УДК 517.9

О дискретизации решений задачи Коши для уравнения Клейна-Гордона с начальными условиями из классов Никольского

© **И. Ж. Ибатулин**[1]

Аннотация. В работе получены оптимальные порядки дискретизации решений задачи Коши для уравнения Клейна-Гордона с нулевой начальной скоростью в метрике $L^{q,\infty}$.
Ключевые слова: дифференциальные уравнения в частных производных, задача Коши, уравнение Клейна-Гордона, квантовая теория поля, ряд Фурье, функционал.

1. Введение

Предметом исследования в статье является задача Коши для уравнения Клейна-Гордона ($s = 1, 2, \ldots$)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2} - u \, (u = u(x,t), 0 \leq t < \infty, x \in R^s) \, , \tag{1.1}$$

$$u(x,0) = f_1(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = f_2(x) \, (x \in R^s) \, , \tag{1.2}$$

$$f_1 \in H_2^{r_1}(0,1)^s, f_2 \in H_2^{r_1}(0,1)^s, r_1 > 2 + \frac{s}{2}, r_2 > 1 + \frac{s}{2}. \tag{1.3}$$

В квантовой теории поля уравнение (1.1) рассматривают как полевое уравнение (см., например, [1, с. 42]).

Уравнение Клейна-Гордона имеет как некоторые общие свойства, так и серьезные отличия с волновым уравнением (см., например, [2]), а уравнение Шредингера является нерелятивистским приближением для уравнения Клейна — Гордона (см., например, [1, с. 41]).

2. Постановка задачи

В изучаемом здесь случае задача (1.1)-(1.3) имеет явное решение в виде суммы абсолютно сходящегося кратного функционального ряда, который полностью определяется наборами $\{\hat{f}_1(m)\}_{m \in Z^s}$ и $\{\hat{f}_2(m)\}_{m \in Z^s}$ коэффициентов Фурье (подробнее см. [3]). Поэтому возникает проблема приближения решения (объекта бесконечного) по конечной числовой информации заданного объема N, полученной от функций f_1 и f_2, которые принадлежат классам функций, однопериодических по каждой из своих s переменных, $F^{(1)} = H_2^{r_1}(0,1)^s$, $F^{(2)} = H_2^{r_2}(0,1)^s$ соответственно (определение классов см., например, [3, 4]). Остановимся более подробно на постановке рассматриваемой задачи (в редакции из [5 - 6]).

Для заданного целого положительного N выбираем целые положительные числа N_1 и N_2 такие, что $N_1 + N_2 = N$, далее от функций f_1 и f_2 берем числовую информацию,

[1]Преподаватель кафедры фундаментальной и прикладной математики, Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева, г. Астана, Казахстан; mathibragim@mail.ru.

объема N_1 и N_2 соответственно, то есть функционалы из $L^{(1)}_{N_1}$ и $L^{(2)}_{N_2}$, причем $L^{(1)}_{N_1}$ и $L^{(2)}_{N_2}$, могут быть любыми, единственным естественным ограничением является то, что первые N_1 функционалов должны быть определены на линейной оболочке на классе функций $F^{(1)}$, оставшиеся N_2 функционала – на линейной оболочке на $F^{(2)}$.

Отметим некоторые примеры функционалов

1. $l(f) = f(\xi)$ - значения в точке;
2. $l(f) = \langle f, g\rangle$ - скалярное произведение, в частности, коэффициенты Фурье по той или иной ОНС;
3. $l(f)$ - все возможные линейные функционалы;
4. $l(f)$ - какие-то функционалы, но не все.

Полученную информацию перерабатываем с помощью алгоритма $\varphi_N(\tau_1,\dots,\tau_s;x,t)$ до функции от тех же переменных, что и функция $u(x,t;f_1,f_2)$ - решение задачи (1.1)- - (1.3), конечно же, от функции $\varphi_N(\tau_1,\dots,\tau_s;x,t)$ требуем только, чтобы она принадлежала нормированному пространству функций Y, определенных на $\Omega_Y = [0,1]^s \times [0,+\infty)$.

В качестве алгоритма $\varphi_N(\tau_1,\dots,\tau_s;x,t)$ могут служить

1) конечные суммы вида $\sum\limits_{k=1}^{N} \tau_k\rho_k(t)\psi_k(x)$, где $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ -

- система Хаара, Франклина, Уолша и т.д.,
- базис в банаховом пространстве B,
- базис Рисса в V,
- система ненулевых элементов сепарабельного гильбертового пространства H, являющиеся фреймом,
- ортонормированный базис пространства $L^2(R^1)$, порожденный функцией $\psi \in L^2(R^1)$, называемой всплеском.

2) конечные суммы вида $\sum\limits_{k=1}^{N} \tau_k\rho_k(t)D_N(x-\xi_k)$, где D_N - специальное ядро.

3) решение разностной схемы составленной для задачи (1.1)-(1.3).

Тем самым, перебирая всевозможные наборы $(l(N);\varphi_N) \equiv (l^{(1)}_1,\dots,l^{(1)}_{N_1},l^{(2)}_1,\dots,l^{(2)}_{N_2};\varphi_N)$ мы можем получить весь арсенал, изучаемый в теории приближений и вычислительной математике.

Погрешность приближения измеряем в норме пространства Y, далее берем супремумы по классам $F^{(1)}$, $F^{(2)}$, чтобы знать наихудшую погрешность по классам, остальные не хуже, затем среди всевозможных агрегатов приближения выбираем наилучший и последнее, рассматриваем минимум, перебирая всевозможные пары натуральных чисел N_1, N_2: $N_1+N_2=N$, поскольку важно взять такое количество информации от каждой из функций f_1 и f_2 (общее количество информации N), чтобы порядок погрешности был как можно меньше:

$$\min_{\substack{N_1+N_2=N\\ N_1\ge 1, N_2\ge 1}} \inf_{(l(N);\varphi_N)\in L^{(1)}_{N_1}\times L^{(1)}_{N_2}\times\{\varphi_N\}} \sup_{\substack{f_1\in F^{(1)}\\ f_2\in F^{(2)}}} \|u(\cdot;f_1,f_2)-\varphi_N(l^{(1)}_1,\dots,l^{(2)}_{N_2};\cdot)\|_Y \qquad (2.1)$$

Задача заключается в получении оценок сверху и оценок снизу для величины (2.1) (желательно совпадающих с точностью до констант) и в указании вычислительного агрегата, реализующего оценку сверху.

Через $c(\alpha,\beta,\dots)$ будем обозначать некоторые положительные величины, различные, вообще говоря, в разных формулах и зависящие лишь от указанных в скобках параметров.

Если $\{P_N\}_{N=1}^{\infty}$ – последовательность положительных чисел и $\{Q_N\}_{N=1}^{\infty}$ – произвольная числовая последовательность, то запись $Q_N \underset{\alpha,\beta,\ldots}{\ll} P_N$ означает, что найдется постоянная $c(\alpha,\beta,\ldots)$, для которой при каждом целом положительном N выполнено неравенство $|Q_N| \le c(\alpha,\beta,\ldots)P_N$. Если же $\{P_N\}_{N=1}^{\infty}$ и $\{Q_N\}_{N=1}^{\infty}$ – две последовательности положительных чисел, то запись $Q_N \underset{\alpha,\beta,\ldots}{\asymp} P_N$ означает, что одновременно выполняются соотношения $Q_N \underset{\alpha,\beta,\ldots}{\ll} P_N$ и $P_N \underset{\alpha,\beta,\ldots}{\ll} Q_N$.

3. Оптимальные порядки дискретизации решений задачи (1.1)-(1.3)

Конкретизируя в (2.1) пространства, классы, и множества $L_{N_1}^{(1)}$, $L_{N_2}^{(2)}$ получаем различные постановки задач (см., напр., [5-9] и имеющуюся в них библиографию).

В работе [3] в случае $u(x,t;f_1,f_2)$ – решение задачи (1.1)-(1.3): $L_{N_1}^{(1)}$ и $L_{N_2}^{(2)}$ - множества N_1 и N_2 членных наборов всех возможных линейных функционалов, определенных на линейных оболочках на классах $H_2^{r_1}(0,1)^s$ и $H_2^{r_2}(0,1)^s$ соответственно, $Y = L^{2,\infty} = L^{2,\infty}(0,1)^s \times [0,+\infty)$ была доказана следующая

Т е о р е м а А. *Пусть даны целое положительное число* s*, положительные* r_1 *и* r_2 *такие, что*

$$r_1 > 2 + \frac{s}{2}, r_2 > 1 + \frac{s}{2}.$$

Тогда имеют место соотношения $(N = 1,2,\ldots)$

$$\min_{\substack{N_1+N_2=N\\ N_1\ge 1, N_2\ge 1}} \inf_{\substack{l_k\in L_{N_k}^{(k)}\\ k=1,2,\varphi_N}} \sup_{\substack{f_1\in H_2^{r_1}(0,1)^s\\ f_2\in H_2^{r_2}(0,1)^s}} \left|\left|u(\cdot;f_1,f_2) - \varphi_N(l_1^{(1)},\ldots,l_{N_2}^{(2)};\cdot)\right|\right|_{L^{2,\infty}} \underset{r_1,r_2,s}{\asymp} N^{-\frac{\min\{r_1;r_2+1\}}{s}}.$$

Данная работа посвящена случаю $u(x,t;f_1,0)$ – решение задачи (1.1)-(1.3): $f_1 \in H_2^{r_1}(0,1)^s$, $f_2 \equiv 0$, $L_N^{(1)}$ - множество N членных наборов всех возможных линейных функционалов, определенных на линейной оболочке на классе $H_2^{r_1}(0,1)^s$, $Y = L^{q,\infty} = L^{q,\infty}(0,1)^s \times [0,+\infty)$, $2 \le q \le +\infty$. Справедлива

Т е о р е м а. *Пусть даны целое положительное число* s*, положительное* r_1 *и* $2 \le q \le +\infty$ *такие, что*

$$r_1 > 2 + \frac{s}{2}.$$

Тогда имеют место соотношения $(N = 1,2,\ldots)$

$$\inf_{\substack{l_1\in L_N^{(1)},\\ \varphi_N}} \sup_{f_1\in H_2^{r_1}(0,1)^s} \left|\left|u(\cdot;f_1,0) - \varphi_N(l_1^{(1)},\ldots,l_N^{(1)};\cdot)\right|\right| \underset{r_1,q,s}{\asymp} N^{-\frac{r_1}{s}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)}. \tag{3.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим основные моменты доказательства данной теоремы.

Оценка снизу проводится с помощью построения тригонометрического многолена $b(x)$ со спектром в $(2^{n-1},2^n]^s \bigcap Z^s$, где $n = 1 + \left[\frac{\log_2 2N}{s}\right]$, $[\cdot]$ – целая часть числа. Тригонометрический многочлен $b(x)$ выбирается таким образом, что для наперед заданных линейных функционалов $l_1,\ldots,l_N$ выполнено $l_j(b) = 0$ $(j = 1,\ldots,N)$ и $||b||_{L^\infty} \ge 2^{-nr}N^{1/2}$, $||b||_{L^2} = 2^{-nr}$, $b \in H_2^{r_1}(0,1)^s$ (о существовании подобного многочлена см. [3, 7]). Далее, оценивая снизу $\sup\limits_{f_1 \in H_2^{r_1}(0,1)^s} \left|\left|u(\cdot; f_1, 0) - \varphi_N(l_1^{(1)}, \ldots, l_N^{(1)}; \cdot)\right|\right|_{L^{q,\infty}(0,1)^s \times [0,+\infty)}$ через $||b||_{L^q}$, с помощью неравенства разных метрик и определения инфинимума получаем оценку снизу в (3.1).

Оценка сверху. Поскольку решение задачи (1.1) с начальными условиями $u(x,0) = f_1(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$ $(x \in R^s)$, $f_1 \in H_2^{r_1}(0,1)^s$, представимо в виде абсолютно сходящегося ряда $u(x,t) = \sum\limits_{m \in Z^s} \hat{f}(m) \cos(t\sqrt{4\pi(m,m)+1}) e^{2\pi i(m,x)}$ (см. [3]), то, рассматривая в качестве агрегата $\varphi_N(l_1^{(1)}, \ldots, l_N^{(1)}; x, t)$ соответсвенно частичную сумму ряда $(N \geq 3^s)$:

$$\varphi_N(l_1^{(1)}, \ldots, l_N^{(1)}; x, t) = \sum_{k=1}^{N'} \hat{f}(\nu^{(k)}) \cos(t\sqrt{4\pi(\nu^{(k)}, \nu^{(k)}) + 1}) e^{2\pi i(\nu^{(k)}, x)},$$

где $\{\nu^{(k)}\}_{k=1}^{N'}$ - некоторое упорядочение множества $I_n = \{(m_1, \ldots, m_s) : \max\limits_{j=1,\ldots,s} |m_j| \leq 2^n\}$, $N' = (2^n+1)^s$, $n = \left[\log_2(\sqrt[s]{N} - 1)\right] - 1$ и, применяя неравенства разных метрик, получаем оценку сверху в (3.1).

Замечание. При $q = 2$ из вышеуказанной теоремы получаются соответственно неулучшаемые порядки погрешностей дискретизации решений задачи Коши для уравнении Клейна-Гордона с начальными условиями $u(x,0) = f_1(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$ $(x \in R^s)$, $f_1 \in H_2^{r_1}(0,1)^s$, $r_1 > 2 + \frac{s}{2}$, по точной информации, которые были получены ранее в [3].

4. Заключение

Практический смысл полученных результатов заключается в том, что, используя весь арсенал, изучаемый в теории приближений и вычислительной математике, беря от функции $f_1 \in H_2^{r_1}(0,1)^s$ информацию объема N в виде различных линейных функционалов, но рассматривая как линейные так и не линейные алгоритмы приближения решений задачи Коши для уравнения Клейна-Гордона с начальными условиями

$$u(x,0) = f_1(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 (x \in R^s),$$

и измеряя погрешность в метрике $L^{q,\infty}(0,1)^s \times [0,+\infty)$, с точностью до констант не зависящих от N получить оценку лучше, чем $N^{-\frac{r_1}{s} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)}$ нельзя , и агрегатом, реализующим оценку сверху является ($N \geq 3^s$)

$$\varphi_N(l_1^{(1)}, \ldots, l_N^{(1)}; x, t) = \sum_{k=1}^{N'} \hat{f}_1(\nu^{(k)}) \cos(t\sqrt{4\pi^2(\nu^{(k)}, \nu^{(k)}) + 1}) e^{2\pi i(\nu^{(k)}, x)},$$

где $\{\nu^{(j)}\}_{j=1}^{N'}$ - некоторое упорядочение множества I_n, $N' = (2^{n+1}+1)^s$, $n = \left[\log_2(\sqrt[s]{N} - 1)\right] - 1$.

Список литературы

1. Райдер Л. Квантовая теория поля. – М.: Платон, 1998. – 512 с.

2. Дудникова Т.В., Комеч А.И. О двух-температурной задаче для уравнения Клейна-Гордона// Российский журнал Мат. Физики, 2005, Т. 12, №. 3, С. 301-325.

3. Ибатулин И.Ж., Темиргалиев Н. Об информативной мощности всех возможных линейных функционалов при дискретизации решений уравнения Клейна-Гордона в метрике $L^{2,\infty}$ // Дифференциальные уравнения, 2008, Т.44; №4, - С. 491-506.

4. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1969 – 480 с.

5. Темиргалиев Н. Теоретико-числовые методы и теоретико-вероятностный подход к задачам Анализа. Теория вложений и приближений, абсолютная сходимость и преобразования рядов Фурье// Вестник Евразийского университета, 1997; №3, - С. 90-144.

6. Темиргалиев Н. Теоретико-числовые методы и теоретико-вероятностный подход к задачам Анализа. Теория вложений и приближений, абсолютная сходимость и преобразования рядов Фурье Вестник (Продолжение 1)// Вестник Евразийского национального университета, 2002; № 3-4 - С. 222-272.

7. Ажгалиев Ш.У., Темиргалиев Н. Об информативной мощности линейных функционалов // Мат. заметки, 2003, Т. 73; №6, - С. 803-812.

8. Берикханова М.Е., Шерниязов К.Е. Об информативной мощности всех линейных функционалов при дискретизации решений уравнения Лапласа в круге // Вестник КазНУ. Серия мат. мех.инф, 2003, Т. 38; №3, - С. 8-18.

9. Баилов Е.А., Темиргалиев Н. О дискретизации решений уравнения Пуассона// Журн.вычислит. математики и мат.физики, 2006, Т. 46; №9, - С. 1594-1604.

Дата поступления 01.10.2009

On the discretization of solutions of a problem of Koshi For Klein-Gordon's equation with entry conditions from Nikolsky's classes

© I. Zh. Ibatulin[2]

Abstract. In the work optimum usages of discretization of solutions of a problem of Koshi for Klein-Gordon's equation with zero initial speed in the metrics of $L^{q,\infty}$ are received.
Key Words: The differential equations in partial derivatives, a problem of Koshi, Klein-Gordon's equation, the quantum theory of a field, a series of Fure, functional.

References

1. Raider L. The quantum theory of a field. M.: Platon, 1998., 512 p.

2. Dudnikova T.V., Komech A.I. On two-temperature problem for Klein-Gordon's equation//Russian J.Math. Physics, 2005 v. 12, no. 3, pp. 301-325.

3. Ibatulin I.Zh., Temirgaliev N. On the informative power of all possible linear functionals for the discretization of solutions of the Klein–Gordon equation in the metric of $L^{2,\infty}$ // Differential Equations, 2008, Vol. 44, No. 4, pp. 510–526.

4. Nikolski S.M. Approach of functions of many variables and the theorems. M.: Sciences, 1969, 480 p.

5. Temirgaliev N. Theory numbers methods and the probability-theoretic approach to Analysis problems. The theory of investments and approach, absolute convergence and transformations of Fure series// Buleten of Eurasian university, 1997, no. 3, pp. 90-144.

6. Temirgaliev N. Theory numbers methods and the probability-theoretic approach to Analysis problems. The theory of investments and approach, absolute convergence and transformations of Fure series (Continuation 1)// Buleten of Eurasian national university, 2002, no. 3-4, pp. 222-272.

7. Azhgaliev Sh., Temirgaliev N. Informativeness of linear functionals//Mathematical Notes, 2003, vol. 73, no. 6, pp. 759–768.

8. Berikhanova M.E., Sherneyazov K.E. Informativeness of linear functionals for the discretization of the solutions to Poisson's equation on the round// Buleten KazNU. ser. мат. мech.inf, 2003, V. 38, no. 3, pp. 8-18.

9. Bailov E.A., Temirgaliev N. Discretization of the solutions to Poisson's equation// Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2006, Vol. 46, No. 9, pp. 1515–1525.

[2]The teacher of chair of fundamental and applied mathematics, The Euroasian national university name after L. N. Gumilev, Astana, Kazakhstan; mathibragim@mail.ru.