УДК 517.988.67

Оператор ложного возмущения в обобщенной задаче на собственные значения в условиях групповой симметрии

© Б. В. Логинов[1], О. В. Макеева[2]

Аннотация. Предложен процесс построения оператора ложного возмущения в условиях, когда обобщенная задача на собственные значения обладает групповой симметрией. На основе определения такого оператора можно применять итерационные процессы [2]-[3] уточнения приближений к спектральным характеристикам прямой и сопряженной задач.

Ключевые слова: обобщенная задача на собственные значения, метод ложных возмущений, групповая симметрия.

1. Введение

В 1961 г. М.К. Гавурин предложил метод ложных возмущений (ЛВ) [1] для самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Метод основан на построении оператора возмущения, такого, что заданные приближения к спектральным характеристикам становятся точными для возмущенного оператора, с последующим их уточнением итерационными методами. В ряде наших работ метод ЛВ распространен на общий случай достаточно гладких, прежде всего линейных, оператор-функций спектрального параметра в банаховых пространствах при симметричном использовании собственных функций и обобщенных жордановых цепочек (ОЖЦ) прямой и сопряженной задач со многими приложениями [2]-[3]. В работе [4] приведена общая схема метода при наличии групповой симметрии линейной по спектральному параметру оператор-функции. Для случая дискретной (непрерывной) групповой симметрии собственные элементы и обобщенные жордановы цепочки прямой и сопряженной задач могут быть восстановлены действием группы (действием инфинитезимальных операторов соответствующей алгебры Ли) на базисные элементы порождающих траектории подпространств. Простейшим примером служит оператор поворота на собственном подпространстве $N(B) = \{s^2, st, t^2\}$, где порождающие подпространства образованы базисными элементами s^2 и t^2. Поэтому для построения оператора ЛВ, обладающего групповой симметрией задачи, нужно знать приближения к указанным базисным элементам. Основными трудностями реализации метода ЛВ в условиях групповой симметрии является построение базисных приближений при наличии стационарных подгрупп и переход к линейным комбинациям, обеспечивающим выполнение соотношений биортогональности приближений для элементов ОЖЦ, необходимых для наследования групповой симметрии оператором ЛВ. Устойчивость метода по отношению к вычислительным погрешностям обосновывается регуляризацией задач теории бифуркаций, предложенной В.А. Треногиным и Н.А. Сидоровым в 70-х годах.

Работа поддержана грантом РФФИ-Румынская Академия 07-01-91680-РА-а.

[1]Профессор кафедры высшей математики, Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; loginov@ulstu.ru.

[2]Доцент кафедры математического анализа, Ульяновский государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова, г. Ульяновск; omakeeva@hotbox.ru.

2. Построение оператора ЛВ в условиях групповой инвариантности

Для упрощения изложения рассуждения в общем случае непрерывной групповой симметрии иллюстрируются их реализацией для одномерных порождающих подпространств.

В банаховых пространствах E_1 и E_2 рассмотрим линейную по спектральному параметру задачу на собственные значения

$$(A_0 - tA_1)x = 0. \tag{2.1}$$

Здесь $A_0 : E_1 \supset D(A_0) \to E_2$, $A_1 : E_1 \supset D(A_1) \to E_2$ — плотно заданные замкнутые линейные операторы, причем $D(A_0) \subset D(A_1)$ и A_1 подчинен A_0 (т. е. $\|A_1 x\|_{E_2} \leq \|A_0 x\|_{E_2} + \|x\|_{E_1}$ на $D(A_0)$) или $D(A_1) \subset D(A_0)$ и A_0 подчинен A_1 (т. е. $\|A_0 x\|_{E_2} \leq \|A_1 x\|_{E_2} + \|x\|_{E_1}$ на $D(A_1)$). Пусть неизвестное собственное значение λ является фредгольмовой точкой оператор-функции $A_0 - tA_1$ с собственными элементами $N(A_0 - \lambda A_1) = \mathrm{span}\{\varphi_1^{(1)}, \ldots, \varphi_n^{(1)}\} = E_1^n(\lambda) = E_1^n \subset E_1$, $N(A_0^* - \lambda A_1^*) = \mathrm{span}\{\psi_1^{(1)}, \ldots, \psi_n^{(1)}\} = E_{2,n}^*(\lambda) = E_{2,n}^* \subset E_2^*$ и отвечающими им A_1- и A_1^*-жордановыми цепочками [5] с длинами $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_n$

$$\begin{gathered}(A_0 - \lambda A_1)\varphi_i^{(s)} = A_1 \varphi_i^{(s-1)},\ (A_0^* - \lambda A_1^*)\psi_i^{(s)} = A_1^* \psi_i^{(s-1)},\ s = 2, \ldots, p_i,\ i = 1, \ldots, n, \\ k = \det[\langle A_1 \varphi_i^{(p_i)}, \psi_j^{(1)} \rangle] \neq 0,\ L = \det[L_{ij}] \neq 0,\ L_{ij} = [\langle A_1 \varphi_i^{(p_i+1-s)}, \psi_j^{(r)} \rangle]_{\substack{r=\overline{1,p_j} \\ s=\overline{1,p_i}}}.\end{gathered} \tag{2.2}$$

В статье [6] доказано следующее утверждение

Л е м м а 2.1. *Элементы $\varphi_i^{(s)}$, $\psi_j^{(r)}$, $s(r) = 1, \ldots, p_i(p_j)$, $i, j = 1, \ldots, n$ A_1- и A_1^*-жордановых наборов, отвечающих фредгольмовой точке λ оператор-функции $A_0 - \lambda A_1$ могут быть выбраны так, чтобы выполнялись следующие соотношения биортогональности*

$$\begin{aligned}&\langle \varphi_i^{(s)}, \gamma_j^{(r)} \rangle = \delta_{ij}\delta_{sr}, \quad \langle z_i^{(s)}, \psi_j^{(r)} \rangle = \delta_{ij}\delta_{sr}, \quad s(r) = 1, \ldots, p_i(p_j), \\ &\gamma_j^{(r)} = A_1^* \psi_j^{(p_j+1-r)}, \quad z_i^{(s)} = A_1 \varphi_i^{(p_i+1-s)}, \quad i, j = 1, \ldots, n.\end{aligned} \tag{2.3}$$

Предполагается, что уравнение (2.1) инвариантно относительно l-параметрической непрерывной группы $G \ni g(a_1, \ldots, a_l)$. Это означает, что существуют представления L_g в пространстве E_1 и K_g в пространстве E_2 такие, что операторы A_0 и A_1 сплетаются этими представлениями: $A_i L_g = K_g A_i$, $i = 0, 1$. Известно, что подпространства E_1^n и $E_{2,n}^*$ инвариантны относительно представлений L_g и K_g^*. Тогда в некотором базисе $\{\varphi_i\}_1^n$ в $E_1^n \ni \varphi = \sum_{i=1}^n \xi_i \varphi_i$ действие L_g в E_1^n определяется матрицей $\mathcal{A}_g = [\alpha_{ij}(g)]_{i,j=1}^n = [\alpha_{ij}(a)]_{i,j=1}^n$: $L_g \varphi_i = \mathcal{A}'_g \varphi_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ji}(g)\varphi_j$ $(\widetilde{\xi_i} = (\mathcal{A}_g \xi)_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}(g)\xi_j)$, $i = \overline{1,n}$. Аналогично преобразование K_g^* в инвариантном подпространстве $E_{2,n}^*$ определяет равенствами $K_g^* \psi_k = \sum_{j=1}^n \beta_{kj}(g)\psi_j$, $k = \overline{1,n}$ матрицу $\mathcal{B}_g = [\beta_{ij}(g)]_{i,j=1}^n$. Будем считать выполненным

Условие I. Прямое дополнение $E_1^{\infty-n} = (I - P)E_1^n$, порожденное проектором $P = \sum_{k=1}^n \langle \cdot, \gamma_k^{(1)} \rangle \varphi_k^{(1)}$, инвариантно относительно операторов $L(a)$.

Инвариантность подпространства E_1^n относительно группы $L(a)$ позволяет на основе [7] дать следующую геометрическую интерпретацию действия $L(a)$ в E_1^n. Пусть $\{I_j(\xi)\}_{j=1}^{l_1}$ – полная система функционально независимых инвариантов в E_1^n, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \Xi_\varphi^n = \Xi^n$. Подпространство E_1^n (соответственно Ξ_n) расслаивается на траектории $O(\varphi) = \{L(a)\varphi | a \in D \subset R^l\}$ ($O(\xi) = \{\mathcal{A}(a)\xi | a \in D \subset R^l\}$). Подпространство (многообразие) $M \subset E_1^n$ или в координатном представлении $M \subset \Xi^n$ назовем порождающим траекторию $O(\varphi)$, соответственно $O(\xi)$, если оно содержит некоторую точку этой траектории. В E_1^n (Ξ^n) существует полная минимальная система $\mathcal{M} = \{M_j\}_1^s$ порождающих подпространств (многообразий) M_j, $\dim M_j \le l_1$, $n - l_1 \le l$ такая, что для любого $\varphi \in E_1^n$ ($\xi \in \Xi^n$) найдутся $a \in D \subset R^l$ и число j, такие, что $L(a)\varphi \in M_j$ ($\mathcal{A}(a)\xi \in M_j$). Если минимальная система $\mathcal{M}$ состоит из порождающих подпространств (многообразий) одной размерности l_1, то будем говорить, что группа G действует в E_1^n (Ξ^n) l_1-оптимально. В этом случае в E_1^n существует базис $\{\varphi_j\}_1^n$, в котором для любого $\varphi \in E_1^n$ найдутся $a \in D$ и инварианты $r_1(\xi), \ldots, r_{l_1}(\xi)$, такие, что $L(a)\varphi = \sum\limits_{k=1}^{l_1} r_k(\xi)\varphi_{(k)} \in M_{j0}$, $\varphi_{(k)} \in (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$. Размерность траекторий общего положения (старшей размерности) равна $n - l_1 \le l$.

Далее предполагаем, что представления L_g в E_1^n и K_g^* в $E_{2,n}^*$ имеют полные системы l_1 функционально независимых инвариантов. В [4] показано, что если регуляризованный по Шмидту оператор $\widehat{B} = B + \sum\limits_{j=1}^{n} \langle \cdot, \gamma_i \rangle z_i$ также обладает групповой инвариантностью и выполнено условие I, то матрицы $\mathcal{B}_g$ и $\mathcal{A}_g$ эквивалентны, т.е. в некотором базисе совпадают. В [4], [8]-[9] показано, что точные собственные элементы и отвечающие им ОЖЦ прямой и сопряженной задач преобразуются соответственно операторами L_g и K_g^* т.е. той же матрицей $\mathcal{A}'_g$. Если полный канонический жорданов набор (ОЖН) занумерован по возрастанию длин ОЖЦ то регуляризованный по Шмидту оператор $\widehat{B}$ обладает групповой инвариантностью т.е. $\mathcal{B}_g = \mathcal{A}_g$ тогда и только тогда, когда подпространство $E_{2,n} = \mathrm{span}\{z_1, \ldots, z_n\}$ инвариантно относительно операторов K_g и матрица $\mathcal{A}_g$ блочнодиагональна.

Подпространства E_1^n и $E_{2,n}^*$ инвариантны соответственно относительно инфинитезимальных операторов представлений $L(a)$ и $K^*(a)$ и в общем случае их базисы восстанавливаются действием инфинитезимальных операторов на базисные элементы порождающих подпространств. Так для одномерных порождающих подпространств базисные элементы φ_k (ψ_k) определяются формулами $\varphi_{k+1} = X_k\varphi_1$ ($\psi_{k+1} = Y_k\psi_1$), где X_k (Y_k) инфинитезимальные операторы представлений $L(a)$ ($K^{*^{-1}}(a)$), $k = 1, \ldots, l$. Поэтому приближения к точным собственным векторам будут определяться действием инфинитезимальных операторов на считающиеся заданными приближения к собственным элементам подпространств, порождающих траектории старших размерностей.

Согласно [10] доказывается следующее утверждение

Л е м м а 2.2. *Пусть по формулам* (2.3) *построены приближения к ОЖЦ, отвечающие приближениям к собственным элементам порождающих подпространств. Переходя к линейным комбинациям можно определить системы* $\{\gamma_{k0}^{(s)}\}_{k,s=1}^{l_1,p_k}$, $\gamma_{k0}^{(s)} = A_1^*\psi_{k0}^{(p_k+1-s)}$ *и* $\{z_{i0}^{(j)}\}_{i,j=1}^{l_1,p_i}$, $z_{i0}^{(j)} = A_1\varphi_{k0}^{(p_i+1-j)}$, *отвечающие указанным собственным элементам и удовлетворяющие соотношениям биортогональности* $\langle \varphi_{i0}^{(j)}, \gamma_{k0}^{(s)} \rangle = \delta_{ik}\delta_{js}$, $\langle z_{i0}^{(j)}, \psi_{k0}^{(s)} \rangle = \delta_{ik}\delta_{js}$, $i, k = 1, \ldots, l_1$, $j(s) = 1, \ldots, p_i(p_k)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть определены приближения к собственным элементам порождающих подпространств и отвечающим им жордановым цепочкам: $\{\varphi_{i0}^{(j)}\}_1^{l_1,p_i}$, $\{\tilde\psi_{\mu0}^{(\nu)}\}_1^{l_1,p_\mu}$ и $z_{i0}^{(j)} = A_1\varphi_{i0}^{(p_i+1-j)}$. Полагая $\tilde\gamma_{\mu0}^{(\nu)} = A_1^*\tilde\psi_{\mu0}^{(p_\mu+1-\nu)}$ образуем линейные комбинации $\gamma_{k0}^{(s)} = \sum\limits_{\mu=1}^{l_1}\sum\limits_{\nu=1}^{p_\mu} K_{\kappa\mu}^{s\nu}\tilde\gamma_{\mu0}^{(\nu)}$, подчинив их условиям $\langle\varphi_{i0}^{(j)},\gamma_{k0}^{(s)}\rangle = \delta_{ik}\delta_{js}$, $i,k = 1,\dots,l_1$, $j(s) = 1,\dots,p_i(p_k)$. Тогда коэффициенты $K_{\kappa\mu}^{l\nu}$ могут быть однозначно определены из системы уравнений $\sum\limits_{\mu=1}^{l_1}\sum\limits_{\nu=1}^{p_\mu} K_{\kappa\mu}^{s\nu}\langle A_1\varphi_{i0}^{(j)},\tilde\psi_{\mu0}^{(p_\mu+1-\nu)}\rangle = \delta_{ik}\delta_{js}$, $i,k = 1,\dots,l_1$, $j(s) = 1,\dots,p_i(p_k)$. Полагая $\psi_{k0}^{(p_k+1-s)} = \sum\limits_{\mu=0}^{l_1}\sum\limits_{\nu=1}^{p_\mu} K_{\kappa\mu}^{s\nu}\tilde\psi_{\mu0}^{(p_\mu+1-\nu)}$ из этой системы находим, что $\langle z_{i0}^{(p_i+1-j)},\psi_{k0}^{(p_k+1-s)}\rangle = \delta_{ik}\delta_{js}$, $z_{i0}^{(p_i+1-j)} = A_1\varphi_{i0}^{(j)}$. Таким образом, построены приближения к ОЖЦ собственных элементов, удовлетворяющие соотношениям биортогональности (2.3).

При восстановлении с помощью инфинитезимальных операторов базисов в E_1^n и $E_{2,n}^*$ может оказаться, что количество построенных приближений превышает n. Среди них нужно выбрать наиболее удаленные от линейных оболочек заданных приближений. Для одномерных порождающих подпространств достаточно рассмотреть нормы $\|\varphi_{10}-\varphi_{k0}\|$, $\|\psi_{10}-\psi_{k0}\|$, $k = 2,\dots,l+1$, где $\varphi_{r+1,0} = X_r\varphi_{10}$ ($\psi_{r+1,0} = Y_r\psi_{10}$), $r = 1,\dots,l$ и выбрать среди полученных приближений $n-1$ наиболее удаленных от φ_{10} (ψ_{10}). Этой процедурой исключается действие стационарных подгрупп. Далее по формулам (2.3) строятся приближения к A_1- (A_1^*-) жордановым цепочкам точных собственных элементов. В силу групповой симметрии операторов A_0 и A_1 справедливо утверждение

Л е м м а 2.3. *Выбранные дополнительные собственные элементы и построенные к ним по формулам* (2.3) *ОЖЦ будут удовлетворять соотношениям биортогональности.*

Доказательство следует из формул преобразования элементов $\varphi_{k0};\gamma_{k0}$, $k = l_1,\dots,n$ ($\psi_{j0};z_{j0}$, $j = l_1,\dots,n$) операторами $L_g; L_{g^{-1}}^* = L_g^{*-1}$ (соответственно $K_{g^{-1}}^* = K_g^{*-1}; K_g$).

Таким образом построены приближения к ОЖН отвечающим собственным элементам $\{\varphi_j\}_1^{l_1}$ порождающих подпространств и к ОЖН дополнительных (дополняющих до базиса) собственных элементов $\{\varphi_j\}_{l_1+1}^n$ в прямой, а также в сопряженной задаче, удовлетворяющие по отдельности соотношениям биортогональности. Если окажется, что их объединение также удовлетворяет условиям биортогональности, то оператор ЛВ может быть построен по формулам [10]

$$D_0x = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\langle x,\gamma_{i0}^{(j)}\rangle\Big[\sigma_{i0}^{(j)} - \sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{p_k}\langle\sigma_{i0}^{(j)},\psi_{k0}^{(s)}\rangle z_{k0}^{(s)}\Big] + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\langle x,\tau_{i0}^{(j)}\rangle z_{i0}^{(j)}$$

или

$$D_0x = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\langle x,\gamma_{i0}^{(j)}\rangle\sigma_{i0}^{(j)} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\Big[\langle x,\tau_{i0}^{(j)} - \sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{p_k}\langle\varphi_{k0}^{(s)},\tau_{i0}^{(j)}\rangle\gamma_{k0}^{(s)}\rangle\Big] z_{i0}^{(j)},$$

где

$$\begin{array}{ll} \sigma_{i0}^{(1)} = (A_0-\lambda_0A_1)\varphi_{i0}^{(1)}, & \sigma_{i0}^{(j)} = (A_0-\lambda_0A_1)\varphi_{i0}^{(j)} - A_1\varphi_{i0}^{(j-1)}, \\ \tau_{i0}^{(1)} = (A_0^*-\lambda_0A_1^*)\psi_{i0}^{(1)}, & \tau_{i0}^{(j)} = (A_0^*-\lambda_0A_1^*)\psi_{i0}^{(j)} - A_1^*\psi_{i0}^{(j-1)}, \end{array} \quad j>1.$$

Мы не располагаем условиями взаимной биортогональности построенных ОЖН. В общем случае, когда полной биортогональности нет, приходится опять привлекать лемму 2.2.

З а м е ч а н и е 2.1. *Наличие полной биортогональности построенных ОЖН приведет к редукции (сокращению) числа решаемых уравнений в предложенных на основе построения ЛВ оператора итерационных процессах* [2]-[3]. *При отсутствии полной биортогональности редукции не будет. В этом случае полученные результаты только определяют процесс построения приближенных ОЖН в условиях групповой симметрии.*

З а м е ч а н и е 2.2. *Обобщение предложенного процесса на случай дискретной групповой симметрии очевидно. Здесь предложенный процесс на основе действия операторов представления сразу приведет к полной биортогональности и возможности построения оператора ЛВ без повторного применения леммы 2.2.*

Рассмотрен пример спектральной задачи по Э. Шмидту для системы $u'' + \lambda v = 0$, $v'' + \lambda u = 0$, $u, v \in C^2([-1,0)\bigcup(0,1])\bigcap C^1[-1,1]$, $u(-1) = 0$, $u(0) = u(1)$, $v(-1) = v(0)$, $v(1) = 0$.

Список литературы

1. Гавурин М.К. О методе ложных возмущений для нахождения собственных значений // ЖВМиМФ, 1961, Т.1; № 5. - С. 751-770.

2. Loginov B.V., Makeeva O.V. Pseudoperturbation method in generalized eigenvalue problems // ROMAI J., 2008, V.4.

3. Логинов Б.В., Макеева О.В. Метод ложных возмущений в обобщенных задачах на собственные значения // Доклады РАН, 2008, №419 (2). - С. 160-163.

4. Логинов Б.В. Теория ветвления решений нелинейных уравнений в условиях групповой инвариантности. – Ташкент: Фан, 1985. - 184 с.

5. Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. – М.: Наука, 1969. - 524 с.

6. Логинов Б.В., Русак Ю.Б. Обобщенная жорданова структура в теории ветвления // Прямые и обратные задачи для уравнений с частными производными (ред. М.С. Салахитдинов), АН УзССР, Ташкент, Фан, 1978. - С. 133-148.

7. Эйзенхарт Л.П. Непрерывные группы преобразований. – М.: ИЛ, 1947. - 360 с.

8. Логинов Б.В. Ветвление решений нелинейных уравнений и групповая симметрия // Вестник СамГУ, 1998, №4 (10). - С. 15-70.

9. Karasözen B., Konopleva I., Loginov B. Hereditary symmetry of resolving systems for nonlinear equations with Fredholm operators // Nonl. Anal. Appl.: to V. Lakshmikantham on his 80-th Birthday. (R.P. Agarwal, D. O'Regan-eds.), Kluwer Acad. Publ. Dordrecht, 2003, V.2. - P. 617-644.

10. Логинов Б.В., Макеева О.В., Цыганов А.В. Уточнение приближенно заданных жордановых цепочек линейной оператор-функции спектрального параметра на основе теории возмущений // Межвуз. сборник научных трудов "Функциональный анализ", Ульяновск: УлГПУ, 2003, вып.38. - С. 53-62.

Дата поступления 12.08.2009

Pseudoperturbation operator in generalized eigenvalue problem under group symmetry

© B. V. Loginov[3], O. V. Makeeva[4]

Abstract. It is suggested process for pseudoperturbation operator construction when an considered generalized eigenvalue problem process an group symmetry. On the base of introducing such operator iterational processes [2]-[3] can be applied for refining of approximations to spectral characteristics of direct and conjugate problems.

Key Words: generalized eigenvalue problem, pseudoperturbation method, group symmetry.

References

1. Gavurin M.K. On pseudoperturbation method for eigenvalues determination // J. Comput. Math. Math. Phys. 1, 5 (1961), 751-770, Russian, Engl. transl.

2. Loginov B.V., Makeeva O.V. Pseudoperturbation method in generalized eigenvalue problems // ROMAI J., 2008, V.4.

3. Loginov B.V., Makeeva O.V. The Pseudoperturbation method in generalized eigenvalue problems // Doklady Mathematics, 77, 2 (2009), 194-197. Pleiades Publ., Ltd.; Dokl. Akad. Nauk 419, 2 (2009), 160-163.

4. Loginov B.V. Branching Theory of Solutions of Nonlinear Equation under Group Symmetry Conditions. – Tashkent: Fan, Acad. Sci. Uzbek SSR (1985).

5. Vainberg M.M., Trenogin V.A. Branching theory of solutions of nonlinear equations. – Moscow: Nauka (1969); Engl. transl. Volters-Noordorf Int. Publ., Leyden (1974).

6. Loginov B.V., Rousak Yu.B. Generalized Jordan structure in branching theory // Direct and Inverse Problems for Partial Differential Equations (M.S. Salakhitdinov-ed), Akad. Nauk UzbekSSR, Tashkent, Fan, (1978), 133-148.

7. Eisenhart L.P. Continue transformation groups. – M.:IL (1947).

8. Loginov B.V. Solutions branching of nonlinear equations and group symmetry // Vestnik of Samara State University. 4, 10 (1998), 15-70.

9. Karasözen B., Konopleva I., Loginov B. Hereditary symmetry of resolving systems for nonlinear equations with Fredholm operators // Nonl. Anal. Appl.: to V. Lakshmikantham on his 80-th Birthday. (R.P. Agarwal, D. O'Regan-eds.), Kluwer Acad. Publ. Dordrecht. V.2 (2003), 617-644.

10. Loginov B.V., Makeeva O.V., Tsyganov A.V. Refining of approximately given Jordan chains of linear operator-function of spectral parameter on the base of perturbation theory // Interuniv. Proc. "Functional Analysis", Ulyanovsk Pedagogical University, 38 (2003), 53-62.

[3]Professor of Higher Mathematics Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; loginov@ulstu.ru.
[4]Associate professor of Mathematics Analyze Chair, Ulyanovsk State Pedagogical University after I. N. Ulyanova, Ulyanovsk; omakeeva@hotbox.ru.