УДК 517.9

Устойчивость решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных в аэроупругости

© А. В. Анкилов[1], П. А. Вельмисов[2]

Аннотация. Получены условия устойчивости решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих динамику упругих пластин при взаимодействии со сверхзвуковым потоком газа.

Ключевые слова: динамическая устойчивость; нелинейность; дифференциальное уравнение; частные производные; упругая пластина; сверхзвуковое обтекание.

1. Введение

Работа посвящена исследованию динамической устойчивости упругих пластин, находящихся во взаимодействии с потоком идеального газа. Предполагается сверхзвуковой режим обтекания.

Принятые в работе определения устойчивости упругого тела соответствуют концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову. Механическое поведение материала пластин описывается нелинейными моделями упругого тела. Аэрогидродинамическая нагрузка определяется из асимптотических уравнений аэрогидромеханики.

Исследование устойчивости проводится на основе построения положительно определенных функционалов, соответствующих модельным интегро- дифференциальным уравнениям в частных производных. Полученные условия устойчивости движения упругих элементов налагают ограничения на скорость потока, значения сжимающих(растягивающих) усилий, жесткость пластин и оснований, коэффициенты демпфирования, а также другие параметры механических систем. При дозвуковом обтекании пластин и конструкций исследование динамической устойчивости ранее были проведены в работах [1], [2].

2. Исследование устойчивости

Рассмотрим модельное уравнение, описывающее поперечные колебания упругой пластины-полосы при обтекании ее сверхзвуковым потоком газа (рис. 2.1):

$$M\ddot{w}+\left(\frac{Dw''}{\sqrt{\left(1+w'^2\right)^3}}\right)''+\beta_2\dot{w}''''-\vartheta\ddot{w}''+N(t)w''+\beta_1\dot{w}+\beta_0 w=-\alpha\left(\dot{w}+Vw'\right),\qquad x\in(0,l). \tag{2.1}$$

Здесь $w(x,t)$ - прогиб пластины; x - продольная координата, t - время; M , D - погонная масса и изгибная жесткость пластины; β_2 , β_1 - коэффициенты внутреннего (модель

[1]Доцент кафедры «Высшая математика», Ульяновский государственный технический университет, Ульяновск.

[2]Профессор, зав. кафедрой «Высшая математика», Ульяновский государственный технический университет, Ульяновск; velmisov@ulstu.ru.

Фойхта) и внешнего демпфирования (материала пластины и основания); ϑ - коэффициент, учитывающий инерцию вращения; N - сжимающее ($N > 0$) или растягивающее ($N < 0$) продольное усилие; β_0 - коэффициент жесткости основания (модель Винклера); $\alpha = \alpha_0 \rho_0 a_0 = const > 0$, где ρ_0, a_0 - плотность газа и скорость звука в однородном невозмущенном потоке ($\alpha_0 = 1$ при одностороннем обтекании, $\alpha_0 = 2$ при двустороннем обтекании); V - скорость набегающего однородного потока ($V = const > 0$); штрих обозначает производную по координате x , точка - производную по времени t .

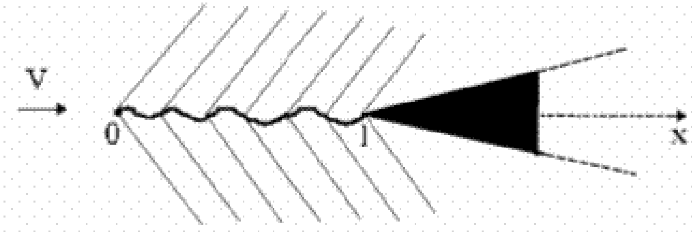

Рисунок **2.1**

Пример обтекания конструкции с упругим элементом сверхзвуковым потоком газа

Аэродинамическая нагрузка определяется выражением $F = \alpha\,(\dot{w} + Vw')$, справедливым при достаточно больших скоростях сверхзвукового потока V . Выражение для F получено с помощью решения соответствующей линейной нестационарной аэродинамической задачи на основе преобразования Лапласа и последующего исключения потенциала скорости (что согласуется с гипотезой плоских сечений Ильюшина А.А.).

Изгибающий момент M_x и перерезывающая сила Q_x в указанной модели определяются выражениями

$$M_x = \frac{Dw''}{\sqrt{\left(1+w'^2\right)^3}} + \beta_2 \dot{w}'', \quad Q_x = \vartheta \ddot{w}' - \left(\frac{Dw''}{\sqrt{\left(1+w'^2\right)^3}} + \beta_2 \dot{w}'' \right)' . \tag{2.2}$$

Введем в рассмотрение функционал

$$\Phi(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ M\dot{w}^2 + 2M\theta w\dot{w} + (\beta_0 + \beta_1\theta + \alpha\theta)w^2 + \beta_2\theta w''^2 + \vartheta \dot{w}'^2 + 2\vartheta\theta w'\dot{w}' - Nw'^2 \right\} dx, \tag{2.3}$$

где $\theta > 0$ - некоторый положительный постоянный параметр.

Пусть концы пластины закреплены жестко или шарнирно, тогда граничные условия для $w(x,t)$ имеют вид

$$1)\; w(x,t) = w'(x,t) = 0, \quad 2)\; w(x,t) = w''(x,t) = 0; \quad x = 0 \text{ или } x = l. \tag{2.4}$$

В случае шарнирного закрепления конца пластины изгибающий момент, определяемый по формуле (2.2), равен нулю: $M_x = 0$.

Проведем оценки для функционала (2.3) и его производной, используя неравенства, справедливые при условиях (2.4):

$$\begin{gathered} \int_0^l w''^2(x,t)dx \geq \lambda_1 \int_0^l w'^2(x,t)dx, \; \int_0^l \dot{w}''^2(x,t)dx \geq \lambda_1 \int_0^l \dot{w}'^2(x,t)dx, \; \int_0^l \dot{w}''^2(x,t)dx \geq \\ \geq \mu_1 \int_0^l \dot{w}^2(x,t)dx, \quad w^2(x,t) \leq l \int_0^l w'^2(x,t)dx, \quad \int_0^l w'^2(x,t)dx \geq \eta_1 \int_0^l w^2(x,t)dx, \end{gathered} \tag{2.5}$$

где λ_1, μ_1, η_1 – наименьшие собственные значения краевых задач $\psi'''' = -\lambda\psi''$, $\psi'''' = \mu\psi$, $\psi'' = -\eta\psi$ [3] с граничными условиями (2.4).

Найдем производную от Φ по t:

$$\dot\Phi(t) = \int\limits_0^l \left\{ M\dot w\ddot w + M\theta\dot w^2 + M\theta w\ddot w + (\beta_0 + \beta_1\theta + \alpha\theta)\, w\dot w + \beta_2\theta w''\dot w'' + \vartheta\dot w'\ddot w' + \right.$$

$$\left. + \vartheta\theta\, \dot w'^{\,2} + \vartheta\theta w'\ddot w' - N w'\dot w' - 0,5\dot N w'^2 \right\} dx.$$

Для функции $w(x,t)$, являющейся решением уравнения (2.1), это равенство примет вид

$$\dot\Phi(t) = \int\limits_0^l \left\{ -\dot w \left[\left(\frac{Dw''}{\sqrt{\left(1+w'^2\right)^3}} \right)'' + \beta_2\dot w'''' - \vartheta\ddot w'' + N w'' + \beta_1\dot w + \beta_0 w + \alpha\left(\dot w + V w'\right) \right] + \right.$$

$$+ M\theta\dot w^2 - \theta w \left[\left(\frac{Dw''}{\sqrt{\left(1+w'^2\right)^3}} \right)'' + \beta_2\dot w'''' - \vartheta\ddot w'' + N w'' + \beta_1\dot w + \beta_0 w + \alpha\left(\dot w + V w'\right) \right] +$$

$$\left. + (\beta_0 + \beta_1\theta + \alpha\theta)\, w\dot w + \beta_2\theta w''\dot w'' + \vartheta\dot w'\ddot w' + \vartheta\theta\, \dot w'^{\,2} + \vartheta\theta w'\ddot w' - N w'\dot w' - 0,5\dot N w'^2 \right\} dx. \quad (2.6)$$

Проведем интегрирование по частям с учетом условий (2.4):

$$\int\limits_0^l w \left[\vartheta\ddot w'' - \left(\frac{Dw''}{\sqrt{\left(1+w'^2\right)^3}} + \beta_2\dot w'' \right)'' \right] dx = \int\limits_0^l w Q_x' dx = w Q_x\Big|_0^l - \int\limits_0^l w' Q_x dx =$$

$$= -\int\limits_0^l \vartheta w'\ddot w' dx + \int\limits_0^l w' M_x' dx = -\int\limits_0^l \vartheta w'\ddot w' dx + w' M_x\Big|_0^l - \int\limits_0^l w'' M_x dx =$$

$$= -\int\limits_0^l \vartheta w'\ddot w' dx - \int\limits_0^l \beta_2 w''\dot w'' dx - \int\limits_0^l \frac{Dw''^2}{\sqrt{\left(1+w'^2\right)^3}} dx, \quad (2.7)$$

$$\int\limits_0^l \dot w \left[\vartheta\ddot w'' - \left(\frac{Dw''}{\sqrt{\left(1+w'^2\right)^3}} + \beta_2\dot w'' \right)'' \right] dx = -\int\limits_0^l \left(\vartheta\dot w'\ddot w' + \beta_2\, \dot w''^{\,2} + \frac{D\dot w'' w''}{\sqrt{\left(1+w'^2\right)^3}} \right) dx,$$

$$\int\limits_0^l w w' dx = \frac{w^2}{2}\Big|_0^l = 0, \qquad \int\limits_0^l \dot w w'' dx = -\int\limits_0^l \dot w' w' dx,$$

$$\int\limits_0^l w w'' dx = -\int\limits_0^l \dot w'^2 dx, \qquad \int\limits_0^l \dot w\dot w'''' dx = \int\limits_0^l \dot w''^{\,2}\, dx.$$

Учитывая эти равенства, из (2.6) получим

$$\dot{\Phi}(t) = -\int\limits_0^l \left\{ \frac{D\theta w''^2}{\sqrt{\left(1+w'^2\right)^3}} + \frac{D\dot{w}''w''}{\sqrt{\left(1+w'^2\right)^3}} + \beta_2\,\dot{w}''^2 + (\beta_1+\alpha-M\theta)\,\dot{w}^2 + \alpha V\dot{w}w' - \right. \tag{2.8}$$

$$\left. -(N\theta+0,5\dot{N})w'^2 + \beta_0\theta w^2 - \vartheta\theta\,\dot{w}'^2 \right\} dx.$$

Пусть выполняются условия

$$D>0, \quad \beta_0>0, \quad \beta_1>0, \quad \beta_2>0, \quad \theta>0. \tag{2.9}$$

Тогда, учитывая второе неравенство (2.5), а также неравенство

$$\frac{D\theta w''^2}{\sqrt{\left(1+w'^2\right)^3}} \geq \frac{D\theta w''^2}{\left(1+w'^2\right)^3},$$

из (2.8) получим

$$\dot{\Phi}(t) = -\int\limits_0^l \left\{ \frac{D\theta w''^2}{\left(1+w'^2\right)^3} + \frac{D\dot{w}''w''}{\sqrt{\left(1+w'^2\right)^3}} + (\beta_2-\lambda_1^{-1}\vartheta\theta)\,\dot{w}''^2 + (\beta_1+\alpha-M\theta)\,\dot{w}^2 + \alpha V\dot{w}w' - \right.$$

$$\left. -(N\theta+0,5\dot{N})w'^2 + \beta_0\theta w^2 \right\} dx. \tag{2.10}$$

Рассматривая квадратичные формы относительно $\dfrac{w''}{\sqrt{(1+w'^2)^3}}$, $\dot{w}''$ и $\dot{w}$, w', получим, согласно критерию Сильвестра, условия их положительной определенности:

$$\begin{array}{l} \beta_2-\lambda_1^{-1}\vartheta\theta>0, \quad D\leq 4\theta\left(\beta_2-\lambda_1^{-1}\vartheta\theta\right), \quad \beta_1+\alpha-M\theta>0, \\ N\theta+0,5\dot{N}<0, \quad -4\left(\beta_1+\alpha-M\theta\right)\left(N\theta+0,5\dot{N}\right)>\alpha^2V^2. \end{array} \tag{2.11}$$

С учетом (2.11) получим $\dot{\Phi}\leq 0$. Следовательно,

$$\Phi(t)\leq\Phi(0). \tag{2.12}$$

Оценим функционал (2.3) следующим образом

$$\Phi(t) \geq \frac{1}{2}\int\limits_0^l \left\{ M\dot{w}^2 + 2M\theta w\dot{w} + (\beta_0+\beta_1\theta+\alpha\theta)\,w^2 + \left[\lambda_1\beta_2\theta - \sup_t N - \vartheta\theta^2\right] w'^2 + \right.$$

$$\left. +\vartheta\left(\dot{w}'+\theta w'\right)^2 \right\} dx \geq \frac{1}{2}\int\limits_0^l M\dot{w}^2 + 2M\theta w\dot{w} + (\beta_0+\beta_1\theta+\alpha\theta)\,w^2 +$$

$$+\psi\left[\lambda_1\beta_2\theta-\sup_t N-\vartheta\theta^2\right]w'^2+(1-\psi)\left[\lambda_1\beta_2\theta-\sup_t N-\vartheta\theta^2\right]w'^2\Big\}\,dx\geq \tag{2.13}$$

$$\geq\frac{1-\psi}{2l}\left[\lambda_1\beta_2\theta-\sup_t N-\vartheta\theta^2\right]w^2+\frac{1}{2}\int\limits_0^l\left\{M\dot{w}^2+2M\theta w\dot{w}+\right.$$

$$\left.+\left(\beta_0+\beta_1\theta+\alpha\theta+\psi\eta_1\left[\lambda_1\beta_2\theta-\sup_t N-\vartheta\theta^2\right]\right)w^2\right\}dx,$$

где $\psi\in(0,1)$ - некоторая постоянная величина.

При выводе (2.13) было сделано предположение:

$$\lambda_1\beta_2\theta-\sup_t N-\vartheta\theta^2>0. \tag{2.14}$$

Квадратичная форма в (2.13) будет положительно определенной при условии

$$\beta_0+\beta_1\theta+\alpha\theta+\psi\eta_1\left[\lambda_1\beta_2\theta-\sup_t N-\vartheta\theta^2\right]>M\theta^2. \tag{2.15}$$

Если выполняется условие

$$\beta_0+\beta_1\theta+\alpha\theta>M\theta^2, \tag{2.16}$$

то можно положить $\psi=0$, иначе положим

$$\psi=\frac{M\theta^2-\beta_0-\beta_1\theta-\alpha\theta}{\eta_1\left[\lambda_1\beta_2\theta-sup_t N-\vartheta\theta^2\right]},$$

и условие (2.15) запишется в виде

$$\beta_0+\beta_1\theta+\alpha\theta<M\theta^2,\qquad\frac{M\theta^2-\beta_0-\beta_1\theta-\alpha\theta}{\eta_1\left[\lambda_1\beta_2\theta-sup_t N-\vartheta\theta^2\right]}\in(0,1)\,. \tag{2.17}$$

Тогда при выполнении условия (2.16) или (2.17) окончательно получим

$$\Phi(t)\geq\frac{(1-\psi)}{2l}\left[\lambda_1\beta_2\theta-\sup_t N-\vartheta\theta^2\right]w^2(x,t). \tag{2.18}$$

Оценим $\Phi(0)$:

$$\Phi(0)=\frac{1}{2}\int\limits_0^l\Big\{M\dot{w}_0^2+2M\theta w_0\dot{w}_0+(\beta_0+\beta_1\theta+\alpha\theta)w_0^2+\beta_2\theta w_0''^2+\vartheta\dot{w}_0'^{\,2}+2\vartheta\theta w_0'\dot{w}_0'-N_0w_0'^{\,2}\Big\}\,dx\leq$$

$$\leq\frac{1}{2}\int\limits_0^l\Big\{M(1+\theta)\dot{w}_0^2+(\beta_0+\beta_1\theta+\alpha\theta+M\theta)w_0^2+\beta_2\theta w_0''^2+\vartheta(1+\theta)\dot{w}_0'^{\,2}+(|N_0|+\vartheta\theta)\,w_0'^{\,2}\Big\}\,dx\leq$$

$$\leq\frac{1}{2}\int\limits_0^l\Big\{\left[\beta_2\theta+\lambda_1^{-1}\left(|N_0|+\vartheta\theta\right)+\mu_1^{-1}(\beta_0+\beta_1\theta+\alpha\theta+M\theta)\right]w_0''^2+\left[\vartheta+\eta_1^{-1}M\right](1+\theta)\dot{w}_0'^{\,2}\Big\}\,dx. \tag{2.19}$$

С учетом (2.12), (2.18), (2.19) получим неравенство

$$\frac{(1-\psi)}{l}\left[\lambda_1\beta_2\theta-\sup_t N-\vartheta\theta^2\right]w^2(x,t)\le \tag{2.20}$$

$$\le\int\limits_0^l\left\{\left[\beta_2\theta+\lambda_1^{-1}\left(|N_0|+\vartheta\theta\right)+\mu_1^{-1}(\beta_0+\beta_1\theta+\alpha\theta+M\theta)\right]w_0''^2+\left[\vartheta+\eta_1^{-1}M\right](1+\theta)\dot{w}_0'^{\,2}\right\}dx.$$

Если выполняется условие (2.16), то из (2.20) получим неравенство

$$\left[\lambda_1\beta_2\theta-\sup_t N-\vartheta\theta^2\right]\frac{w^2(x,t)}{l}\le \tag{2.21}$$

$$\le\int\limits_0^l\left\{\left[\beta_2\theta+\lambda_1^{-1}\left(|N_0|+\vartheta\theta\right)+\mu_1^{-1}(\beta_0+\beta_1\theta+\alpha\theta+M\theta)\right]w_0''^2+\left[\vartheta+\eta_1^{-1}M\right](1+\theta)\dot{w}_0'^{\,2}\right\}dx,$$

из которого следует теорема

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия* (2.9), (2.11), (2.14) *и* (2.16). *Тогда решения уравнения* (2.1) *будут устойчивы по отношению к возмущению начальных значений* $\dot{w}_0', w_0''$, *если* $w(x,t)$ *удовлетворяет краевым условиям* (2.4).

Если выполняются условия (2.17), то из (2.20) получим неравенство

$$\left(\left[\lambda_1\beta_2\theta-\sup_t N-\vartheta\theta^2\right]-\eta_1\left[M\theta^2-\beta_0+\beta_1\theta+\alpha\theta\right]\right)\frac{w^2\left(x,t\right)}{\eta_1 l}\le$$

$$\le\int\limits_0^l\left\{\left[\beta_2\theta+\lambda_1^{-1}\left(|N_0|+\vartheta\theta\right)+\mu_1^{-1}(\beta_0+\beta_1\theta+\alpha\theta+M\theta)\right]w_0''^2+\left[\vartheta+\eta_1^{-1}M\right](1+\theta)\dot{w}_0'^{\,2}\right\}dx,$$

из которого следует теорема

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия* (2.9), (2.11), (2.14) *и* (2.17). *Тогда решения уравнения* (2.1) *будут устойчивы по отношению к возмущению начальных значений* $\dot{w}_0', w_0''$, *если* $w\left(x,t\right)$ *удовлетворяет краевым условиям* (2.4).

Аналогичным методом можно провести исследование устойчивости нулевого решения нелинейного интегро-дифференциального уравнения

$$M\ddot{w}+\left(\frac{Dw''}{\sqrt{\left(1+w'^2\right)^3}}\right)''+\beta_2\dot{w}''''-\vartheta\ddot{w}''+N(t)w''+\beta_1\dot{w}+\beta_0 w-$$
$$-w''\left(\mu\int\limits_0^l w'^2(x,t)dx+\nu\frac{d}{dt}\int\limits_0^l w'^2(x,t)dx\right)=-\alpha\left(\dot{w}+Vw'\right),\quad x\in(0,l).$$

где ν,μ - в общем случае неотрицательные функции времени. Слагаемые, содержащие интегральные члены, учитывают влияние нелинейного продольного усилия, которое возникает в цилиндрической пластине из-за ограничений, наложенных на перемещения концов пластины $x=0, x=l$. В этом случае используется функционал

$$H(t)=\Phi(t)+\frac{1}{4}\left(\mu+2\theta\nu\right)\left(\int\limits_0^l w'^2(x,t)dx\right)^2$$

производная которого определяется выражением

$$\dot{H} = \dot{\Phi} - \frac{1}{2}\nu\left(\frac{d}{dt}\int\limits_0^l w'^2(x,t)dx\right)^2 - \mu\theta\left(\int\limits_0^l w'^2(x,t)dx\right)^2.$$

Для обеспечения устойчивости решений к перечисленным в теоремах 2.1., 2.2. условиям следует добавить следующие

$$\mu \geq 0, \quad \nu \geq 0.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 09-01-97005-р _ поволжье _ а.

Список литературы

1. Анкилов А. В., Вельмисов П. А. Устойчивость вязкоупругих элементов стенок проточных каналов. – Ульяновск: Ульяновск. гос. технич. ун-т, 2000. – 115 с.

2. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Горбоконенко В. Д., Покладова Ю. В. Математическое моделирование механической системы "трубопровод - датчик давления". – Ульяновск: Ульяновск. гос. технич. ун-т, 2008. – 188 с.

3. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. – М.: Наука, 1968. – 503с.

Дата поступления: 17.08.2009

Stability of solutions of a class of nonlinear partial differential equations in aeroelasticity

© A. V. Ankilov[3], P. A. Vel'misov[4]

Abstract. The conditions of stability of solutions of a class of nonlinear partial differential equations, describing the dynamic of elastic plates in interaction with supersonic flow of gas, are obtained.
Key Words: dynamic stability; nonlinearity; differential equation; partial derivatives; elastic plate; supersonic flow.

References

1. Ankilov A. V., Vel'misov P. A. Stability of viscoelastic elements of chanals walls. – Russia, Ulyanovsk Technical University, 2000. – 115 p.

2. Ankilov A. V., Vel'misov P. A., Gorbokonenko V. D., Pokladova Yu. V. Mathematical modelling of mechanical system "pipeline - pressure transducer". – Russia, Ulyanovsk Technical University, 2008. – 188 p.

3. Kollatc L. Eigenvalue problems. – Russia, Moscow: Science, 1968. – 503 p.

[3]Associate professor of Higher Mathematics Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk.
[4]Professor, Head of Higher Mathematics Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; velmisov@ulstu.ru.