УДК 517.956

Построение расширенной характеристической системы для идеального газа в эллиптическом случае

© **С. Н. Алексеенко**[1], **Т. А. Шемякина**[2]

Аннотация. В данной статье исследуется система двух квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. В частном случае эта система описывает плоское установившееся безвихревое движение идеального газа при отсутствии трения и теплопроводности в окрестности поверхности перехода от дозвуковых скоростей к сверхзвуковым. Основным методом исследования является метод дополнительного аргумента. Исходная система приводится к характеристической форме, когда каждое уравнение содержит производные только от одной неизвестной функции. Для системы уравнений строится расширенная характеристическая система с дополнительным аргументом. При определенном значении дополнительного аргумента решение расширенной характеристической системы дает решение исходной системы уравнений.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка, метод дополнительного аргумента, расширенная характеристическая система.

1. Постановка задачи

Рассматривается система уравнений [1] плоского установившегося безвихревого движения идеального газа при отсутствии трения и теплопроводности в окрестности поверхности перехода от дозвуковых скоростей к сверхзвуковым:

$$\begin{cases} \frac{\partial\theta(\psi,\varphi)}{\partial\varphi} - P(W(\psi,\varphi))\frac{\partial W(\psi,\varphi)}{\partial\psi} = 0, \\ \frac{\partial\theta(\psi,\varphi)}{\partial\psi} + Q(W(\psi,\varphi))\frac{\partial W(\psi,\varphi)}{\partial\varphi} = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

где

$$P(W(\psi,\varphi)) = (1 - \frac{(\kappa-1)W^2}{2a_0^2})^{\frac{1}{\kappa-1}} \geq p_* > 0,$$

$$Q(W(\psi,\varphi)) = \frac{(1 - \frac{(\kappa+1)W^2}{2a_0^2})}{W(1 - \frac{(\kappa-1)W^2}{2a_0^2})^{\frac{-\kappa}{\kappa-1}}} \geq q_* > 0,$$

$W = \sqrt{u^2+v^2}$ - величина скорости; u, v - составляющие скорости по осям x, y соответственно, но вместо функций u и v введены полярные координаты $u = W\cos\theta$, $v = W\sin\theta$, где θ - угол между вектором скорости и осью x ; $\kappa = c_p/c_v$ - показатель адиабаты; a_0^2 - скорость звука в покоящемся газе; $\varphi(x,y)$ - потенциал скоростей и $\psi(x,y)$ - функция тока. Предполагаем, что $1 < \kappa < 2$, $W^2(\psi,\varphi) < \frac{2a_0^2}{\kappa+1}$.

Система уравнений (1.1) будет эллиптического типа, когда величина скорости газа W будет меньше скорости звука и гиперболического - когда величина скорости газа W будет больше скорости звука. Эта система является частным случаем системы Ф.И.Франкля [1]. В данной работе рассматривается эллиптический случай.

[1]Профессор кафедры математического анализа, Арзамасский педагогический институт, г. Арзамас; sn-alekseenko@yandex.ru.

[2]Доцент кафедры высшей математики, Санкт-Петербургский Государственный Политехнический университет, г. Санкт-Петербург; sh_tat@mail.ru.

В качестве области определения возьмем

$$\tilde{\Omega} = \{(\psi, \varphi) : -\infty < \psi < +\infty, 0 \le \varphi \le \varphi_M, \varphi_M > 0$$

.

Поставим для системы уравнений (1.1) задачу Коши:

$$\theta(\psi, 0) = \theta_0(\psi), W(\psi, 0) = W_0(\psi). \tag{1.2}$$

2. Построение расширенной характеристической системы

Для исследования задачи (1.1), (1.2) применяется метод дополнительного аргумента [2]. Вначале исходную систему приводим к так называемой характеристической форме, когда каждое уравнение содержит производные только по одной неизвестной функции. В данном случае это будет система из двух уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial \varphi} + ie\frac{\partial z}{\partial \psi} = F, \\ \frac{\partial W}{\partial \varphi} + ie\frac{\partial W}{\partial \psi} = G_2, \end{cases} \tag{2.1}$$

$$z(\psi, 0) = \Phi(\psi), W(\psi, 0) = W_0(\psi). \tag{2.2}$$

Здесь $e(W(\psi, \varphi)) = \sqrt{\frac{P(W(\psi,\varphi))}{Q(W(\psi,\varphi))}}$, функции F, G_2 выражаются через исходные данные Φ, W_0 явным образом.

Доказано следующее предложение.

П р е д л о ж е н и е 2.1. *Функция W определяемая из задачи (2.1), (2.2), и функция θ,*

определяемая из задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} + ie\frac{\partial \theta}{\partial \psi} = Re(z) - iIm(z), \\ \theta(\psi, 0) = \theta_0(\psi), \end{cases} \tag{2.3}$$

будут решением исходной задачи (1.1), (1.2).

Расширенная характеристическая система будет иметь вид

$$\begin{cases} \frac{dw_1(\psi,\varphi,s)}{ds} = G_2(w_1(\psi, \varphi, s), w_2(\psi, \varphi, s)), \\ w_1(\psi, \varphi, 0) = W_0(\psi r - i\int\limits_0^{\varphi} e(w_1(\psi, \varphi, \tau))d\tau), \\ \frac{dw_2(\psi,\varphi,s)}{ds} = F(w_1(\psi, \varphi, s), w_2(\psi, \varphi, s)), \\ w_2(\psi, \varphi, 0) = \Phi(\psi r - i\int\limits_0^{\varphi} e(w_1(\psi, \varphi, \tau))d\tau). \end{cases} \tag{2.4}$$

Искомые функции $w_1(\psi, \varphi, s), w_2(\psi, \varphi, s)$ зависят, кроме ψ, φ, еще от одного дополнительного аргумента s. Начальные данные - функции W_0, Φ считаем продолженными в комплексную плоскость.

Основным преимуществом новой расширенной характеристической системы по сравнению с системой уравнений в работах [3], [4] является то, что в ней полностью отсутствуют суперпозиции неизвестных функций, и сейчас значительно удобнее исследовать ее методом последовательных приближений.

Интегрируя дифференциальные уравнения из (2.4) по s и учитывая начальные условия там же, приходим к эквивалентной системе интегральных уравнений:

$$\begin{cases} w_1(\psi,\varphi,s) = W_0(\psi r - i\int\limits_0^{\varphi} e(w_1(\psi,\varphi,\tau))d\tau) + \int\limits_0^{s} G_2(w_1(\psi,\varphi,s), w_2(\psi,\varphi,s))d\tau, \\ w_2(\psi,\varphi,s) = \Phi(\psi r - i\int\limits_0^{\varphi} e(w_1(\psi,\varphi,\tau))d\tau) + \int\limits_0^{s} F(w_1(\psi,\varphi,s), w_2(\psi,\varphi,s))d\tau. \end{cases} \tag{2.5}$$

Доказывается, следующее предложение.

П р е д л о ж е н и е 2.2. *Если решения системы уравнений (2.5) удовлетворяют определенным условиям гладкости, тогда функции* $W(\psi,\varphi) = w_1(\psi,\varphi,\varphi)$ *,* $z(\psi,\varphi) = w_2(\psi,\varphi,\varphi)$ *, являются решением задачи (2.1), (2.2).*

А так как ранее доказано, что функции $\theta(\psi,\varphi), W(\psi,\varphi)$, определяемые из задачи (2.1), (2.2), (2.3) являются решением исходной задачи (1.1), (1.2), то мы получаем основной результат.

А именно, что функции $\theta(\psi,\varphi), W(\psi,\varphi)$, определяемые из расширенной характеристической системы (2.4), будут решением исходной задачи (1.1), (1.2), если они удовлетворяют определенным условиям гладкости.

Доказательство локального существования решения задачи может быть получено методом последовательных приближений.

Список литературы

1. Франкль Ф. И. Избранные труды по газовой динамике. – М.: Наука, 1973.–712 с.

2. Алексеенко С. Н., Панков П. С., Косов С. Г. Применение метода дополнительного аргумента к решению задачи Коши для системы уравнений изоэнтропического движения баротропного газа// Исслед. по интегро-дифференциальным уравнениям. - Бишкек: Илим, 2004, - Вып.33, - С. 43-48.

3. Алексеенко С.Н., Шемякина Т.А., Чезганов В.С. Локальное существование ограниченного решения системы Франкля в эллиптическом случае// Исслед. по интегро-дифференциальным уравнениям. - Бишкек: Илим, 2006, - Вып.35, - С. 148-152.

4. Алексеенко С.Н., Шемякина Т.А., Балакирева В.Б. Построение расширенной характеристической системы для системы Франкля в эллиптическом случае// Труды Средневолжского математического общества, 2007, Т.9; №1, - С. 53-61.

Дата поступления 27.08.2009

On a construction of the extended characteristic system for perfect gas of the elliptic type

© **S. N. Alekseenko**[3], **T. A. Shemyakina**[4]

Abstract. In this paper the system of two quasilinear differential partial equations of the first order is investigated. Among other applications, it describes steady-stated non-vortex motion of the perfect gas at lack of friction and heat conduction in a neighborhood of a surface of passage from subsonic speeds to supersonic. The basic research technique is the method of additional argument. The considered system is reduced to the characteristic form when each equation contains derivatives only from one unknown function. For the system of equations in the characteristic form the extended characteristic system with additional argument is obtained. It is proved that at the special value of the additional argument a solution of the characteristic system gives a solution of the original equations.

Key Words: differential partial equations of the first order, the method of additional argument, the extended characteristic system.

References

1. Frankl F.I. The selected works on gas dynamics.– M: the Science, 1973.– 712 p.

2. Alekseenko S.N., Pankov P.S., Kosov S.G. Application of a method of additional argument to the decision of a problem of Cauchi for system of the equations flowing of isoentropy barotropic gas//Studies on Integro-Differential Equations, Bishkek: Ilim, 2004, V.33, P. 43-48.

3. Alekseenko S.N., Shemyakina T.A., Chezganov V.S. Local existence of the limited decision of system Frankl in an elliptic case// Studies on Integro-Differential Equations, Bishkek: Ilim, 2006, V. 35, P. 148-152.

4. Alekseenko S.N., Shemyakina T.A., Balakireva V.B. On a construction of the expanded characteristic system for system Frankl in an elliptic case//Proceedings of the Middle-Volga Mathematical Society, 2007. V. 9, № 1, P. 53-61.

[3]Professor of the mathematical analisis department, Arzamas state pedagogical institute, Arzamas; sn-alekseenko@yandex.ru.

[4]Associate professor of the higher mathematics Chair, St.-Petersburg State Polytechnic university, St.-Petersburg; sh_tat@mail.ru.