УДК 517.9

Достаточные условия локальной приводимости систем дифференциальных уравнений с возмущениями высших порядков к линейным системам с постоянной матрицей

© **П. А. Шаманаев**[1]

Аннотация. В работе получены достаточные условия локальной приводимости систем дифференциальных уравнений с возмущениями высших порядков к линейным системам с постоянной матрицей. Доказательство основано на построении ляпуновского преобразования.

Ключевые слова: обыкновенные системы дифференциальных уравнений, локальная приводимость, ляпуновские преобразования.

1. Введение

Определение приводимости для линейных систем дифференциальных уравнений введено в знаменитой работе А.М.Ляпунова «Общая задача об устойчивости движения» [1]. В случае нелинейных систем дифференциальных уравнений понятие приводимости будем понимать в смысле определения Е.В.Воскресенского, приведенного в работе [2].

Рассмотрим множество всех систем дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \tag{1.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, а вектор-функция $f(t,x)$ такая, что

$$f \in \mathbb{C}^{(k,l)}(\mathcal{T} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), k \geq 0,\ l \geq 1,\ \mathcal{T} = [T, +\infty),\ f(t,0) \equiv 0. \tag{1.2}$$

Не ограничивая общности будем считать $T \geq 0$.

Понятие приводимости определено для систем, решения которых продолжимы вправо при $t \geq T$ для всех начальных данных (t_0, x_0) из $(\mathcal{T} \times \mathbb{R}^n)$. Если же у системы имеются как продолжимые так и непродолжимые решения, то вопрос о приводимости можно рассматривать лишь для той области пространства $(\mathcal{T} \times \mathbb{R}^n)$, в котором решения $x(t : t_0, x_0)$ системы (1.1) продолжимы вправо при $t \geq T$. Такой вид приводимости будем называть *локальной приводимостью* [6].

Предположим, что у систем вида (1.1) существует совокупность решений, определенных при всех $t \geq T$, причем эти решения заполняют некоторую область D пространства $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$D = \Big\{(t,x)\ :\ t \in \mathcal{T},\ x \in X_t,\ X_t \subseteq \mathbb{R}^n\Big\},$$

где X_t $(t \in \mathcal{T})$ – области, содержащие окрестность нуля, причем существует шар $S_p \subset \mathbb{R}^n$, фиксированного радиуса $p > 0$, такой, что $S_p \subset X_t$ при всех $t \in \mathcal{T}$.

Если у системы вида (1.1) решения $x(t : t_0, x_0)$, где $(t_0, x_0) \in \mathcal{T} \times \mathbb{R}^n$, определены при всех $t \geq T$, то множество всех систем дифференциальных уравнений вида (1.1) обозначим символом Ξ [2], [3].

[1]Заведующий кафедрой прикладной математики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; shamanaevpa@math.mrsu.ru.

Если же у системы вида (1.1) существует совокупность решений $x(t : t_0, x_0)$, определенных при всех $t \geq T$, лишь только при $(t_0, x_0) \in D$, то множество всех систем дифференциальных уравнений вида (1.1) обозначим символом $\mathbf{\Omega}$.

Очевидно, что если $X_t = \mathbb{R}^n$ при всех $t \in \mathcal{T}$, то в этом случае $D = \mathcal{T} \times \mathbb{R}^n$. Откуда следует, что для любых $(t_0, x_0) \in \mathcal{T} \times \mathbb{R}^n$ все решения систем из множества $\mathbf{\Omega}$ определены при всех $t \geq T$. Следовательно, множества $\mathbf{\Omega}$ и $\mathbf{\Xi}$ систем дифференциальных уравнений совпадают. В общем случае $\mathbf{\Xi} \subseteq \mathbf{\Omega}$.

Рассмотрим преобразование

$$x = \varphi(t, y)$$

из ляпуновской группы $(\mathbf{LG}, \mathbf{\Xi})$ (см. [2]) на множестве $\mathbf{\Omega}$. При каждом фиксированном $t \in \mathcal{T}$ это преобразование представляет собой взаимно однозначное отображение

$$x = \varphi_t(y), \quad x,\, y \in \mathbb{R}^n.$$

Так как отображение φ_t является взаимно однозначным отображением пространства $\mathbb{R}^n$ на себя, то

$$x = \varphi_t(y), \quad y \in V_t, \quad x \in U_t = \varphi_t\big(V_t\big), \tag{1.3}$$

(где $V_t \subset \mathbb{R}^n$ – область, содержащая окрестность нуля) также является взаимно однозначным отображением области V_t на область U_t.

Под определением локальной приводимости систем дифференциальных уравнений будем понимать определение из работы [6].

Определение 1.1. *Две системы из множества $\mathbf{\Omega}$ назовем локально приводимыми, если существует преобразование $\varphi \in (\mathbf{LG}, \mathbf{\Xi})$ такое, что при каждом фиксированном $t \in \mathcal{T}$ диффеоморфизм*

$$\varphi_t : V_t \mapsto U_t, \tag{1.4}$$

(здесь, $X_t \supset V_t$, U_t – области, содержащие окрестности нуля, причем существует шар $S_p \subset \mathbb{R}^n$ фиксированного радиуса $p > 0$, такой, что $S_p \subset V_t,\ U_t$ при всех $t \in \mathcal{T}$), переводит точки $y \in V_t$, принадлежащие решениям одной системы, в соответствующие точки $x \in U_t$ другой системы.

Сделаем несколько замечаний относительно согласованности определений приводимости и локальной приводимости из работ [1, 2, 6]

Замечание 1.1. *Пусть $X_t = \mathbb{R}^n$ при всех $t \in \mathcal{T}$, и кроме этого, V_t и U_t при всех $t \in \mathcal{T}$ также совпадают со всем пространством $\mathbb{R}^n$ Тогда, если две системы дифференциальных уравнений являются локально приводимыми согласно определению (1.1.), то, все решения одной системы переводятся преобразованием $\varphi \in (\mathbf{LG}, \mathbf{\Xi})$ в решения другой системы, а это означает, что эти системы являются приводимыми в смысле работ* [2], [3].

Замечание 1.2. *Если $\mathbf{\Omega}$ является множеством всех линейных систем дифференциальных уравнений, то из локальной приводимости двух систем из $\mathbf{\Omega}$ следует их приводимость по Ляпунову.*

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений из $\mathbf{\Omega}$ вида

$$\frac{dx}{dt} = Ax + g(t,x), \tag{2.1}$$

где функция g удовлетворяет условию

$$||g(t,u) - g(t,v)|| \leq \psi(t)\Phi(\eta)||u - v||, \quad u,\, v \in \mathbb{R}^n, \tag{2.2}$$

здесь $\psi \in \mathbb{C}(\mathcal{T}, R^+)$, $\psi(t) \leq C$ при всех $t \in \mathcal{T}$, $\Phi(z)$ – положительная непрерывная неубывающая функция при всех $z > 0$, $\eta = \max\{||u||, ||v||\}$.

Ставится задача о локальной приводимости системы дифференциальных уравнений (2.1) к системе

$$\frac{dy}{dt} = Ay, \quad y \in \mathbb{R}^n. \tag{2.3}$$

Введем следующие обозначения: Λ — максимальное число из вещественных частей собственных значений матрицы A; λ — минимальное число из вещественных частей собственных значений матрицы A; $m_1 + 1$ — максимальный порядок жордановой клетки матрицы A, соответсвующий собственному значению, вещественная часть которого равна λ; m_2+1 — максимальный порядок жордановой клетки матрицы A, соответсвующий собственному значению, вещественная часть которого равна Λ.

Пусть $Y(t-s)$ — матрица Коши линейной системы (2.3), нормированная в нуле. Тогда для нее справедливы оценки [4, с.302]

$$||Y(t-s)|| \leq Ke^{\Lambda(t-s)}\rho^{m_2}(t-s) \qquad t \geq s, \tag{2.4}$$

$$\|Y(t-s)\| \leq Ke^{\lambda(t-s)}\rho^{m_1}(t-s) \qquad t \leq s, \tag{2.5}$$

где K – константа;

$$\rho^{\beta}(t) = \begin{cases} 1 & \text{если } |\,t\,| < 1, \\ |\,t\,|^{\beta} & \text{если} |\,t\,| \geq 1. \end{cases} \tag{2.6}$$

где β — целое неотрицательное число.

Определим функцию [5]

$$w = \Psi(z,c) = \int\limits_c^z \frac{ds}{\Phi_0(s)}, \quad c > 0, \qquad \Phi_0(s) = s\Phi(s), \tag{2.7}$$

причем, $\Psi(+\infty, c) < +\infty$, и сформулируем вспомогательную лемму.

Л е м м а 2.1. *Пусть фундаментальная матрица* $Y(t-t_0)$ *системы* (2.3) *ограничена при всех* $t \geq t_0$ *и сходится интеграл*

$$\int\limits_T^{+\infty} \psi(\tau)d\tau. \tag{2.8}$$

Тогда, решения $x(t : t_0, x_0)$ *системы (2.1), начальные данные* (t_0, x_0) *которых удовлетворяют условию*

$$(t_0, x_0) \in D_1, \quad \text{где} \quad D_1 = \left\{ (t,v) : \int\limits_T^t \psi(\tau)d\tau < \Psi(+\infty, ||v||), \quad t \geq T, \quad v \in \mathbb{R}^n \right\}, \tag{2.9}$$

ограничены при всех $t \geq t_0$ *, причем для них справедлива оценка*

$$\|x(t\!:\!t_0,x_0)\| \leq \Psi^{-1}\left(\int_{t_0}^{t}\psi(\tau)d\tau,\ ||x_0||\right), \qquad t \geq t_0. \tag{2.10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство основано на применении леммы Бихари [5]. Запишем решение $x(t:t_0,x_0)$ системы (2.1) в виде решения интегрального уравнения

$$x(t) = Y(t-t_0)x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} Y(t-s)g(s,x(s))ds, \tag{2.11}$$

Учитывая ограниченность фундаментальной матрицы $Y(t-t_0)$ системы (2.3) при всех $t \geq t_0$, оценим норму решения $x(t:t_0,x_0)$

$$\|x(t:t_0,x_0)\| \leq \|Y(t-t_0)\|\,||x_0|| + \int\limits_{t_0}^{t} \|Y(t-\tau)\|\,\|g(\tau,x(\tau))\|d\tau.$$

Отсюда получим

$$\|x(t:t_0,x_0)\| \leq K||x_0|| + K\int\limits_{t_0}^{t} \psi(\tau)\Phi_0\left(\|x(\tau)\|\right)d\tau,$$

где $||Y(t-t_0)|| \leq K$ при всех $t \geq t_0$, K – константа.

Применяя лемму Бихари ([5, с.110]), имеем

$$||x(t)|| \leq \Psi^{-1}\left(\int_{t_0}^{t}\psi(\tau)d\tau,\ ||x_0||\right), \qquad t \geq t_0.$$

Лемма 2.1 доказана.

3. Достаточные условия локальной приводимости

В работе [6] получены достаточные условия локальной приводимости нелинейных систем дифференциальных уравнений с возмущениями, рост которых при $||x|| \to +\infty$ может иметь более высокий порядок чем векторные полиномы высших порядков, к линейным системам с нулевой матрицей.

В следующей теореме достаточные условия локальной приводимости систем с возмущениями высших порядков к линейным системам с постоянной матрицей.

Т е о р е м а 3.1. *Пусть выполняются все условия леммы 2.1, справедливо условие*

$$t^{m_2}\psi(t) \to 0 \quad \textit{при} \quad t \to +\infty \tag{3.1}$$

и функция Ψ^{-1} *удовлетворяет условию Липшица в нуле*

$$|\Psi^{-1}(w,c)| \leq K|c|, \quad c = ||v||, \quad (w,v) \in D_1, \tag{3.2}$$

где K *– константа. Тогда системы (2.1) и (2.3) являются локально приводимыми.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство основано на построении ляпуновского преобразования из $(\mathbf{LG}, \mathbf{\Xi})$.

Учитывая условие (2.10) и (3.2), получим

$$\|x(t:t_0,x_0)\| \leq K||x_0||, \qquad (t_0,x_0) \in D_1. \tag{3.3}$$

Применим принцип линейного включения [4, с.557] к разности решений $x^{(1)}(t:t_0,u)$ и $x^{(2)}(t:t_0,v)$ системы (2.1). Учитывая оценку (2.10), получим

$$\|x^{(1)}(t:t_0,u) - x^{(2)}(t:t_0,v)\| \leq K\Psi^{-1}(w(t), ||u-v||), \qquad (t_0,u),(t_0,v) \in D_1. \tag{3.4}$$

Пусть функция $\Psi^{-1}(w,c)$ определена и непрерывна при $|c| \leq R(t)$, $t \geq T$. Определим вектор-функцию $\varphi_0(s,t,v)$ следующим образом

$$\varphi_0(s,t,v) = \begin{cases} x(s:t,v), & \text{при} \quad ||v|| \leq R(t) \\ x\left(s:t, \dfrac{v}{||v||}R(t)\right), & \text{при} \quad ||v|| > R(t). \end{cases} \tag{3.5}$$

Из определения множества D_1 в лемме 2.1 следует, что

$$\varphi_0(s,t,v) = x(s:t,v), \quad \text{если} \quad (t,v) \in D_1. \tag{3.6}$$

Тогда вектор-функция $\varphi_0(s,t,v)$, определенная по формуле (3.5), удовлетворяет условию Липшица по переменной v во всем пространстве $\mathbb{R}^n$ [4, с.555]

$$||\varphi_0(s,t,v) - \varphi_0(s,t,u)|| \leq K||u-v||, \qquad s \geq t, \quad \forall\, u,\, v \in \mathbb{R}^n. \tag{3.7}$$

В пространстве $\mathbb{R}^n$ при каждом фиксированном t рассмотрим оператор

$$Pv = -\int\limits_t^{+\infty} Y(t-s)g(s,\varphi_0(s,t,v))ds, \tag{3.8}$$

где φ_0 – определен по формуле (3.5).

Покажем, что оператор P является оператором сжатия в $\mathbb{R}^n$. Пусть u, $v \in \mathbb{R}^n$. Тогда, учитывая ограниченность решений системы (2.1), когда начальные данные удовлетворяют условию $(t_0,x_0) \in D_1$ и справедливость оценок (2.5) и (3.7), имеем

$$||Pu - Pv|| \leq KK_1 \int\limits_t^{+\infty} e^{\lambda(t-s)} s_2^m \psi(s) |\Psi^{-1}(w(s), ||u-v||)| ds.$$

Использую (3.2), получим

$$||Pu - Pv|| \leq K^2K_1 \int\limits_t^{+\infty} e^{\lambda(t-s)} s_2^m \psi(s) ds \; ||u-v||.$$

Зафиксируем θ, такое что $0 < \theta < 1$. Тогда, учитывая условие (2.8), можно подобрать T, такое, что при всех $t \geq T$

$$K^2K_1 \int\limits_t^{+\infty} e^{\lambda(t-s)} s_2^m \psi(s) ds \leq \theta.$$

Следовательно, оператор P является оператором сжатия в $\mathbb{R}^n$ и переводит пространство $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$.

Так как $\mathbb{R}^n$ — банахово пространство, то все условия теоремы п.10.1 [4, с.506] выполнены, и следовательно, при любом $u \in \mathbb{R}^n$ уравнение

$$v = u + \Phi v \tag{3.9}$$

имеет в $\mathbb{R}^n$ единственное решение и оно может быть получено методом последовательных приближений, начинающихся с любого элемента $v^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

Полагая $L = I - \Phi$, где I — тождественный оператор в $\mathbb{R}^n$, запишем уравнение (3.9) в виде

$$Lv = u. \tag{3.10}$$

Так как оно имеет единственное решение при любом $u \in \mathbb{R}^n$, то существует [4] обратный оператор L^{-1} такой, что

$$L^{-1}u = v. \tag{3.11}$$

Положим

$$\varphi(t, v) \equiv Lv \qquad \forall \ t \geq T, \tag{3.12}$$

$$\varphi^{-1}(t, u) \equiv L^{-1}u \qquad \forall \ t \geq T. \tag{3.13}$$

Таким образом, преобразование (3.12) удовлетворяет определению 1.1 и, следовательно, системы (2.1) и (2.3) являются локально приводимы.

Список литературы

1. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. – Л.; М.: ОНТИ, 1935. – 336 с.

2. Воскресенский Е.В. О приводимости нелинейных дифференциальных уравнений// Изв. вузов. Математика. – 1998. – №9. – С.33-37.

3. Воскресенский Е.В. Ляпуновские группы преобразований // Изв. вузов. Математика. – 1994. – №7. – С.13-19.

4. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. – М.: Наука, 1966. – 576 с.

5. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.

6. Шаманаев П.А. О локальной приводимости систем дифференциальных уравнений с возмущениями в виде однородных векторных полиномов // Труды Средневолжского математического общества. – 2003. – Т. 5, № 1. – С. 145-151.

7. Шаманаев П.А. О локальной приводимости систем дифференциальных уравнений с возмущениями высших порядков к линейным системам с нулевой матрицей// Труды Средневолжского математического общества. – 2008. – Т. 10, № 2. – С. 213-217.

Sufficient conditions reducibility of differential equations system with perturbations of the higher orders to the linear systems with a constant matrix.

© P. A. Shamanaev[2]

Abstract. In the work sufficient conditions are obtained for local reducibility of the ODE systems with perturbations of the higher orders to the linear systems with a zero matrix. The proof is bases on the construction of Lyapounov transformations.
Key Words: ODE systems, local reducibility, Lyapounov transformations.

References

1. Lyapounov A.M. General problem of stability motion. – L.; M.: ONTI, 1935. – 336 p.

2. Voskresensky E.V. On reducibility of the nonlinear differential equations // Izv. vuzov. Mathemetic. – 1998. – № 9. – P. 33-37.

3. Voskresensky E.V. Lyapounov transformation groups // Izv. vuzov. Mathemetic. – 1994. – № 7. – P. 13-19.

4. Bylov B.F., Vinograd R.E., Grobman D.M., Nemytcsiy V.V. The exponent theory of Lyapunov and her application to a stability problem. – M.: Nauka, 1966. – 576 p.

5. Demidovich B.P. Lectures on a mathematical stability theory. – M.: Nauka, 1967. – 472 p.

6. Shamanaev P.A. On local reducibility of systems of differential equations with perturbations in the form of homogeneous vector polynomials to linear systems with variable matrix. // Trudy Srednevolzskogo Matematicheskogo Obshchestva. – 2005. – V. 7, № 1. – P. 256-262.

7. Shamanaev P.A. On the local reducibility of differential equation systems with perturbations in the form of homogeneous vector polynomials. // Trudy Srednevolzskogo Matematicheskogo Obshchestva. – 2003. – V. 5, № 1. – P. 145-151.

8. Shamanaev P.A. On local reducibility of differential equations system with perturbations with perturbations of the higher orders to the linear systems with a zero matrix. // Trudy Srednevolzskogo Matematicheskogo Obshchestva. – 2008. – V. 10, № 2. – P. 213-217.

[2]Head of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; shamanaevpa@math.mrsu.ru.