УДК 517.937

Естественные расширения одного класса квазиэндоморфизмов пространства Лебега

© В. Г. Шарапов[1]

Аннотация. В статье предлагается метод построения естественных расширений квазиэндоморфизмов пространства Лебега и показывается, что эти расширения могут использоваться для нахождения инвариантной меры.

Ключевые слова: квазиэндоморфизмы пространства Лебега, естественные расширения, инвариантная мера.

1. Введение

Пусть $(M, \mathcal{F}, \mu)$ — пространство Лебега, т.е. пространство, изоморфное отрезку $(0, 1]$ с мерой Лебега.

Квазиэндоморфизмом называется измеримое несингулярное (прообраз множества меры 0 имеет меру 0) преобразование пространства M. Квазиавтоморфизмом называется взаимнооднозначный квазиэндоморфизм, обратный к которому есть также квазиэндоморфизм.

Измеримое разбиение ξ пространства M есть разбиение на прообразы точек для некоторого измеримого преобразования пространства M.

Для всякого измеримого разбиения ξ M/ξ есть фактор- пространство, т.е. пространство, элементами которого являются элементы разбиения ξ.

2. Постановка задачи

Пусть $M = (0, 1]$, f — действительная функция, определённая на $(0, 1]$ и удовлетворяющая условиям: 1. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$. 2. f непрерывна и строго возрастает. 3. Если $x_2 > x_1$, то $f(x_2) - f(x_1) > x_2 - x_1$. 4. $f(1) = K$, где K — натуральное число или $+\infty$.

Пусть $y = Tx = f(x)(\mod 1), x \in (0, 1], T1 = 1$. Вследствие свойства 2 почти всюду существует производная $f'(x)$, а в силу свойства 3 $f'(x) > 1$. Отрезок $(0, 1]$ разбивается на конечное или счётное число отрезков $\Delta_i, \Delta_i = (x_{i-1}, x_i]$, такие что $x_0 = 0$ и $f(x_i) = 1, i \geq 1$. При этом $\forall x \in \Delta_i$; $Tx = x_{i-1} + \int\limits_0^x m_i(y)dy$, где $m_i(y) = \dfrac{1}{f'(x)}, x \in \Delta_i$ и $y = f(x)(\mod 1)$.

3. Приведение квазиэндоморфизмов данного класса к инвариантной мере

Пространство M изоморфно множеству, состоящему из отрезков $M_i = \left\{(x, y) : 0 < x \leq 1, y = 1 + \dfrac{1}{i}\right\}$, соответствующих отрезкам Δ_i. Элемент разбиения

[1]Доцент кафедры фундаментальной информатики и оптимального управления, Волгоградский государственный университет, г. Волгоград; vsharapov99@mail.ru.

ξ — множество $C_x = \left\{x, 1+\frac{1}{i}\right\}$ с фиксированной координатой x, точка которой $\left(x, 1+\frac{1}{i}\right)$ имеет условную меру $m_i(x)$. В случае эндоморфизмов, т.е. сохраняющих меру преобразований, мера μ_ξ в пространстве M/ξ, индуцированная мерой μ, обладает свойством $\mu_\xi(C_x) = 1 \;\; \forall \;\; x \in (0,1]$. В случае квазиэндоморфизмов меры $\mu_\xi(C_x)$ образуют измеримую функцию $g(x) = \sum\limits_i m_i(x)$ со свойствами $g(x) \geq 0, \int\limits_0^1 g(x)dx = 1$. В дальнейшем удобнее использовать замену x на y и y на x, т.е. вместо C_x писать C_y, а вместо $g(x)$ писать $g(y)$.

Приведём квазиэндоморфизм T к инвариантной мере следующим образом: в каждом элементе C_y введём условные меры $m_i^*(y^*)$, где $m_i^*(y^*) = \dfrac{m_i(y)}{g(y)}$, а $y^* = \int\limits_0^y g(t)dt$.

Рассмотрим пример.

$$y = Tx = \begin{cases} \dfrac{5}{2}x, & 0 < x \leq \dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{5}{8} + \dfrac{3}{2}\left(x - \dfrac{1}{4}\right), & \dfrac{1}{4} < x \leq \dfrac{1}{2}, \\ 2\left(x - \dfrac{1}{2}\right), & \dfrac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

$$m_1(y) = \frac{1}{f'(x)} = \begin{cases} \dfrac{2}{5}, & 0 < y \leq \dfrac{5}{8}, \quad 0 < x \leq \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{2}{3}, & \dfrac{5}{8} < y \leq 1, \quad 0 < x \leq \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

$$m_2(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{2}, 0 < y \leq 1, \frac{1}{2} < x \leq 1.$$

T не сохраняет меру, так как, например,

$$\mu\left(T^{-1}\left(0, \frac{5}{8}\right]\right) = \mu\left(\left(0, \frac{1}{4}\right] \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{13}{16}\right]\right) = \frac{9}{16} \neq \mu\left(\left(0, \frac{5}{8}\right]\right).$$

Функция плотности меры μ_ξ

$$g(y) = \begin{cases} \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{9}{10}, & 0 < y \leq \dfrac{5}{8}, \\ \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{6}, & \dfrac{5}{8} < y \leq 1. \end{cases} \qquad \int\limits_0^1 g(y)dy = 1.$$

Приводим к инвариантной мере

$$m_1^*(y^*) = \frac{2}{5} \cdot \frac{10}{9} = \frac{4}{9}, \quad 0 < y^* \leq \frac{5}{8} \cdot \frac{9}{10} = \frac{9}{16},$$

$$m_1^*(y^*) = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{7} = \frac{4}{7}, \quad \frac{9}{16} < y^* \leq 1,$$

$$m_2^*(y^*) = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{9} = \frac{5}{9}, \quad 0 < y^* \leq \frac{9}{16},$$

$$m_2^*(y^*) = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{7} = \frac{3}{7}, \quad \frac{9}{16} < y^* \leq 1.$$

В результате получаем эндоморфизм T_1 с инвариантной мерой

$$y = T_1 x = \begin{cases} \frac{9}{4}x, & 0 < x \le \frac{1}{4}, \quad 0 < y \le \frac{9}{16}, \\ \frac{9}{16} + \frac{7}{4}\left(x - \frac{1}{4}\right), & \frac{1}{4} < x \le \frac{1}{2}, \quad \frac{9}{16} < y \le 1 \\ \frac{9}{5}\left(x - \frac{1}{2}\right), & \frac{1}{2} < x \le \frac{13}{16}, \quad 0 < y \le \frac{9}{16}, \\ \frac{9}{16} + \frac{7}{3}\left(x - \frac{13}{16}\right), & \frac{13}{16} < x \le 1, \quad \frac{9}{16} < y \le 1. \end{cases}$$

4. Построение естественных расширений

В [1] показано, как для эндоморфизмов T пространства M строятся естественные расширения — автоморфизмы пространства $M \times (0,1]$. Используя эту технику можно построить расширения кусочно-монотонных квазиэндоморфизмов.

Пусть T_1 — квазиэндоморфизмы рассматриваемого семейства и $T_1^{-1}x = (x_1, x_2, ...) = C_x$ — элемент разбиения $\xi = T_1^{-1}\varepsilon$, где ε — разбиение на точки. При этом точки x_i имеют условные меры $m_i(x) = \dfrac{1}{|f'(x_i)|}$. Согласно построению естественных расширений эндоморфизмов (см. [1]) полагаем

$T_2(x_1, y) = (x, ym_1(x)), 0 < y \le 1;$
$T_2(x_2, y) = (x, m_1(x) + ym_2(x)), 0 < y \le 1;$ (1)
$\ldots$
$T_2(x_n, y) = (x, m_1(x) + ... + m_{n-1}(x) + ym_n(x)), 0 < y \le 1;$
$\ldots$

T_2 не есть квазиэндоморфизм, так как его образом является не $Mx(0,1]$, а множество точек (x, y), для которых $x \in (0,1]$, а y удовлетворяет условию $0 < y \le g(x)$, т.е. образ — криволинейная трапеция, в которой один из отрезков $(0,1]$ заменён кривой $g(x) = \sum\limits_i m_i(x), 0 < x \le 1$.

T_2 является взаимнооднозначным квазигомоморфизмом пространства $M \times (0,1]$ на указанную криволинейную трапецию площади 1. Для рассмотренного выше примера

$$y = T_2(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{5}{2}x, \frac{2}{5}y\right), & 0 < x \le \frac{1}{4}, \quad 0 < y \le 1, \\ \left(\frac{5}{8} + \frac{3}{2}(x - \frac{1}{4}), \frac{2}{3}y\right), & \frac{1}{4} < x \le \frac{1}{2}, \quad 0 < y \le 1, \\ \left(2\left(x - \frac{1}{2}\right), \frac{2}{5} + \frac{1}{2}y\right), & \frac{1}{2} < x \le \frac{13}{16}, \quad 0 < y \le 1, \\ \left(\frac{5}{8} + 2(x - \frac{13}{16}), \frac{2}{3} + \frac{1}{2}y\right), & \frac{13}{16} < x \le 1, \quad 0 < y \le 1. \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} \frac{2}{5} + \frac{1}{2} = \frac{9}{10}, & 0 < y \le \frac{5}{8}, \\ \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}, & \frac{5}{8} < y \le 1. \end{cases} \quad \int\limits_0^1 g(y)dy = \frac{9}{10} \cdot \frac{5}{8} + \frac{7}{6} \cdot \frac{3}{8} = 1.$$

Образом куба $(0,1] \times (0,1]$ получается множество $\left(\left(0, \frac{5}{8}\right] \times \left(0, \frac{9}{10}\right]\right) \cup \left(\left(\frac{5}{8}, 1\right] \times \left(0, \frac{7}{6}\right]\right)$ (3) меры 1.

Чтобы сделать T_2 автоморфизмом, нужно вторые сомножители в декартовых произведениях в (3) сделать отрезками $(0,1]$, т.е. умножить $\left(0,\frac{9}{10}\right]$ на $\frac{10}{9}$, а $\left(0,\frac{7}{6}\right]$ умножить на $\frac{6}{7}$. Чтобы площади прямоугольников не изменились, длины первых сомножителей в декартовых произведениях нужно разделить соответственно на $\frac{10}{9}$ и на $\frac{6}{7}$. То есть надо заменить (3) на $\left(\left(0,\frac{9}{16}\right]\times(0,1]\right)\cup\left(\left(\frac{9}{16},1\right]\times(0,1]\right)$.

Чтобы было $0<y\le 1$, мы умножили y на $\frac{10}{9}$ при $x\le\frac{5}{8}$ и умножили на $\frac{6}{7}$ при $x>\frac{5}{8}$. Поэтому в (2) мы тоже умножим y на эти числа при соответствующих x, а чтобы общая площадь не стала больше 1, умножим в (2) x соответственно на $\frac{9}{10}\left(\frac{7}{6}\right)$. В результате получится автоморфизм T_3 пространства $(0,1]\times(0,1]$

$$T_3(x,y)=\begin{cases}\left(\frac{9}{4}x,\frac{4}{9}y\right), & 0<x\le\frac{1}{4}, \quad 0<y\le 1,\\ \left(\frac{9}{16}+\frac{7}{4}\left(x-\frac{1}{4}\right),\frac{4}{7}y\right), & \frac{1}{4}<x\le\frac{1}{2}, \quad 0<y\le 1,\\ \left(\frac{9}{5}\left(x-\frac{1}{2}\right),\frac{4}{9}+\frac{5}{9}y\right), & \frac{1}{2}<x\le\frac{13}{16}, \quad 0<y\le 1,\\ \left(\frac{9}{16}+\frac{7}{3}x,\frac{4}{7}+\frac{3}{7}y\right), & \frac{13}{16}<x\le 1, \quad 0<y\le 1.\end{cases}$$

Мы получили естественное расширение автоморфизма T_2, т.е. приведение к инвариантной мере расширения (1) квазиэндоморфизма T приводит к естественному расширению эндоморфизма T_1, полученного из T приведением к инвариантной мере. Отсюда получается, что построение расширения (1) может быть использовано для нахождения инвариантной меры.

Список литературы

1. Шарапов В.Г. Измеримые разбиения и естественные расширения эндоморфизмов пространства Лебега// Труды СВМО, 2006,т. 8, №2, С.24—27.

Дата поступления 19.05.2010

Natural extensions of one class of quasiendomorphisms of Lebesgue space

© **V. G. Sharapov**[2]

Abstract. In the article a construction of natural extensions of quasiendomorphisms of Lebesgue space is given. It is shown that these extentions can be used for construction of invariant measure.
Key Words: quasiendomorphisms of Lebesgue space,natural extensions, invariant measure.

References

1. Sharapov V. G. Measurable partitions and natural extensions of endomorphisms of Lebesgue spaces//Trudy SVMO, 2006, V.8, No2, 24—27. In Russian

[2]Associate Professor of Fundamental Informatics and Optimal Control Chair, Volgograd State University, Volgograd;vsharapov99@mail.ru