

Поиск оптимального управления в модели эпидемии

© Н. И. Овсянникова¹

Аннотация. В данной работе построена дискретная управляемая модель распространения инфекционного заболевания, передаваемого контактным путём. Целью управления является минимизация затрат на погашение эпидемии при имеющихся ограничениях на управление и начальных данных.

Ключевые слова: оптимальное управление, вакцинация, изоляция, информационно-образовательная программа

1. Математическая постановка задачи

Рассмотрим динамику процесса эпидемии в сообществе, состоящем из n групп, включив управление вакцинацией, изоляцией и информационно-образовательной программой:

$$\begin{cases} x_j^{i+1} = x_j^i - x_j^i \Delta t (1 - w_j^i) \sum_{k=1}^n \beta_{jk} y_k^i - \Delta t (v_j^i + \mu_j x_j^i - \Lambda_j), \\ y_j^{i+1} = y_j^i + x_j^i \Delta t (1 - w_j^i) \sum_{k=1}^n \beta_{jk} y_k^i - \Delta t ((\gamma_j + \mu_j + \tilde{\mu}_j) y_j^i + u_j^i) \end{cases} \quad (1.1)$$

где x_j^i, x_j^{i+1} – численность подверженных инфекционному заболеванию в j -й группе на i -ом и на $(i+1)$ -ом шаге, y_j^i, y_j^{i+1} – численность инфицированных на i -ом и на $(i+1)$ -ом шаге, $\gamma_j y_j^i$ – количество людей, восстановивших своё здоровье в j -той социальной группе на i -ом шаге без воздействия внешних средств: карантина, вакцинации и пр. (γ^{-1} – среднее время естественного выздоровления при данном инфекционном заболевании), β_{jk}^i – коэффициент роста, характеризующий частоту встреч здоровых людей j -той группы с инфицированными людьми k -той группы на i -ом шаге, μ_j – коэффициент естественной смертности людей в j -той группе, $\tilde{\mu}_j$ – коэффициент смертности от данной инфекции в j -той группе, Λ_j – средняя скорость рождаемости в j -той группе, x_j^0, y_j^0 – известные значения в начальный момент времени, v_j^i – скорость вакцинации подверженных инфицированию в j -той группе на i -тый момент времени, u_j^i – скорость выведения инфицированных на карантин в j -той группе на i -тый момент времени, w_j^i – доля подверженных инфицированию, на которых успешно воздействовали информационно-образовательной программой в j -той группе на i -тый момент времени.

Функционал:

$$I(v, u, w) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{q-1} (y_j^i + d_j v_j^i + c_j u_j^i + l_j w_j^i x_j^i) \Delta t + \sum_{j=1}^n b_j y_j^q \rightarrow \inf \quad (1.2)$$

характеризует цель управления, которая состоит в том, чтобы минимизировать затраты на погашение эпидемии, где d_j – относительная стоимость вакцинации в j -той группе, c_j – относительная стоимость карантина в j -той группе, l_j – относительная стоимость информационно-образовательной программы в j -той группе (стоимость одного инфицированного человека для общества примем за единицу), b_j – относительная стоимость

¹Старший преподаватель кафедры прикладной математики, Поморский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова, г. Архангельск; imaginary-aim@hotmail.com.

остаточного больного в j -той группе ($b_j \geq 1$, так оставшиеся больные могут вызвать новую эпидемию).

Ограничения на управления заданы в следующем виде:

$$0 \leq v_j^i \leq A_j, \quad 0 \leq u_j^i \leq B_j, \quad 0 \leq w_j^i \leq C_j, \quad i = \overline{1; n}, \quad j = \overline{0; q-1} \quad (1.3)$$

Начальные условия:

$$x_j^0, \quad y_j^0, \quad j = \overline{1; n} \quad (1.4)$$

$$\begin{cases} x^i \in X_i \subset \mathbb{R}^n, & i = \overline{0; q} \\ y^i \in Y_i \subset \mathbb{R}^n, & i = \overline{0; q} \end{cases}$$

$$[v]_0^{q-1} = (v^0, v^1, \dots, v^{q-1}), \quad [u]_0^{q-1} = (u^0, u^1, \dots, u^{q-1}), \quad [w]_0^{q-1} = (w^0, w^1, \dots, w^{q-1})$$

$V^0(x, y)$ – множество допустимых управлений вакцинацией, $U^0(x, y)$ – множество допустимых управлений карантинном, $W^0(x, y)$ – множество допустимых управлений программой «Здоровье», D^0 – множество допустимых процессов, D^i – множество компонент допустимых процессов и подмножеств $G_i^1 \subset X_i$, $G_i^2 \subset Y_i$ – множеств достижимости на i -том шаге $i = \overline{0; q}$.

Разобьём отрезки управления $[0; u_{max}]$, $[0; v_{max}]$, $[0; w_{max}]$ равноотстоящими точками:

$$0 = u_0 < u_1 < \dots < u_l = u_{max}, \quad \Delta u = u_{i+1} - u_i, \quad i = \overline{0; l-1}$$

$$0 = v_0 < v_1 < \dots < v_r = v_{max}, \quad \Delta v = v_{i+1} - v_i, \quad i = \overline{0; r-1}$$

$$0 = w_0 < w_1 < \dots < w_k = w_{max}, \quad \Delta w = w_{i+1} - w_i, \quad i = \overline{0; k-1}$$

Построим сетку, состоящую из точек (x_i, y_j) : $0 \leq i \leq m$, $0 \leq j \leq n$, $\tau = \frac{x_{max}}{m}$, $h = \frac{y_{max}}{n}$.

2. Алгоритм синтеза управления

I этап (по убывающему индексу k).

$$\underline{k = q} \quad B_q(x, y) = \sum_{j=0}^n b_j y_j^q$$

$$\begin{aligned} \underline{k = q-1} \quad B_{q-1}(x, y) = & \inf_{\substack{u \in U^{q-1} \\ v \in V^{q-1} \\ w \in W^{q-1}}} \left\{ \sum_{j=1}^n (y_j^{q-1} + d_j v_j^{q-1} + l_j w_j^{q-1} x_j^{q-1} + c_j u_j^{q-1}) \Delta t + \right. \\ & \left. + \sum_{j=0}^n b_j \left(y_j^{q-1} + \left[x_j^{q-1} (1 - w_j^{q-1}) \sum_{k=1}^n \beta_{jk} y_k^{q-1} - \mu_j y_j^{q-1} - \tilde{\mu}_j y_j^{q-1} - \gamma_j y_j^{q-1} - u_j^{q-1} \right] \right) \Delta t \right\} \end{aligned}$$

Для каждой точки (x_i, y_j) из допустимой области находим набор управлений, минимизирующих функцию Беллмана $B_{q-1}(x, y)$.

$$\underline{k = q-2} \quad B_{q-2}(x, y) = \inf_{\substack{u \in U^{q-2} \\ v \in V^{q-2} \\ w \in W^{q-2}}} \left\{ \sum_{j=1}^n (y_j^{q-2} + d_j v_j^{q-2} + l_j w_j^{q-2} x_j^{q-2} + c_j u_j^{q-2}) \Delta t + \right.$$

$$+B_{q-1} \left(\left[x_j^{q-2} - \Delta t \left[x_j^{q-2} (1 - w_j^{q-2}) \sum_{k=1}^n \beta_{jk} y_k^{q-2} + \mu_j x_j^{q-2} - \Lambda_j + v_j^{q-2} \right] \right], \right. \\ \left. \left[y_j^{q-2} + \Delta t \left[x_j^{q-2} (1 - w_j^{q-2}) \sum_{k=1}^n \beta_{jk} y_k^{q-2} - (\mu_j + \tilde{\mu}_j + \gamma_j) y_j^{q-2} - u_j^{q-2} \right] \right] \right\}$$

Для каждой точки (x_i, y_j) из допустимой области находим набор управлений, минимизирующих функцию Беллмана $B_{q-2}(x, y)$, и так для каждого $k = q - 3, \dots, 0$.

Находим множество $G_0^1 \subset X_0$, $G_0^2 \subset Y_0$ и для каждого $x \in G_0^1$, $y \in G_0^2$ определяем множества $V^0(x, y)$, $U^0(x, y)$, $W^0(x, y)$.

$$B_0(x, y) = \inf_{\substack{u \in U^0 \\ v \in V^0 \\ w \in W^0}} \left\{ \sum_{j=1}^n (y_j^0 + d_j v_j^0 + l_j w_j^0 x_j^0 + c_j u_j^0) \Delta t \right. \\ \left. + B_1 \left(\left[x_j^0 + \left(x_j^0 \Delta t (1 - w_j^0) \sum_{k=1}^n \beta_{jk} y_k^0 - \Delta t (\mu_j x_j^0 - \Lambda_j + v_j^0) \right) \right], \right. \right. \\ \left. \left. \left[y_j^0 + x_j^0 \Delta t (1 - w_j^0) \sum_{k=1}^n \beta_{jk} y_k^0 - \Delta t (\mu_j y_j^0 + \tilde{\mu}_j y_j^0 + \gamma_j y_j^0 + u_j^0) \right] \right) \right\}$$

Находим $B_0(x, y)$ и $v_0(t)$, $u_0(t)$, $w_0(t)$ для каждого $x \in G_0^1$, $y \in G_0^2$.

Итак, на первом этапе решения задачи для каждого $x \in G_k^1$, $y \in G_k^2$, $k = 0, \dots, q - 1$ находятся значения функции Беллмана $B_0(x, y)$ и компоненты оптимального управления $\tilde{v}^k(x, y)$, $\tilde{u}^k(x, y)$, $\tilde{w}^k(x, y)$ для каждого $x \in G_k^1$, $y \in G_k^2$, $k = 0, \dots, q - 1$. Найденное на I этапе оптимальное управление является синтезом. В отличие от программного управления, которое зависит только от момента времени t (шаг k) и определено только для точек \tilde{x}^k , \tilde{y}^k , $k = 0, \dots, q - 1$, принадлежащих оптимальной траектории, синтезирующая функция управления $\tilde{v}^k(x, y)$, $\tilde{u}^k(x, y)$, $\tilde{w}^k(x, y)$ определена для всех точек $x \in \bigcup_{k=0}^{q-1} G_k^1$,

$y \in \bigcup_{k=0}^{q-1} G_k^2$. Таким образом, решение уравнения Беллмана равносильно решению проблемы синтеза для задачи, которая заключается в построении оптимального управления в форме синтеза, зависящего от состояния системы $x^k \in G_k^1$, $y^k \in G_k^2$ на каждом шаге.

II этап.

Находится $\tilde{x}^0 \in G_0^1$, $\tilde{y}^0 \in G_0^2$ – оптимальная точка из условия минимизации функции $B_0(x, y)$ на множестве G_0 и оптимальное значение целевой функции:

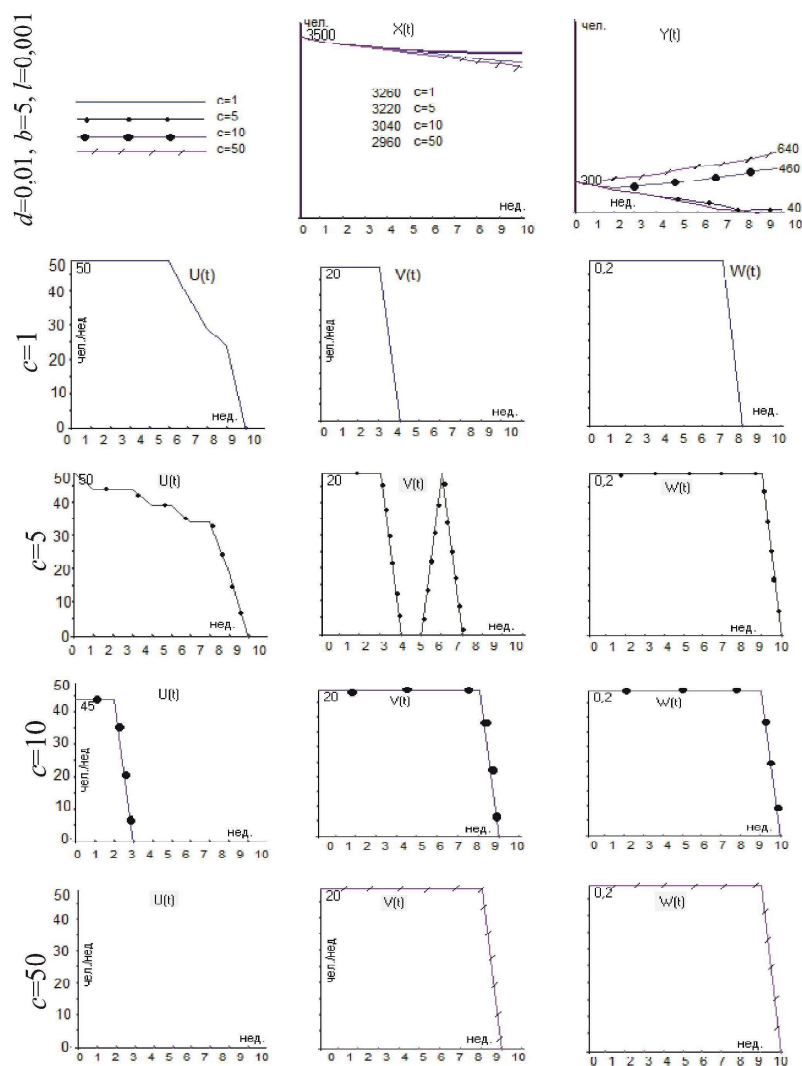
$$I_0^* = B^0(\tilde{x}^0, \tilde{y}^0) = \inf_{x, y \in G_0} B^0(x, y)$$

III этап (по возрастающему индексу k)

Последовательно применяя найденный оптимальный синтез $v_k(x, y)$, $u_k(x, y)$, $w_k(x, y)$ и оператор перехода с учётом начальной фазовой точки, находим оптимальную траекторию $[\tilde{x}]_0^q = (\tilde{x}^0, \tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^q)$, $[\tilde{y}]_0^q = (\tilde{y}^0, \tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^q)$ и соответствующее ОУ: $[\tilde{v}]_0^{q-1} = (\tilde{v}^0, \tilde{v}^1, \dots, \tilde{v}^{q-1})$, $[\tilde{u}]_0^{q-1} = (u^0, u^1, \dots, u^{q-1})$, $[\tilde{w}]_0^{q-1} = (w^0, w^1, \dots, w^{q-1})$. \tilde{x}^0 , \tilde{y}^0 – найдено на II этапе; $v_0(x, y)$, $u_0(x, y)$, $w_0(x, y)$ – найдено на I этапе.

3. Анализ результатов решения

Для начальных данных $x_0 = 3500$, $y_0 = 300$ и ограничениях на управление: $0 \leq v^i \leq 20$, $0 \leq u^i \leq 50$, $0 \leq w^i \leq 0,2$, $i = \overline{0; q-1}$ зафиксируем относительные стоимости: вакцинации одного человека \mathbf{d} , информационной программы на одного человека \mathbf{l} , остаточную стоимость больного \mathbf{b} , будем менять относительную стоимость изоляции одного больного \mathbf{c} . Из рис. 3.1 видно, что с ростом относительной стоимости изоляции управление карантинном (изоляция) стремительно снижается, усиливается управление с помощью вакцинации и информационной программы. Суммарные затраты на погашение эпидемии снова возросли (за счёт штрафа за остаточных больных). При повышении стоимости карантина остаточное число подверженных инфицированию снижается частично за счёт усиления управления вакцинацией, частично за счёт перехода в число инфицированных. Общая эпидемиологическая картина ухудшается.

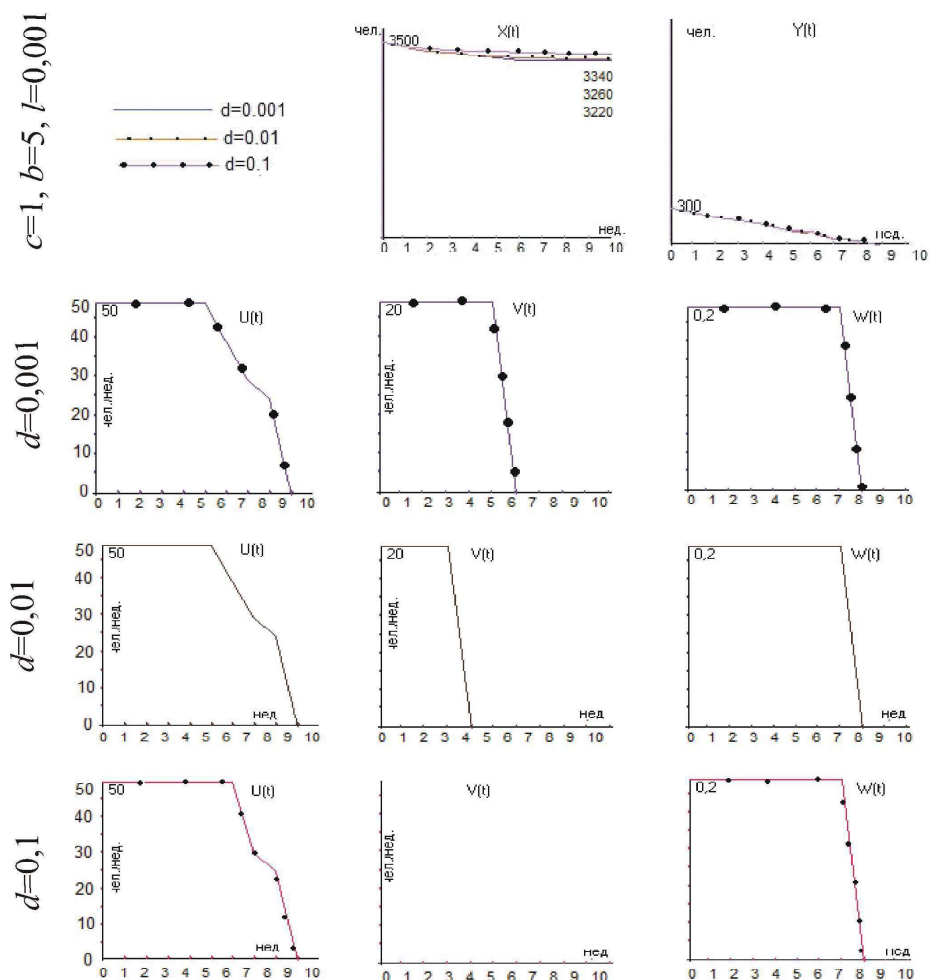


Р и с у н о к 3.1

Решение задачи оптимального управления эпидемией методом синтеза управлений в зависимости от стоимости карантина.

Зафиксируем относительные стоимости: изоляции одного больного \mathbf{c} , информационной программы на одного человека \mathbf{l} , остаточную стоимость больного \mathbf{b} , будем менять

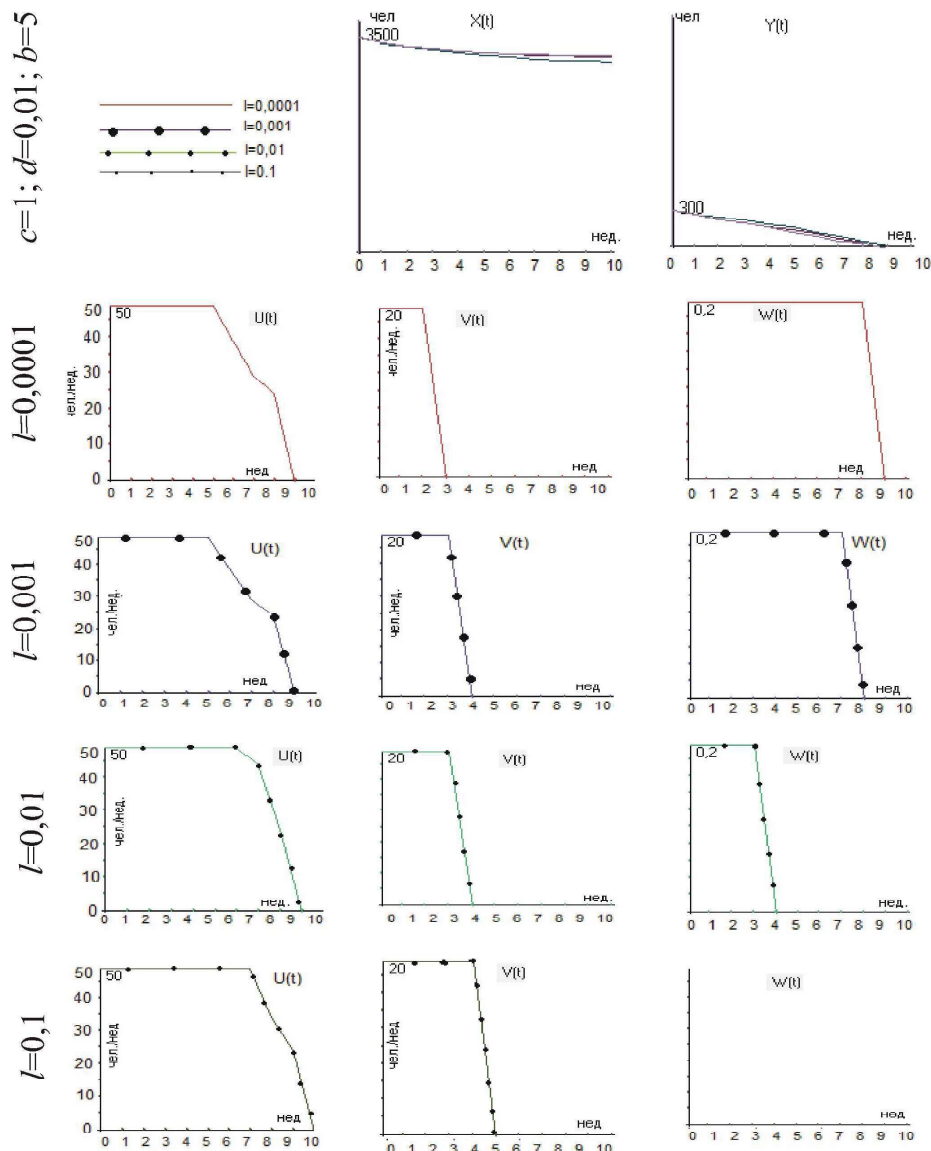
относительную стоимость вакцинации одного человека d . Из рис. 3.2 видно, что с ростом относительной стоимости вакцинации управление с помощью вакцинации снижается, управление изоляцией немного усиливается, суммарные затраты на погашение эпидемии незначительно возросли. При повышении стоимости вакцинации остаточное число подверженных инфицированию повышается из-за снижения управления вакцинацией.



Р и с у н о к 3.2

Решение задачи оптимального управления эпидемией методом синтеза управлений в зависимости от стоимости вакцинации.

Зафиксировав относительные стоимости: вакцинации одного человека d , изоляции одного больного c , остаточную стоимость больного b и меняя относительную стоимость информационной программы на одного человека l , получим:



Р и с у н о к 3.3

Решение задачи оптимального управления эпидемией методом синтеза управлений в зависимости от стоимости информационной программы.

Из рис. 3.3 видно, что с ростом относительной стоимости информационной программы управление информационной программой снижается, управление вакцинацией и карантинном усиливается. Суммарные затраты на погашение эпидемии возросли (за счёт штрафа за остаточных больных и дорогого управления карантинном). При повышении стоимости информационной программы остаточное число подверженных инфицированию снижается частично за счёт усиления управления вакцинацией, частично за счёт перехода в число инфицированных. Общая эпидемиологическая картина ухудшается.

4. Вывод

С ростом стоимости какого-то вида управления продолжительность его снижается, но в то же время растёт продолжительность других управлений. Увеличивается суммарная стоимость затрат на погашение эпидемии. Общая эпидемиологическая картина ухудшается.

На решение задачи методом синтеза управления оказывает влияние шаг численного метода: уменьшение шага Δt вызывает рост суммарных затрат на погашение эпидемии, с уменьшением шага $\Delta x = \Delta y$ уменьшается остаточное число подверженных инфицированию (за счёт перехода их в разряд больных). Структура управления и динамика $x(t)$ и $y(t)$ практически не изменяются.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреева Е.А., Цирулёва В.М. Численные методы решения экстремальных задач. Тверь: ТвГУ, 1999.- стр. 230-305.
2. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982.
3. Андреева Е.А., Овсянникова Н.И. Разработка алгоритма и программы управления процессом эпидемии// Программные продукты и системы, №3(87), 2009, – с .126-128.

Search of optimal control in model of epidemic

© N. I. Ovsjannikova

Abstract. N. I. Ovsjannikova²

Key Words: In the given work the discrete operated model of distribution of the infectious disease transferred by a contact way is constructed. The management purpose is minimisation of expenses for epidemic repayment at available restrictions on management and the initial data. optimum control, vaccination, isolation, is information-educational program

REFERENCES

1. Andreeva E.A., Tsirulyova V.M. Numerical methods of the decision of extreme problems. Tver: TBFY, 1999. p. 230-305.
2. Evtushenko Ju.G. Methods of the decision of extreme problems and their application in optimisation systems. M: the Science, 1982.
3. Andreeva E.A., Ovsyannikova N.I. Working of algorithm and the program of management of epidemic process//Software products and systems, №3 (87), 2009,-p. 126-128.