

Шаг 2 Построение гомеоморфизма g , удовлетворяющего следующим условиям:

- 1) g является диффеоморфизмом всюду, кроме, возможно, начала координат.
- 2) $\Omega(g) = \Omega(f)$ и g совпадает с диффеоморфизмом f в инвариантных окрестностях устойчивых и неустойчивых многообразий седловых неподвижных точек.
- 3) g топологически не сопряжен с f ;

Шаг 3 Построение диффеоморфизма f' .

Сгладим отображение g в окрестности начала координат таким образом, чтобы полученный в результате диффеоморфизм f' был топологически сопряжен с g .

По построению диффеоморфизмы f и f' принадлежат классу $\Sigma_{5,\infty}(\mathbf{R}^3)$ и не являются топологически сопряженными.

Ниже мы подробно описываем построение каждого диффеоморфизма.

3.1. Реализация шагов 1)-3)

Шаг 1

Для присоединения седловых состояний равновесия мы будем использовать вспомогательный поток Y^t в евклидовом пространстве \mathbf{R}^3 , и который задается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = \psi_1(x, y, z) \\ \dot{y} = y\psi_2(x, y, z). \\ \dot{z} = z\psi_3(x, y, z), \text{ где} \end{cases}$$

где $\psi_1: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ — гладкая функция, такая, что:

- а) $\psi_1(x, y, z) = -1$ для любых точек (x, y, z) , лежащих вне цилиндра $B_1 = \{(x, y, z) \mid |x| \leq 1, y^2 + z^2 \leq 1\}$;

⁶Подробное описание этой процедуры см. в [10].

b) $\psi_1(x, y, z) < 0$ для любых точек (x, y, z) , лежащих вне пара $B_3 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1/16\}$;

c) $\psi_1(x, y, z) > 0$ для любых точек $(x, y, z) \in B_3$;

d) $\psi_1(x, y, z)$ является регулярной в точках окружности ∂B_3 ;

для $i = 2, 3$ функция $\psi_i : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ — гладкая функция, удовлетворяющая следующим условиям:

a) $\psi_i(x, y, z) = 0$ для любых точек (x, y, z) , лежащих вне цилиндра B_1 ;

b) $\psi_i(x, y, z) < 0$ для любых точек $(x, y, z) \in B_1$;

c) $\psi_i(x, y, z) = -1$ для любых точек (x, y, z) , принадлежащих цилиндру $B_2 = \{(x, y, z) | |x| \leq \frac{1}{2}, y^2 + z^2 \leq \frac{1}{4}\}$.

Поток Y^t имеет ровно два состояния равновесия: седло в точке $P = (-1/4, 0, 0)$ и устойчивый узел в точке $Q = (1/4, 0, 0)$, оба состояния равновесия являются гиперболическими. Неустойчивыми сепаратрисами точки P является интервал $\{|x_1| < \frac{1}{4}, x_2 = 0, x_3 = 0\}$, лежащий в области притяжения точки Q , и множество $\{x_1 < -\frac{1}{4}, x_2 = 0, x_3 = 0\}$.

Для каждого $i = 1, \dots, 4$ положим $\theta_i = \frac{\pi(i-1)}{3}$, $u_i = \{(\theta, \varphi, \rho) | \theta \in [\theta_i - \varepsilon, \theta_i + \varepsilon], \varphi \in [-\varepsilon, \varepsilon], \rho \in [e^{-1}, e]\}$, где $\varepsilon = \frac{\pi}{12}$ (области u_1, \dots, u_4 попарно не пересекаются).

Обозначим через $h_i : B_1 \rightarrow u_i$ диффеоморфизм, удовлетворяющий условию $h_i Y^t h_i^{-1}|_{\partial u_i} = X_0^t|_{\partial u_i}$, $i \in \{1, \dots, 4\}$ и переводящий отрезок $\{|x| < 1, y = z = 0\}$ в отрезок $\{\theta = \theta_i, \varphi = 0, \rho \in [e^{-1}, e]\}$.

Определим поток X^t следующим образом:

$$X^t(x) = \begin{cases} X_0^t(x), & \text{если } x \in \mathbf{R}^3 \setminus \bigcup_{i=1}^4 u_i \\ h_i(Y^t(h_i^{-1}(x))), & \text{если } x \in u_i, i \in \{1, \dots, 4\} \end{cases}$$

В каждой области u_i поток X^t имеет два гиперболических состояния равновесия: устойчивый узел и седло, неустойчивые сепаратрисы которого одномерны и лежат на луче $L_i = \{\theta = \theta_i, \varphi = 0\}$.

Сдвиг на единицу времени вдоль траекторий потока X^t является искомым диффеоморфизмом f .

Шаг 2

Определим вспомогательный диффеоморфизм $\Phi : \mathbf{R}^3 \setminus \{O\} \rightarrow \mathbf{R}^3 \setminus \{O\}$ соотношением

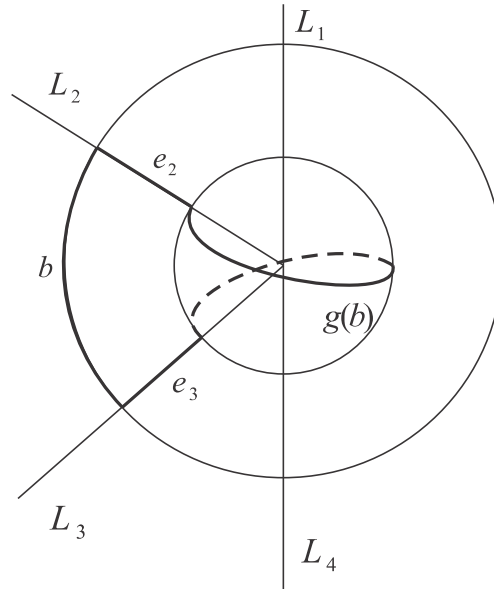
$$\Phi(\theta, \varphi, \rho) = (\theta, \varphi + 2\pi\psi(\theta), e^{-1}\rho),$$

где $\psi(\theta) : [0, \pi] \rightarrow [0, 1]$ — гладкая функция, равная нулю при $\theta \in [0, \theta_2 + \varepsilon]$, равная единице при $\theta \in [\theta_3 - \varepsilon, \pi]$ и монотонно возрастающая от нуля до единицы при $\theta \in [\theta_2 + \varepsilon, \theta_3 - \varepsilon]$.

ограничение диффеоморфизма Φ на границу каждой области $U_i = \{(\theta, \varphi, \rho) | \theta \in [\theta_i - \varepsilon, \theta_i + \varepsilon], \varphi \in [-\varepsilon, \varepsilon]\}$ совпадает с ограничением диффеоморфизма f на границу этой области.

Гомеоморфизм $g : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ зададим следующим образом.

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x = O \\ f(x), & \text{если } x \in \bigcup_{i=1}^4 U_i \\ \Phi(x), & \text{если } x \in \mathbf{R}^3 \setminus \bigcup_{i=1}^4 U_i. \end{cases}$$



Р и с у н о к 3.2

Нетривиальная дуга $b \cup g(b) \cup e_2 \cup e_3$.

З а м е ч а н и е 3.1. По построению гомеоморфизм g является диффеоморфизмом всюду, кроме, возможно, точки O , и обладает следующим свойством:

- любой сингулярный диск⁷ $D^2 \in \mathbf{R}^3$, ограниченный замкнутой дугой, состоящей из дуги $b = \{(\theta, \varphi, \rho) : \theta \in [\theta_2, \theta_3], \varphi = 0, \rho = e^{-1}\}$, ее образа $g(b) = \Phi(b)$ и отрезков $e_2 = \{(\theta, \varphi, \rho) : \theta = \theta_2, \varphi = 0, \rho \in [e^{-1}, e^{-2}]\}$, $e_3 = \{(\theta, \varphi, \rho) : \theta = \theta_2, \varphi = 0, \rho \in [e^{-1}, e^{-2}]\}$, пересекается с объединением лучей $L_1 \cup L_4$ (см. рис. 3.2).

Л е м м а 3.1. Отображения f и g не являются топологически сопряженными.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное: пусть существует гомеоморфизм $h : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ такой, что $g = h^{-1}fh$. Так как множество $Q = \mathbf{R}^3 \setminus (L_1 \cup L_4)$ инвариантно относительно отображений f, g , то верно равенство $g|_Q = h^{-1}fh|_Q$.

Правая часть этого равенства изотопна в области Q тождественному отображению $id : Q \rightarrow Q$ при помощи изотопии $H(x, t) : Q \times [0, 1] \rightarrow Q$, заданной соотношением $H(x, t) = h^{-1}\{f_t[h(x)]\}$, где f_t — диффеоморфизм сдвига на время $t \in [0, 1]$ вдоль траекторий потока X^t , построенного на первом шаге.

Тогда и гомеоморфизм $g|_Q$, стоящий в правой части равенства, изотопен тождественному при изотопии $H(x, t)$. Рассмотрим дугу b из замечания 3.1. и её образ $g(b)$. При изотопии $H(x, t)$ дуга $g(b)$ непрерывно деформируется в дугу b , при каждой дуге $b_t = H(b, t)$ лежит в области Q , и концевые точки дуги b_t принадлежат лучам L_2, L_3 . Тогда объединение $\bigcup_{i \in [0, 1]} b_t$ образует сингулярный диск D^2 , ограниченный замкнутой дугой, состоящей из дуги b , ее образа $g(b)$ и отрезков e_2, e_3 лучей L_2, L_3 соответственно, целиком лежащий в области Q . Получаем противоречие со свойством диффеоморфизма g , описанным в замечании.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Шаг 3

⁷Сингулярным диском D^2 называется образ стандартного единичного диска при непрерывном отображении.

Обозначим через $A : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ линейный диффеоморфизм, полученный сдвигом на единицу времени вдоль траекторий потока X_0^t .

Положим $B_\delta = \{(\theta, \varphi, \rho) : \rho \leq \delta\}$, $\delta \in (0, e^{-1})$. $S_0 = \partial B_\delta$, $S_1 = g(S_0)$. Отметим, что по построению $A(S_0) = S_1$.

Определим диффеоморфизм $h : B_\delta \setminus \text{int } g(B_\delta) \rightarrow B_\delta \setminus \text{int } g(B_\delta)$ следующим образом. Для любой точки $x \in S_0$ положим $h(x) = x$, если $x \in S_1$, то положим $h(x) = A[g^1(x)]$, и, наконец, для любой внутренней точки шарового слоя $B_\delta \setminus \text{int } g(B_\delta)$ определим $h(x)$ как произвольное продолжение гомеоморфизмов, заданных на границе. Доопределим гомеоморфизм h до гомеоморфизма $H : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ следующим образом:

$$H(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in O \cup \mathbf{R}^3 \setminus B_\delta \\ h(x), & \text{если } x \in B_\delta \setminus \text{int } g(B_\delta) \\ A^k(h(g^{-k}(x))), & \text{если } x \in \text{int } g(B_\delta), \end{cases}$$

где $k \in \mathbf{N}$ — такое, что $g^{-k}(x) \in B_\delta \setminus \text{int } g(B_\delta)$.

По построению $H(x)|_{\text{int } B_\delta} = AHg_{\text{int } B_\delta}^{-1}$. Положим $f' = HgH^{-1}$. По определению диффеоморфизм f' топологически сопряжен с g , для любой точки $x \in \mathbf{R}^n \setminus \text{int } B_\delta$ справедливо равенство $f'(x) = g(x)$ и для любой точки $x \in \text{int } B_\delta$ справедливы равенства $f'(x) = HgH^{-1} = AHg^{-1}H^{-1} = A(x)$. Множество одномерных сепаратрис $L(f')$ диффеоморфизма f' , принадлежащее области притяжения стоковой точки O является ручным пучком, так как множество сепаратрис $L(g)$ отображения g принадлежит семейству прямолинейных лучей, выходящих из точки O , и $L(f') = H(L(g))$.

Авторы благодарят грант РФФИ РАН (грант 08-01-00547а) за частичную финансовую поддержку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.Н. Безденежных, В.З. Гринес Динамические свойства и топологическая классификация градиентноподобных диффеоморфизмов на двумерных многообразиях. Часть 1. — Методы качественной теории дифференц. уравнений. Межвуз. темат. сб. научн. тр. под ред. Е.А. Лентович-Андроновой. Горький. 1985. — С. 22–38. Имеется перевод: Bezdenezhykh A.N., Grines V.Z. Dynamical properties and topological classification of gradientlike diffeomorphisms on two-dimensional manifolds I. — Sel. Math. Sov. 1992. V. 11. — P. 1–11.
2. Bonatti Ch., Grines V. Knots as topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3 . — Journal of Dynamical and Control Systems. 2000. V. 6, n. 4. — P. 579–602.
3. Х. Бонатти, В.З. Гринес, В.С. Медведев, Э.Пеку О диффеоморфизмах Морса-Смейла без гетероклинических кривых на три-многообразиях. — Труды математического института им. В.А. Стеклова. 2002. 236. — С. 58–69.
4. С. Bonatti, V. Grines, V. Medvedev, E. Pecou Three-manifolds admitting Morse-Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves. — Topology and its Applications. 2002. V. 111. — P. 335–344.
5. Bonatti Ch., Grines V., Medvedev V., Pècou E. Topological classification of gradientlike diffeomorphisms on 3-manifolds. — Topology. 2004. V. 43. — P. 369–391.
6. Бонатти Хр., Гринес В. З., Починка О. В. Классификация диффеоморфизмов Морса-Смейла с конечным множеством гетероклинических орбит на 3-многообразиях. — Доклады РАН. 2004. Т. 396, № 4. — С. 439–442.

7. Brown M. Locally flat imbeddings of topological manifold. – Ann. of Math. 1962. V. 75, n. 2. – P. 331–341.
8. Debruner H., Fox R. A mildly wild imbedding of an n-frame. – Duke Math. J. 1960. V. 27, n. 3. – P. 425–429.
9. Гринес В.З. Топологическая классификация диффеоморфизмов Морса-Смейла с конечным множеством гетероклинических траекторий на поверхностях. – Матем. заметки. 1993. Т. 54, вып. 3. – С. 3–17.
10. Гринес В.З., Гуревич Е.Я., Медведев В.С. Граф Пейкшото диффеоморфизмов Морса-Смейла на многообразиях размерности большей трех. – Труды математического института им. В.А. Стеклова. 2008. Т. 261. – С. 61–86.
11. Келдыш Л. В. Топологические вложения в евклидово пространство. – Труды математического института им. В. А. Стеклова. 1966. Т. 81. – 183 С.
12. O. Pochinka. Diffeomorphisms with mildly wild frame of separatrices. – Universitatis Iagelonicae Acta Mathematica. 2009. Fasciculus XLVII. – P. 149–154.

Дата поступления 01.06.2010

On topologically non-conjugated Morse-Smale diffeomorphisms with trivial frame of separatrices

© V. Grines⁸, E. Gurevich⁹, V. Medvedev¹⁰

Abstract. The present paper is devoted to construction of example of two topologically non-conjugated orientation preserving Morse-Smale diffeomorphisms of 3-dimensional sphere with trivial frames of separatrices and isomorphic graphs.

Key Words: Topological equivalence, Morse-Smale diffeomorphisms, graph Pexoto

REFERENCES

1. Bezdenezhykh A.N., Grines V.Z. Dynamical properties and topological classification of gradientlike diffeomorphisms on two-dimensional manifolds I. – Sel. Math. Sov. 1992. V. 11. – P. 1–11.
2. Bonatti Ch., Grines V. Knots as topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3 . – Journal of Dynamical and Control Systems. 2000. V. 6, n. 4. – P. 579–602.
3. Bonatti Ch., Grines V., Medvedev V.S. Pècou E. On Morse-Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves on 3-manifolds. – Trudy matematicheskogo instituta im. V.A. Steklova. 2002. T. 236. – C. 58–69.
4. C. Bonatti, V. Grines, V. Medvedev, E. Pecou Three-manifolds admitting Morse-Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves. – Topology and its Applications. 2002. V. 111. – P. 335–344.
5. Bonatti Ch., Grines V., Medvedev V., Pècou E. Topological classification of gradientlike diffeomorphisms on 3-manifolds. – Topology. 2004. V. 43. – P. 369–391.
6. Bonatti Chp., Grines V.Z., Pochinka O.V. Classification Morse-Smale with diffeomorphisms finite set of heteroclinic orbits on 3-manifolds. – Doklady RAN. 2004. V. 396, n. 4. – P. 439–442.
7. Brown M. Locally flat imbeddings of topological manifold. – Ann. of Math. 1962. V. 75, n. 2. – P. 331–341.
8. Debruner H., Fox R. A mildly wild imbedding of an n-frame. – Duke Math. J. 1960. V. 27, n. 3. – P. 425–429.
9. Grines V.Z. Topological classification of Morse-Smale diffeomorphisms with finite set of heteroclinic trajectories on surfaces. – Матем.заметки. 1993. V. 54, n. 3. – P. 3–17.
10. Grines V.Z., Gurevich E.Y., Medvedev V.S. Pexoto graph for Morse-Smale diffeomorphisms on manifolds of dimensions grater than three. – Trudy matematicheskogo instituta im. V.A. Steklova. 2008. V. 261. – P. 61–86.
11. Keldysh L. V. Topologycal embedding in Euclidian space. – Trudy matematicheskogo instituta im. V.A. Steklova. 1966. V. 81. – P. 1–183.
12. O. Pochinka. Diffeomorphisms with mildly wild frame of separatrices. – Universitatis Iagelonicae Acta Mathematica. 2009. Fasciculus XLVII. – P. 149–154.

⁸Professor, Nizhny Novgorod State Agricultural Academy, Nizhny Novgorod; vgrines@yandex.ru.

⁹Assistant professor, Nizhny Novgorod State University, Nizhny Novgorod; elena_gurevich@list.ru.

¹⁰Senior staff scientist, Institute of Applied Mathematics, Nizhny Novgorod; medvedev@unn.ac.ru.