

DOI 10.15507/2079-6900.28.202603.258-279

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 539.371

Задача плоской теории упругости о диаметрально сжатии кольца сосредоточенной нагрузкой

Д. С. Мосиенко, М. А. Леган

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук (г. Новосибирск, Российская Федерация)

Аннотация. Рассматривается плоская задача линейной теории упругости для кольцевой области, нагруженной на внешнем контуре двумя противоположно направленными сосредоточенными силами, решение которой получено при помощи функций комплексной переменной. Решение построено методом Колосова–Мусхелишвили с использованием принципа суперпозиции: известные потенциалы для сплошного диска дополнены рядами Лорана с явно определяемыми коэффициентами. Исследована сходимости решения и предельные переходы к бесконечно малому отверстию и тонкостенному кольцу. Качественный анализ демонстрирует хорошее совпадение результата моделирования с экспериментальными данными, полученными методом фотоупругости. Достоверность решения подтверждена контролем граничных невязок. Решение позволяет определить зависимость коэффициента концентрации растягивающих напряжений на контуре отверстия от отношения радиусов внутреннего отверстия и габаритного. Значения этого коэффициента, рассчитанные при помощи подхода, представленного в данной статье, совпадают с данными, полученными с использованием метода конечных элементов. При увеличении радиуса центрального отверстия коэффициент концентрации растягивающих напряжений на контуре отверстия нелинейно возрастает. Обсуждены различия между сосредоточенными силами и контактным нагружением, ограничения модели и применение решения при обработке результатов модифицированного бразильского теста.

Ключевые слова: плоская теория упругости, кольцевая область, диаметрально сжатие, комплексные потенциалы, коэффициент концентрации напряжений, фотоупругость, модифицированный бразильский тест

Для цитирования: Мосиенко Д. С., Леган М. А. Задача плоской теории упругости о диаметрально сжатии кольца сосредоточенной нагрузкой // *Журнал Средневожского математического общества*. 2026. Т. 28, № 3. С. 258–279. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202603.258-279

Об авторах:

Мосиенко Дмитрий Сергеевич, аспирант, младший научный сотрудник, Институт гидродинамики имени М. А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук (630090, Россия, г. Новосибирск, пр. Академика Лаврентьева, д. 15), ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-2837-1039>, e-mail: mosienko.d.s@hydro.nsc.ru

Леган Михаил Антонович, доктор технических наук, ведущий научный сотрудник, Институт гидродинамики имени М. А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук (630090, Россия, г. Новосибирск, пр. Академика Лаврентьева, д. 15), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9029-6770>, e-mail: leganma@yandex.ru

© Д. С. Мосиенко, М. А. Леган



Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License.
This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License.

MSC2020 74-10, 74Sxx

The problem of the plane elasticity theory on the diametric compression of a ring by a concentrated load

D. S. Mosienko, M. A. Legan*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (Novosibirsk, Russian Federation)*

Abstract. The article considers a plane problem of the linear elasticity theory for an annular region loaded on the outer contour by two oppositely directed concentrated forces. An analytical solution to the problem is obtained using functions of a complex variable. More specifically, the solution is constructed by the Kolosov–Muskhelishvili method using the superposition principle: the known potentials of a solid disk are supplemented with Laurent series with explicitly defined coefficients. The convergence of the solution and its passage to the limiting cases of an infinitesimal hole and of a thin-walled ring are studied. Qualitative analysis demonstrates good agreement between the result of modelling and the experimental data obtained by the photoelasticity method. The reliability of the solution is confirmed by monitoring the boundary discrepancies. The solution makes it possible to determine the dependence of the tensile stress concentration coefficient on the hole contour on the ratio of the internal hole radius to the overall radius. The values of this coefficient calculated using the solution presented in this article coincide with the data obtained using the finite element method. As the radius of the central hole increases, the coefficient of tensile stress concentration on the hole contour increases nonlinearly. The differences between concentrated and contact loading, the limitations of the model, and the application of the solution to the processing of the modified Brazilian test results are discussed.

Keywords: plane elasticity theory, annular region, diametrical compression, complex potentials, stress concentration factor, photoelasticity, modified Brazilian test

For citation: *D. S. Mosienko, M. A. Legan. The problem of the plane elasticity theory on the diametric compression of a ring by a concentrated load. Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva. 28:3(2026), 258–279. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202603.258-279*

About the authors:

Dmitry S. Mosienko, Ph.D. student, research assistant, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (15 Academician Lavrentiev Ave., Novosibirsk 630090, Russia), e-mail: mosienko.d.s@hydro.nsc.ru

Mikhail A. Legan, D.Sc. (Tech.), leading researcher, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (15 Academician Lavrentiev Ave., Novosibirsk 630090, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9029-6770>, e-mail: leganma@yandex.ru

1. Введение

Диаметральное сжатие кругового кольца является классической задачей плоской теории упругости и одновременно служит расчётной основой ряда прочностных испытаний [1]. Практическая значимость задачи обусловлена применением кольцевых

образцов в модифицированном бразильском тесте (МБТ), методология и ограничения которого рассмотрены в [2–3]. Центральное отверстие является регулярным концентратором напряжений и обеспечивает локализацию зарождения трещины. Для обработки результатов испытаний требуется вычислить поле напряжений в виде, удобном для применения градиентных, интегральных и связанных нелокальных критериев разрушения [4–6]. Диски с центральным отверстием также используются в современных исследованиях смешанного разрушения [7]. При обработке экспериментальных данных, вычислении растягивающих напряжений на линии действия внешней нагрузки и последующем определении условного предела прочности на растяжение, важную роль играет аналитическая модель расчета напряженно-деформированного состояния.

Классическое решение этой задачи предложено С.П. Тимошенко [8]. Данное решение основано на принципе суперпозиции – сочетании двух решений о растяжении и трёхкратном сжатии бесконечной плоскости с отверстием. Согласно данному решению, значение коэффициента концентрации напряжений в критической точке (на внутренней поверхности отверстия по линии действия нагрузки) равно 6. Недостатком такого решения является то, что оно не учитывает конечные размеры кольца. При увеличении радиуса центрального отверстия относительно габаритного радиуса кольца, допущение о том, что можно описать кольцо как сжимаемую плоскость, теряет свою силу. Это приводит к ошибке в расчете коэффициента концентрации напряжений, необходимого для экспериментальных прочностных исследований материалов. В статье [4] представлены данные расчетов критической нагрузки при помощи различных критериев разрушения, учитывающих неоднородное напряженное состояние, с использованием решения Тимошенко. Отмечается, что отклонение измеренных и вычисленных значений достигает 20%. В работе [9] представлена попытка получить решение для коэффициента концентрации напряжений в критической точке в виде грубого приближения квадратичной функцией. Согласно ему, значение коэффициента концентрации уже зависит от размера отверстия и равняется $6 + 38t^2$, где t – отношение радиуса отверстия к внешнему радиусу диска.

В отечественной литературе приближённое решение получено М.З. Народецким методом последовательных приближений Шварца [10]. По сравнению с классическим решением оно позволяет получить значения напряжений на внутренней поверхности диска в зависимости от радиуса центрального отверстия. При этом отмечается, что метод Шварца приводит к значительным вычислительным трудностям в связи с итеративным процессом приближения к решению, а также к малоэффективным результатам даже в применении к сравнительно простой задаче теории упругости. Тем не менее, М.З. Народецкому путем выделения главных членов удалось получить решение задачи о кольце. Однако, как будет показано далее в настоящей работе на примере вычисления коэффициента концентрации напряжений, решение на основе метода последовательных приближений Шварца приводит к заметным погрешностям.

В последующих работах исследованы напряжения и перемещения на контурах кольца, а также коэффициенты концентрации напряжений [11–12]. В работе [13] комплексные потенциалы определены методом суперпозиции, а коэффициенты концентрации напряжений приведены для $0 \leq t \leq 0.95$. Поэтому настоящая работа не претендует на получение первого точного решения задачи. Основное внимание уделено математически однозначной и воспроизводимой форме рядового решения, контролю сходимости, сопоставлению с опубликованными результатами, исследованию предельного режима тонкого кольца, а также оценке влияния области контакта при сравнении решения методом конечных элементов с решением с сосредоточенными силами.

Результаты классических фотоупругих исследований кольцевых и дисковых областей обобщены в монографиях М.М. Фрохта [14] и Дж. Далли, У. Райли [15]. В реальных испытаниях нагрузка передаётся через контактную площадку конечной ширины. Решения для давления, распределённого по противоположным участкам внешнего контура, получены в [16–17]. Современное исследование кольцевых образцов из технической керамики [18] также показывает, что максимальные растягивающие напряжения возникают на внутреннем контуре по линии действия сил, однако точность упрощённых формул зависит от геометрии образца и способа приложения нагрузки.

В настоящей работе представлено однозначно определенное решение в форме рядов, разработан воспроизводимый алгоритм его вычисления, результаты сравниваются с опубликованными данными, определяется сходимость решения, определяются вычислительные ограничения при $t \rightarrow 1$ и ведущее асимптотическое соотношение для коэффициента концентрации напряжений в тонком кольце. Результаты сравниваются с решением, полученным с использованием метода конечных элементов. Проводится анализ влияния длины дуги, по которой распределяется нагрузка, при сравнении с решением задачи со сосредоточенными силами. Определяются ограничения на использование решения в виде аналитических выражений для расчета полей напряжений в образцах, подвергаемых натурным испытаниям.

2. Постановка задачи

Рассматривается однородное изотропное линейно-упругое кольцо с внутренним радиусом R_1 и внешним радиусом R_2 . В противоположных точках внешнего контура приложены две направленные навстречу друг другу сосредоточенные силы, каждая равна P . Расчетная схема представлена на рис. 2.1. В плоской постановке сосредоточенная сила P рассматривается как сила, отнесенная к толщине образца.

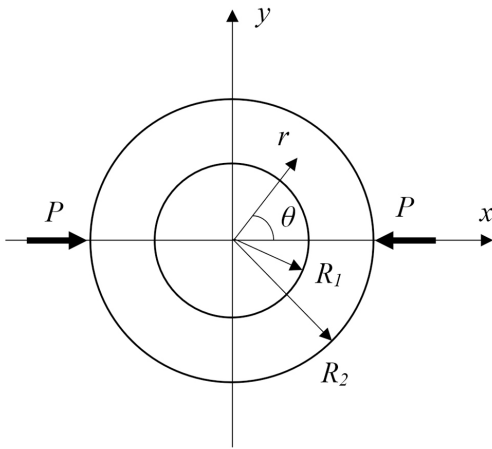


Рис. 2.1. Расчетная схема задачи о сжатии кольца сосредоточенными силами

Fig. 2.1. Computational scheme for the problem of ring compression by concentrated forces

Область решения задачи ограничена кольцом. Введем комплексную координату z :

$$z = x + iy = R_2 \zeta,$$

где $i = \sqrt{-1}$, $\zeta = \rho e^{i\theta}$. Установим ограничение кольцевой области:

$$z = R_2 \rho e^{i\theta}, \quad t \leq \rho \leq 1, \quad t = R_1/R_2.$$

Воспользуемся классическим представлением компонент тензора напряжений σ_r , σ_θ и $\sigma_{r\theta}$ в полярных координатах, записанным при помощи некоторых голоморфных функций комплексной переменной $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$, также известных как комплексные потенциалы Колосова–Мусхелишвили:

$$\sigma_r + \sigma_\theta = \frac{2}{R_2} \left(\varphi'(\zeta) + \overline{\varphi'(\zeta)} \right), \quad (2.1)$$

$$\sigma_\theta - \sigma_r + 2i\sigma_{r\theta} = \frac{2e^{2i\theta}}{R_2} \left(\bar{\zeta}\varphi''(\zeta) + \psi'(\zeta) \right). \quad (2.2)$$

Здесь $\varphi'(\zeta) = d(\varphi(\zeta))/d\zeta$ – производная комплексной функции, $\overline{\varphi(\zeta)} = \varphi(\bar{\zeta})$ – комплексно-сопряженная функция. Выражения (2.1)–(2.2) широко известны, а подробный их вывод для области решения задачи ограниченной круговой областью в полярных координатах представлен Н.И. Мусхелишвили в работе [19, с. 132]. Фактически, это означает, что для решения задачи необходимо найти в явном виде функции $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$. Помимо записи выражений для компонент напряжений, комплексные потенциалы позволяют также записать общий вид решения задачи в перемещениях:

$$\frac{E}{1+\nu} (u_r + iu_\theta) = e^{-i\theta} \left[\kappa\varphi(\zeta) - \zeta\overline{\varphi'(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)} \right], \quad (2.3)$$

где u_r – радиальные перемещения, u_θ – окружные перемещения, E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона, $\kappa = 3 - 4\nu$ для плоского деформированного состояния и $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ для плоского напряженного состояния. Хотя далее основное внимание будет уделено решению задачи в напряжениях, с помощью комплексных потенциалов $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ всегда можно записать решение задачи в перемещениях при помощи (2.3).

Граничные условия задачи в общем виде можно записать через функции $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$:

$$\varphi(s) + \overline{s\varphi'(s)} + \overline{\psi(s)} = \begin{cases} f_1(s), & s = te^{i\theta}, \\ f_2(s), & s = e^{i\theta}, \end{cases} \quad (2.4)$$

где $f_1(s)$ – функция напряжений на внутреннем контуре кольцевой области, $f_2(s)$ – функция напряжений на внешнем контуре кольцевой области. Общий вывод граничных условий (2.4) также описан в [19, с. 180].

Поскольку задача сформулирована в условиях линейной теории упругости, воспользуемся методом суперпозиции. Разложим начальную задачу о сжатии кольца двумя сосредоточенными силами (рис. 2.2а) на сумму решений задач о сжатии сплошного цилиндра сосредоточенными силами (рис. 2.2б) и свободного кольца (рис. 2.2с).

Согласно методу суперпозиции, комплексные функции решения раскладываются на сумму двух в соответствии с расчетной схемой:

$$\begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \varphi_1(\zeta) + \varphi_2(\zeta), \\ \psi(\zeta) &= \psi_1(\zeta) + \psi_2(\zeta). \end{aligned}$$

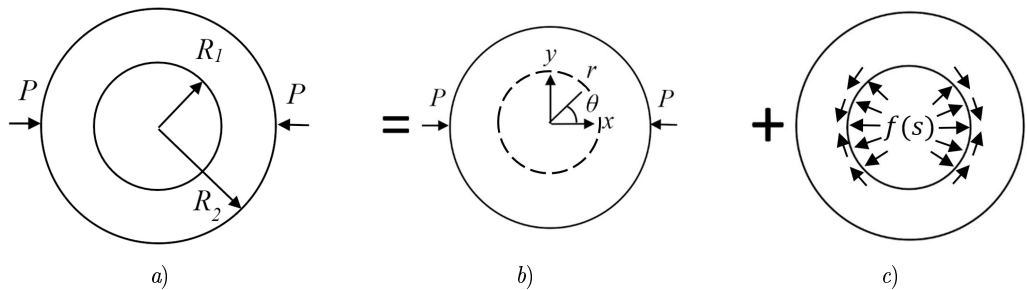


Рис. 2.2. Метод суперпозиции: а) исходная задача о сжатии кольца сосредоточенными силами; б) сжатие сплошного цилиндра сосредоточенными силами; в) свободное кольцо

Fig. 2.2. Superposition method: а) the original problem of ring compression by concentrated forces; б) compression of a solid cylinder by concentrated forces; в) a free ring

Здесь $\varphi_1(\zeta)$ и $\psi_1(\zeta)$ – функции для задачи сплошного диска (рис. 2.2б), а $\varphi_2(\zeta)$ и $\psi_2(\zeta)$ – функции для задачи кольцевой области (рис. 2.2в). Запишем граничные условия непосредственно для каждой схемы. Для сплошного диска мы имеем граничное условие на внешнем контуре:

$$\varphi_1(s) + s\overline{\varphi_1'(s)} + \overline{\psi_1(s)} = f_p(s), \quad s = e^{i\theta}, \quad (2.5)$$

где $f_p = 0$ при $\theta \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$, $f_p = i(P_0)$ при переходе через точку $\theta = 0$, $f_p = i(P_0) + i(P_1)$ при переходе через точку $\theta = \pi$. Силы P_0 и P_1 для подстановки в (2.5) запишем в комплексном виде:

$$P_0 = X_0 + iY_0 = -P, \quad P_1 = X_1 + iY_1 = P.$$

Для кольцевой области, свободной от нагрузки на внешнем контуре, имеем:

$$\varphi_2(s) + s\overline{\varphi_2'(s)} + \overline{\psi_2(s)} = \begin{cases} 0, & s = e^{i\theta}, \\ -f(s) + C, & s = te^{i\theta}, \end{cases} \quad (2.6)$$

где $-f(s) + C$ – напряжения, приложенные ко внутреннему контуру кольца. Данная функция специально подбирается таким образом, чтобы полностью компенсировать напряжения, возникающие в задаче сплошного диска на мнимом контуре того же радиуса, что и радиус отверстия. При суперпозиции расчётных схем внешняя нагрузка на внутренний контур обнуляется, что соответствует исходной расчётной схеме.

Таким образом, общая задача (рис. 2.2а) будет решена, когда будут найдены функции $\varphi_1(\zeta)$, $\psi_1(\zeta)$, $\varphi_2(\zeta)$, $\psi_2(\zeta)$.

3. Решение задачи

Решение задачи для сплошного диска под действием сосредоточенных сил было получено Мусхелишвили [19, с. 296], поэтому приведем функции $\varphi_1(\zeta)$, $\psi_1(\zeta)$ в готовом виде:

$$\varphi_1(\zeta) = \frac{P}{2\pi} \left[\zeta + \ln \left(\frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} \right) \right],$$

$$\psi_1(\zeta) = \frac{P}{2\pi} \left[\frac{2\zeta}{1-\zeta^2} + \ln \left(\frac{\zeta+1}{\zeta-1} \right) \right].$$

Используя функции $\varphi_1(\zeta)$ и $\psi_1(\zeta)$, можем записать компоненты тензора напряжений, соответствующие решению задачи (рис. 2.2b):

$$\begin{aligned} \sigma_{r1} + \sigma_{\theta 1} &= \frac{P}{\pi R_2} \left[\frac{-2(1-\rho^4)}{(\rho^2 e^{2i\theta} - 1)(\rho^2 e^{-2i\theta} - 1)} \right], \\ \sigma_{\theta} - \sigma_r + 2i\sigma_{r\theta} &= \frac{P}{\pi R_2} \left[\frac{4e^{2i\theta}(1-\rho^2)}{(\rho^2 e^{2i\theta} - 1)^2} \right]. \end{aligned}$$

Разделим компоненты:

$$\sigma_{r1} = -\frac{P}{\pi R_2} \left\{ \frac{1-\rho^4}{1-2\rho^2 \cos(2\theta) + \rho^4} - \frac{2(1-\rho^2)(2\rho^2 - (1+\rho^4)\cos(2\theta))}{(1-2\rho^2 \cos(2\theta) + \rho^4)^2} \right\}, \quad (3.1)$$

$$\sigma_{\theta 1} = -\frac{P}{\pi R_2} \left\{ \frac{1-\rho^4}{1-2\rho^2 \cos(2\theta) + \rho^4} + \frac{2(1-\rho^2)(2\rho^2 - (1+\rho^4)\cos(2\theta))}{(1-2\rho^2 \cos(2\theta) + \rho^4)^2} \right\}, \quad (3.2)$$

$$\sigma_{r\theta 1} = \frac{P}{\pi R_2} \frac{2(1-\rho^2)(1-\rho^4)\sin(2\theta)}{(1-2\rho^2 \cos(2\theta) + \rho^4)^2}. \quad (3.3)$$

Таким образом, решение задачи (рис. 2.2b) полностью определено.

Для решения задачи (рис. 2.2c) воспользуемся методом разложения в степенной ряд [20]. Запишем граничное условие на внутреннем краю:

$$\begin{aligned} f(s) = -f(te^{i\theta}) &= \frac{P}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n (te^{i\theta})^{2n+1}, \\ C &= -i\pi. \end{aligned}$$

Здесь коэффициенты разложения запишем как:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2t^{2n+1}}{2n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ A_{-n} &= -2t^{2n-1} \left(1 - t^2 + \frac{1}{2n-1} \right), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Такая форма разложения подразумевает, что функции $\varphi_2(\zeta)$, $\psi_2(\zeta)$ определяют поправочные компоненты напряжений для задачи с кольцевой областью (рис. 2.2c). Запишем их в виде:

$$\begin{aligned} \varphi_2(\zeta) &= \frac{P}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \zeta^{2n+1}, \\ \psi_2(\zeta) &= \frac{P}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \zeta^{2n-1}. \end{aligned}$$

При $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, a_n и b_n — действительные коэффициенты.

После подстановки в граничные условия задачи кольцевой области (2.6), группировки одинаковых гармоник и исключения b_n коэффициенты a_n и a_{-n} для каждого $n = 1, 2, \dots$ определяются системой:

$$\begin{cases} (t^{4n+2} - 1) a_n + (1 - 2n) (t^2 - 1) a_{-n} = t^{2n+1} A_n, \\ (2n + 1) (t^2 - 1) a_n + (t^{-4n+2} - 1) a_{-n} = t^{-2n+1} A_{-n}. \end{cases}$$

Из данной системы уравнений можно в явном виде выразить коэффициенты a_n , а при помощи них и b_n :

$$a_0 = \frac{-t}{2(1-t^2)} A_0,$$

$$a_n = \frac{A_n (t^{-2n+1} - t^{2n-1}) + A_{-n} t^{-2n} (2n-1)(t-t^{-1})}{(t^{2n+1} - t^{-2n-1})(t^{-2n+1} - t^{2n-1}) - (t-t^{-1})^2 (4n^2 - 1)},$$

при $n = \pm 1, \pm 2, \dots$,

$$b_n = -(a_{-n} + (2n+1)a_n),$$

при $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Таким образом, функции $\varphi_2(\zeta)$, $\psi_2(\zeta)$ полностью определены. Запишем компоненты тензора напряжений для задачи на рис. 2.2с:

$$\sigma_{r2} = \frac{P}{\pi R_2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{ [a_n \rho^2 (2-2n)(2n+1) - b_n (2n-1)] \rho^{2n-2} \cos(2n\theta) \}, \quad (3.4)$$

$$\sigma_{\theta 2} = \frac{P}{\pi R_2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{ [a_n \rho^2 (2+2n)(2n+1) + b_n (2n-1)] \rho^{2n-2} \cos(2n\theta) \}, \quad (3.5)$$

$$\sigma_{r\theta 2} = \frac{P}{\pi R_2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{ [a_n \rho^2 2n(2n+1) + b_n (2n-1)] \rho^{2n-2} \sin(2n\theta) \}. \quad (3.6)$$

Общее решение задачи в напряжениях можно получить, суммировав радиальные компоненты (3.1) и (3.4), окружные компоненты (3.2) и (3.5), а также касательные компоненты (3.3) и (3.6) тензора напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_{r1} + \sigma_{r2}, \\ \sigma_\theta &= \sigma_{\theta 1} + \sigma_{\theta 2}, \\ \sigma_{r\theta} &= \sigma_{r\theta 1} + \sigma_{r\theta 2}. \end{aligned}$$

4. Проверка предельных переходов

При $t \rightarrow 0$ внутренний контур вырождается, поэтому данный случай стоит рассматривать в предельном смысле. Запишем компоненты тензора напряжений с учётом предельного перехода к малому отверстию:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{P}{\pi R_2} \left\{ 1 - \frac{t^2}{\rho^2} + 2 \left(1 - 4 \frac{t^2}{\rho^2} + 3 \frac{t^4}{\rho^4} \right) \cos(2\theta) \right\}, \\ \sigma_\theta &= -\frac{P}{\pi R_2} \left\{ 1 + \frac{t^2}{\rho^2} - 2 \left(1 + 3 \frac{t^4}{\rho^4} \right) \cos(2\theta) \right\}, \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{2P}{\pi R_2} \left\{ 1 + 2 \frac{t^2}{\rho^2} - 3 \frac{t^4}{\rho^4} \right\} \sin(2\theta). \end{aligned}$$

Введем коэффициент концентрации окружных напряжений как:

$$K_f = \frac{\sigma_\theta}{P/(\pi R_2)}, \tag{4.1}$$

- при $\rho = t$ имеем $\sigma_r = 0$, $\sigma_\theta = -2\frac{P}{\pi R_2}(1 - 4\cos(2\theta))$, $\sigma_{r\theta} = 0$;
- при $\rho = t$, $\theta = 0$ имеем $K_f = 6$;
- при $\rho = t$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ имеем $K_f = -10$.

Данные значения коэффициентов концентрации напряжения соответствуют классическому решению задачи, полученному методом суперпозиции двух решений о растяжении и трёхкратном сжатии бесконечной плоскости с отверстием [8]. Его допустимо считать эквивалентным решению, полученному в настоящей работе при $R_1 \ll R_2$.

Оценим асимптотику тонкого кольца при $t \rightarrow 1$. Положим $h = R_2 - R_1$ и $R_m = (R_2 + R_1)/2$. При $h/R_m \ll 1$ кольцо можно рассматривать как тонкий криволинейный стержень. При диаметральной сжатии изгибающий момент в нагруженном сечении равен $M_0 = PR_m/\pi$ [8]. Для прямоугольного сечения единичной толщины имеем $I = h^3/12$, $c = h/2$. Следовательно, ведущую изгибающую составляющую максимального окружного напряжения определим выражением:

$$(\sigma_\theta)_{\max} = \frac{M_0 c}{I} + O\left(\frac{P}{h}\right) = \frac{6PR_m}{\pi h^2} + O\left(\frac{P}{h}\right).$$

Нормируем данное выражение относительно $P/\pi R_2$, и при стремлении t к единице получаем:

$$K_f = \frac{3(1+t)}{(1-t)^2} + O\left(\frac{1}{1-t}\right) \sim \frac{6}{(1-t)^2}.$$

Следовательно, K_f возрастает квадратично. Данное соотношение получено в рамках модели тонкого криволинейного стержня и не является результатом почленного предельного перехода в рядах. Его применимость проверена непосредственным вычислением рядового решения. Согласно данным, представленным в таблице 4.1, величина $K_f/(1-t)^2$ монотонно приближается к 6, а относительное отклонение убывает приблизительно пропорционально $(1-t)$.

Таблица 4.1. Численная проверка асимптотики тонкостенного кольца
Table 4.1. Numerical verification of the thin-walled ring asymptotics

t	K_f	$K_f(1-t)^2$	Отклонение от 6, %
0.90	581.590965	5.815910	3.068
0.95	2363.372192	5.908430	1.526
0.97	6605.754228	5.945179	0.914
0.98	14908.733730	5.963493	0.608
0.99	59817.674654	5.981767	0.304

5. Оценка сходимости

Параметр n при разложении функций σ_{r2} , $\sigma_{\theta2}$, $\sigma_{r\theta2}$ можно считать порядком усечения. В таком случае, общее число членов разложения ряда будет равно $2n + 1$. В

таблице 5.1 представлено минимальное число членов разложения ряда для достижения усечения коэффициента концентрации окружных напряжений K_f (4.1) в точке $\rho = t$, $\theta = 0$ до третьего знака после запятой.

Таблица 5.1. Минимальный порядок усечения
Table 5.1. Minimum truncation order

t	0,1	0,3	0,5	0,7	0,8	0,9	0,95
n	3	5	9	18	29	65	141
$2n + 1$	7	11	19	37	59	131	283

Формально сходимость ряда Фурье для функции комплексной переменной вида (3.4) была продемонстрирована Н. И. Мусхелишвили в [19] с использованием условия Дирихле.

6. Результаты и анализ

Для каждого t вычислялись максимальные нормированные невязки на внутреннем контуре:

$$\delta_r = \max_{\theta} \frac{|\sigma_r(t, \theta)|}{P/(\pi R_2)}, \quad \delta_{\tau} = \max_{\theta} \frac{|\sigma_{r\theta}(t, \theta)|}{P/(\pi R_2)}.$$

На внешнем контуре аналогичные величины определялись вне дуг $|\theta| < 0.05$ и $|\theta - \pi| < 0.05$, содержащих сингулярные точки приложения сил. Результаты, представленные в таблице 6.1, получены при минимальных значениях n , удовлетворяющих условию усечения:

$$|(K_f)_n - (K_f)_{ref}| < 5 \cdot 10^{-4},$$

где $(K_f)_{ref}$ – опорное значение коэффициента концентрации напряжений, вычисленное до достижения относительной точности в десятом знаке после запятой, $(K_f)_n$ – допустимое значение при минимальном n , необходимом для достижения условия усечения. Граничные условия на внешнем свободном контуре выполняются с точностью машинного округления, а максимальная невязка на внутреннем контуре не превышает $1.7 \cdot 10^{-4}$.

Таблица 6.1. Максимальные нормированные граничные невязки
Table 6.1. Maximum normalized boundary residuals

t	n	δ_r при $\rho = t$ δ_r at $\rho = t$	δ_{τ} при $\rho = t$ δ_{τ} at $\rho = t$	δ_r при $\rho = 1$ δ_r at $\rho = 1$	δ_{τ} при $\rho = t$ δ_{τ} at $\rho = t$
0.10	3	$8.0 \cdot 10^{-6}$	$8.0 \cdot 10^{-6}$	$4.6 \cdot 10^{-14}$	$5.9 \cdot 10^{-15}$
0.50	9	$8.1 \cdot 10^{-5}$	$7.8 \cdot 10^{-5}$	$4.0 \cdot 10^{-14}$	$8.3 \cdot 10^{-15}$
0.70	18	$1.1 \cdot 10^{-4}$	$1.1 \cdot 10^{-4}$	$3.8 \cdot 10^{-14}$	$1.9 \cdot 10^{-14}$
0.90	65	$1.7 \cdot 10^{-4}$	$1.6 \cdot 10^{-4}$	$1.1 \cdot 10^{-12}$	$6.1 \cdot 10^{-13}$
0.95	141	$1.7 \cdot 10^{-4}$	$1.6 \cdot 10^{-4}$	$1.0 \cdot 10^{-11}$	$4.9 \cdot 10^{-12}$

На рис. 6.1 представлены эпюры нормализованных окружных напряжений σ_θ при фиксированном значении радиальной координаты $\theta = 0$. Каждая линия соответствует определенному значению параметра t .

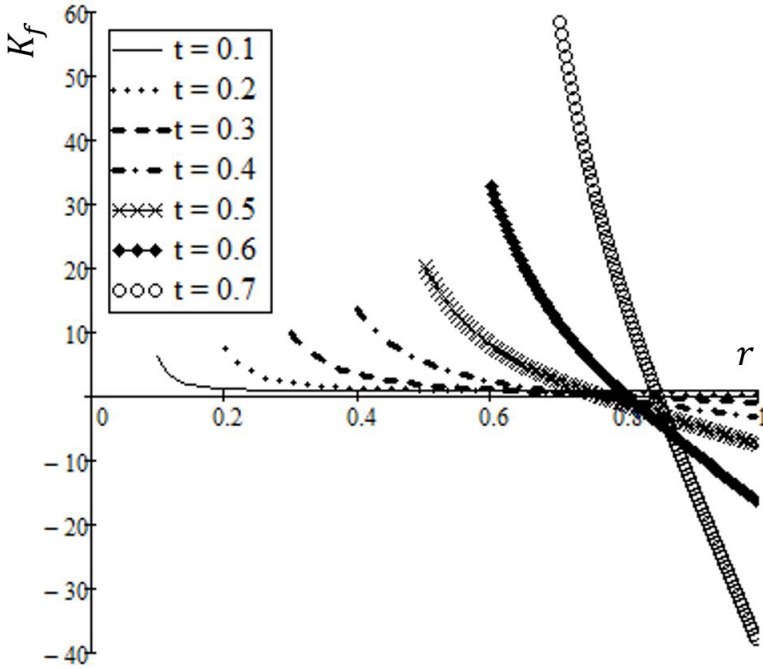


Рис. 6.1. Эпюры нормализованных окружных напряжений
Fig. 6.1. Diagrams of normalized circumferential stresses

Сравнение структуры полей напряжений между найденным решением задачи и результатами физических испытаний можно сделать, сопоставив данные, полученные при помощи метода фотоупругости. Представленные ниже сравнения служат лишь для качественной оценки. Количественное сопоставление интерференционных полос, получаемых при помощи методов фотоупругости требует идентичной геометрии, упругих свойств и способа приложения нагрузки и в настоящей работе не проводится. Отметим также, что из графического отображения аналитических результатов намеренно изымается малая область вблизи приложения сосредоточенной нагрузки, так как строгое математическое решение в данной точке имеет особенность в виде логарифма и, как следствие, приводит к бесконечному сгущению линий уровня.

На рис. 6.2 представлено сравнение картины изопахик (линии уровня суммы главных напряжений), полученных в результате аналитического решения задачи (рис. 6.2b) и экспериментов по сжатию кольца с использованием методов фотоупругости (рис. 6.2a) [14].

На рис. 6.3 представлено сравнение картины изохроматик (линии уровня разности главных напряжений), полученных в результате аналитического решения задачи (рис. 6.3b) и экспериментов по сжатию кольца с использованием методов фотоупругости (рис. 6.3a) [15].

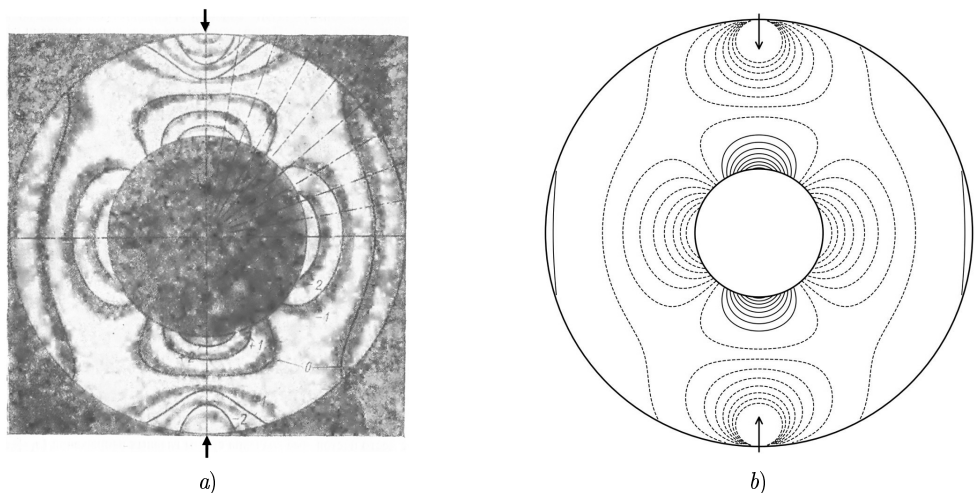


Рис. 6.2. Сравнение решения: а) изопохики, метод фотоупругости;
б) изопохики, аналитическое решение
Fig. 6.2. Comparison of the solutions; а) isopachics, photoelasticity method;
б) isopachics, analytical solution

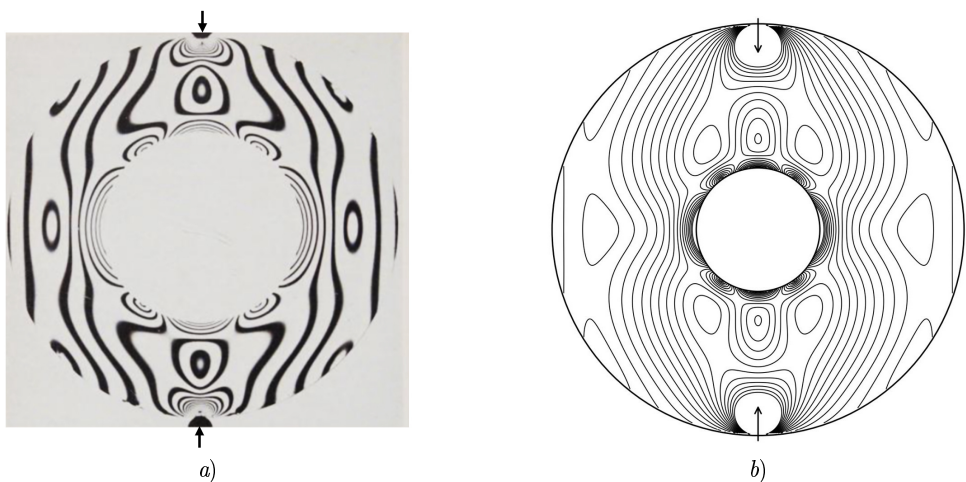


Рис. 6.3. Сравнение решения: а) изохроматики, метод фотоупругости;
б) изохроматики, аналитическое решение
Fig. 6.3. Comparison of the solutions; а) isochromatics, photoelasticity method;
б) isochromatics, analytical solution

7. Коэффициент концентрации напряжений

Во многих практических задачах важным параметром является значение коэффициента концентрации напряжений. При реализации расчетной схемы «модифицированный бразильский тест» наиболее опасной является точка, расположенная на внутреннем радиусе по линии диаметра, на котором расположена сжимающая нагрузка. В этой

точке образуется растягивающее напряжение с наибольшим значением коэффициента концентрации окружных напряжений K_f , описываемого формулой (4.1). Прочностные испытания хрупких материалов и горных пород это подтверждают. Из этого факта вытекает существенный недостаток классического решения [8]. Оно не учитывает, что коэффициент концентрации зависит от отношения внутреннего и внешнего радиусов кольца. Решение на основе метода последовательных приближений Шварца решает эту проблему, однако приводит к погрешностям вычисления. В таблице 7.1 представлено сравнение значений коэффициента концентрации напряжений, вычисленных при помощи решения данной статьи и данных из [10].

Таблица 7.1. Сравнение аналитического решения и решения по методу Шварца
Table 7.1. Comparison of the analytical solution and the Schwarz method solution

R_1/R_2	K_f , решение аналитическое K_f , analytical solution	K_f , решение по методу Шварца K_f , Schwarz method	δ , относительная разница, % δ , relative difference, %
0,5	20,311	19,52	3,895
0,6	32,838	33,16	0,971
0,7	60,446	62,54	3,348
0,8	140,716	148,1	4,986
0,9	581,59	562,7	3,357

На рис. 7.1 представлен график зависимости коэффициента концентрации напряжения от относительного радиуса центрального отверстия в точке на контуре внутреннего отверстия, находящейся на линии приложения нагрузки ($\rho = t$, $\theta = 0$).

В работе [13] приведены высокоточные табличные значения коэффициента K_0 (оригинальное обозначение) на внутреннем контуре. Поскольку в [13] использована нормировка $2P/(\pi R_2)$, для сопоставления выполнялось преобразование $K_f = 2K_0$. Проверка проведена по всем 19 опубликованным значениям при $0.05 \leq t \leq 0.95$. Максимальное расхождение не превышает 0.0015% и сопоставимо с погрешностью округления табличных данных. Полученное совпадение служит дополнительным подтверждением корректности коэффициентов рядового решения и принятой нормировки, но не заменяет непосредственного контроля граничных условий.

8. Метод конечных элементов

Для проверки проведем сравнения коэффициентов K_f , вычисленных при помощи аналитического решения, с решением, полученным при помощи метода конечных элементов (МКЭ). Используем программный комплекс Ansys 2020 R1.

Расчетная схема для решения задачи при помощи метода конечных элементов представлена на рис. 8.1. Диск смоделирован в предположении симметрии как четверть исходного объекта исследования. Задано условие плоского деформированного состояния. Чтобы избежать сингулярного концентратора напряжения от действия сосредоточенной силы расчетная схема изменена следующим образом. Добавлена нагружаемая плита (на два порядка более жесткая, чем материал кольца), к которой с одной стороны

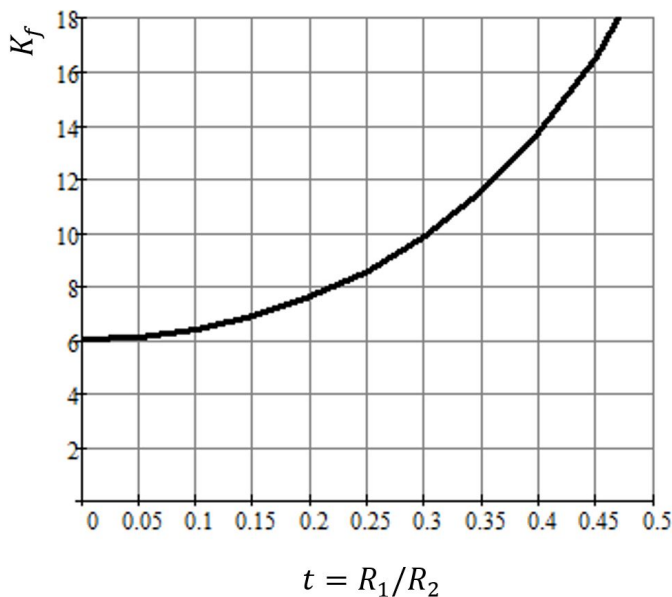


Рис. 7.1. Зависимость коэффициента концентрации напряжений от относительного радиуса центрального отверстия

Fig. 7.1. Dependence of the stress concentration factor on the relative radius of the central hole

приложена нагрузка, а другая сторона передает её посредством контактного взаимодействия с диском. Задано условие контакта без трения. При задании нагрузки в 100 Н ширина пятна контакта не превышала 3 характерных размеров элемента. Нагрузка задавалась достаточно малой, чтобы геометрическая нелинейность была пренебрежимо мала. Геометрические размеры плиты заданы на порядок больше характерных размеров диска.

Результат решения не зависит от материала, однако для получения напряженно-деформированного состояния был задан однородный изотропный материал диска – конструкционная сталь. Модель диска разбивалась на конечные элементы PLANE183 с контролем формирования восьми узлов (запрет вырождения в шести узловый элемент). Общее количество узлов зависело от параметра t . Минимальное количество элементов по толщине вдоль диаметра кольца (при $t = 0.95$) составило 20 штук. Максимальное количество элементов по толщине вдоль диаметра кольца (при $t = 0.05$) составило 240 штук. Количество элементов, распределённых вдоль дуг внешней и внутренней границы фиксировано и равняется 100 единицам. Таким образом, общее количество элементов находится в пределах от 2000 до 24000. Результат численного моделирования, а также сравнение с решением, полученным в настоящей статье, представлен в таблице 8.1. Напряжения экстраполировались из точки Гаусса в узел, для которого высчитывалось нормированное значение коэффициента концентрации напряжений.

Проверка на сходимость численного моделирования проводилась при помощи сгущения сетки. На рис. 8.2 представлен график, демонстрирующий сходимость значений коэффициента концентрации напряжений при увеличении числа элементов, на которые

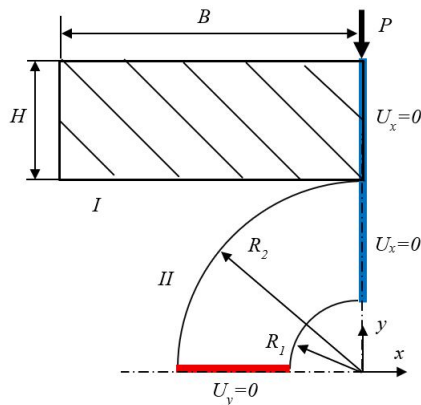


Рис. 8.1. Расчетная схема МКЭ
Fig. 8.1. FEM computational scheme

Таблица 8.1. Сравнение аналитического решения и МКЭ
Table 8.1. Comparison of the analytical solution and FEM

R_1/R_2	K_f , решение аналитическое K_f , analytical solution	K_f , решение МКЭ K_f , FEM solution	δ , относительная разница, % δ , relative difference, %
0	6	6	0
0.1	6.385	6.377	0.112
0.2	7.598	7.589	0.118
0.3	9.856	9.843	0.14
0.4	13.682	13.66	0.163
0.5	20.311	20.276	0.168
0.6	32.838	32.753	0.258
0.7	60.446	60.266	0.296
0.8	140.716	140.209	0.36
0.9	581.59	578.461	0.538
0.95	2363	2339	1.051

разбито кольцо для расчетной схемы при $t = 0.5$.
Расхождение с решением в рядах нельзя интерпретировать исключительно как дискретизационную погрешность: в рассмотренной модели действует сосредоточенная сила, тогда как в конечно-элементной модели давление распределено по контактной площадке конечной ширины. На результат также влияют экстраполяция напряжений, контактная жёсткость и разрешение сетки в перемычке. Экспериментально-расчётное исследование подтверждает необходимость разделять вычислительную погрешность и неопределённость идеализированной двумерной модели. Максимальное расхождение в исследованном диапазоне составляет 1.05%, а при $t \leq 0.18 - 0.5\%$. Поскольку абсолютные значения упругих характеристик и нагрузки влияют на ширину контактной зоны, конечно-элементный расчёт рассматривается как дополнительная, а не полностью эк-

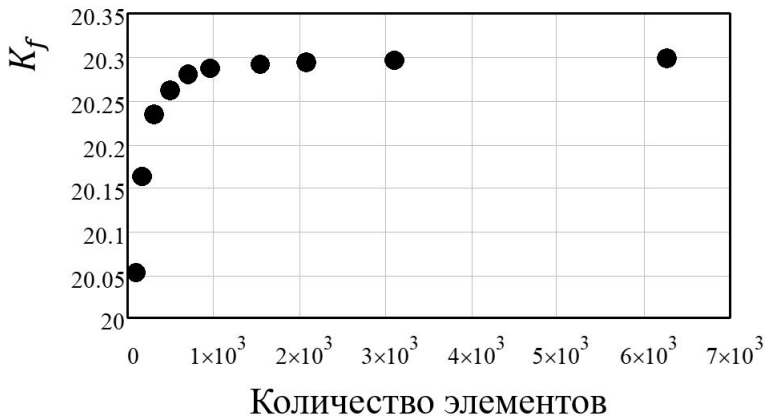


Рис. 8.2. График сходимости решения МКЭ

Fig. 8.2. FEM solution convergence graph

вивалентная проверка задачи с сосредоточенными силами.

Оценку влияния ширины контактной зоны можно провести при помощи моделирования расчетной схемы с заранее заданной дугой контактного взаимодействия. На рис. 8.3 представлена расчётная схема, в которой нагрузка передается через плиту, контактирующую с кольцом дугой конечного размера, полный угол которой равен 2α .

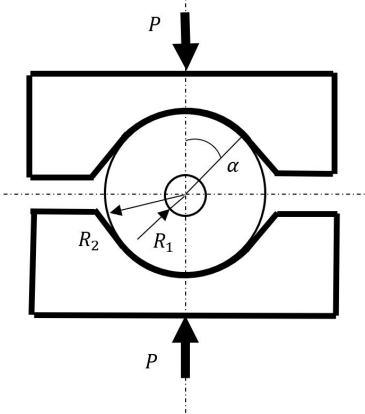


Рис. 8.3. Расчетная схема с контактом по дуге конечного размера

Fig. 8.3. Computational scheme with contact along an arc of finite size

Принципы моделирования расчетной схемы при помощи МКЭ полностью соответствуют описанным выше. Введем параметр γ как отношение коэффициента концентрации окружных напряжений (4.1), вычисленного при помощи метода конечных элементов с дугой контакта заданного размера $(K_f)_{FEM}|_{2\alpha=\omega}$, к коэффициенту концентрации окружных напряжений, вычисленного при помощи решения в рядах при действии сосредоточенной нагрузки $(K_f)_N|_{2\alpha=0}$:

$$\gamma = \frac{(K_f)_{FEM}|_{2\alpha=\omega}}{(K_f)_N|_{2\alpha=0}}.$$

График зависимости параметра γ от параметра t при различных значениях длины дуги контакта 2α представлен на рис. 8.4.

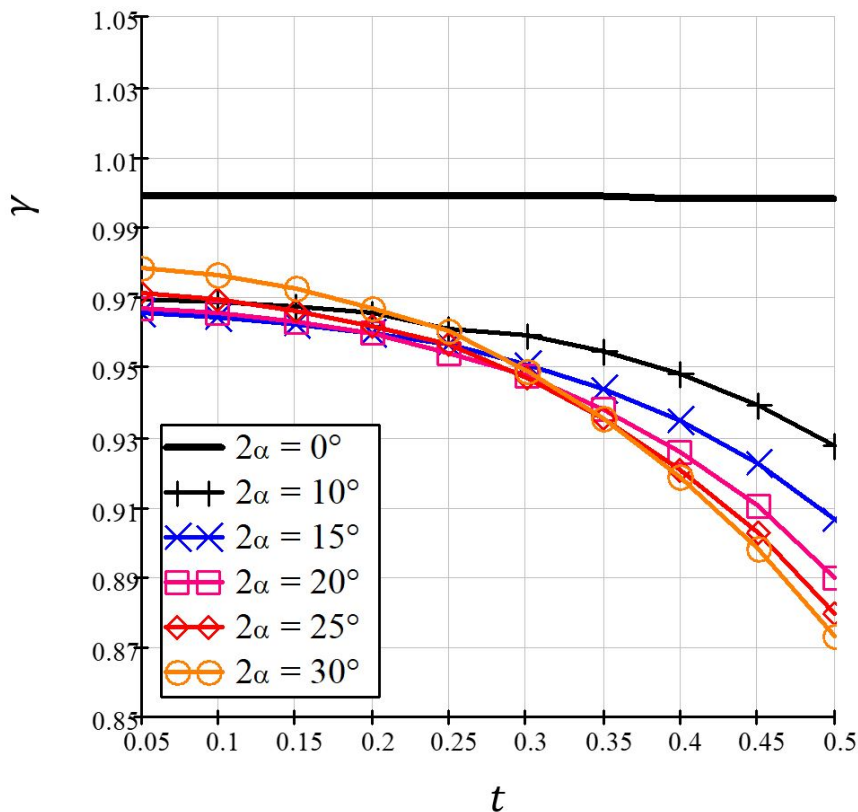


Рис. 8.4. Зависимость параметра γ от параметра t

Fig. 8.4. Dependence of parameter γ on parameter t

На основании представленных данных хорошо видно, что при малых размерах центрального отверстия распределение нагрузки по дуге оказывает слабое влияние на значение K_f в опасной точке. Однако с ростом значения параметра t мы видим снижение значения K_f относительно расчета при сосредоточенной нагрузке. Также стоит отметить, что изменение K_f нелинейно относительно изменения угла дуги контакта.

В соответствии с представленными данными можно сделать вывод, что смятие или иное распределение контактной нагрузки в ходе проведения реальных экспериментов по разрушению хрупких материалов оказывает малое влияние (не более 5%) на результат расчёта в случае, если параметр t находится в пределах от 0.05 до 0.25.

Тем не менее, представим список ограничений и рекомендаций по использованию решения в рядах для расчетов и анализа данных реальных испытаний.

1. Решение относится к однородному изотропному линейно-упругому материалу и двумерной постановке. Оно не описывает пластическое смятие, развитие трещины и изменение геометрии после начала разрушения.
2. Сосредоточенные силы создают сингулярности на внешнем контуре. Поле в непосредственной окрестности точек приложения сил не следует использовать для физической интерпретации.
3. При сопоставлении с экспериментом необходимо учитывать ширину и форму контактной зоны, трение, жёсткость плит, конечную толщину образца и возможную несоосность внутреннего и внешнего контуров. Особенно чувствительны к этим факторам тонкие кольца с $t > 0.9$.
4. Для производных высоких порядков или интегральных критериев разрушения требуется отдельный контроль сходимости соответствующего функционала по всей области интегрирования.
5. При $t \rightarrow 1$ одновременно возрастают K_f и требуемый порядок усечения. Вычисления целесообразно выполнять с повышенной точностью арифметики и обязательным контролем граничных невязок.

9. Заключение

Получено и верифицировано решение в рядах плоской задачи линейной упругости для кольца, сжатого двумя сосредоточенными силами. Решение представлено комплексными потенциалами с явно определяемыми коэффициентами. Решение в напряжениях справедливо для любой точки кольца за исключением малой области вблизи приложения сосредоточенной нагрузки, где имеет место математическая сингулярность.

Проведен анализ предельных переходов. В случае малых отверстий полученное решение совпадает с решением Тимошенко. В случае тонкостенного кольца асимптотика сходится с моделью криволинейного стержня.

Проведено сравнение результата с решением, полученным с использованием метода конечных элементов. Данные хорошо соотносятся с результатами моделирования МКЭ. Относительная разница не превышает 1.05% вплоть до отношения внутреннего и внешнего радиусов кольца равного 0.95, и 0.17% до отношения внутреннего и внешнего радиусов кольца равного 0.5. Проведена оценка влияния дуги распределения контактного взаимодействия на значение коэффициента концентрации напряжений в опасной точке. В соответствии с представленными данными можно сделать вывод, что смятие или иное распределение контактной нагрузки в ходе проведения реальных экспериментов по разрушению хрупких материалов оказывает малое влияние на результат расчёта в случае, если параметр t находится в пределах от 0.05 до 0.25.

Получена зависимость коэффициента концентрации напряжений от относительного радиуса центрального отверстия в точке на контуре внутреннего отверстия, находящейся на линии приложения нагрузки.

Расчётные изопахтики и изохроматики качественно согласуются с классическими фотоупругими картинками. Решение позволяет построить эпюры напряжений в области определения задачи.

Полученное решение рекомендуется к использованию при проведении прочностных испытаний по схеме модифицированный бразильский тест с целью повышения точности

определения условного предела прочности на растяжение для хрупких и квазихрупких материалов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Timoshenko S. On the distribution of stresses in a circular ring compressed by two forces acting along a diameter. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*. 1922. Vol. 44, no. 263. P. 1014–1019. DOI: 10.1080/14786441208562578
2. Mellor M., Hawkes I. Measurement of tensile strength by diametral compression of discs and annuli. *Engineering Geology*. 1971. Vol. 5, no. 3. P. 173–225. DOI: 10.1016/0013-7952(71)90001-9
3. Леган М. А., Блинов В. А. Расчет на прочность цилиндров с отверстием при совместном использовании метода граничных элементов и нелокальных критериев разрушения // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2017. Т. 10, № 3. С. 332–340. DOI: 10.7242/1999-6691/2017.10.3.26
4. Ефимов В. П. Испытания горных пород в неоднородных полях растягивающих напряжений // *ПМТФ*. 2013. Т. 54, № 5. С. 199–209.
5. Сукнев С. В. Разрушение квазихрупкого геоматериала с круговым отверстием при неравномерно распределенном сжатии // *ПМТФ*. 2019. Т. 60, № 6. С. 162–172.
6. Сукнев С. В. Применение методов теории критических расстояний для оценки разрушения квазихрупких материалов с вырезами // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 2023. № 1. С. 129–141. DOI: 10.31857/S0572329922100191
7. Kurguzov V., Kuznetsov D. Fracture analysis of Brazilian circular hole disk under mixed mode loading. *Engineering Fracture Mechanics*. 2024. Vol. 297. 109875. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2024.109875
8. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости: пер. с англ. / под ред. Г. С. Шапиро. 2-е изд. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. 560 с.
9. Hobbs D. W. The tensile strength of rocks. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. 1964. Vol. 1, no. 3. P. 385–388.
10. Народецкий М. З. Определение напряжений в круговом кольце под действием сосредоточенных сил // *Известия АН СССР. Отделение технических наук*. 1948. № 1. С. 7–18.
11. Chianese R. B., Erdlac R. J. The general solution to the distribution of stresses in a circular ring compressed by two forces acting along a diameter. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*. 1988. Vol. 41, no. 2. P. 239–247. DOI: 10.1093/qjmam/41.2.239

12. Ma D.-L. Elastic stress solution for a ring subjected to point-loaded compression. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. 1990. Vol. 42, no. 2. P. 185–191. DOI: 10.1016/0308-0161(90)90018-D
13. Batista M., Usenik J. Stresses in a circular ring under two forces acting along a diameter. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*. 1996. Vol. 31, no. 1. P. 75–78. DOI: 10.1243/03093247V311075
14. Фрохт М. М. Фотоупругость. Поляризационно-оптический метод исследования напряжений. Т. 2 / пер. с англ.; под ред. Н. И. Пригоровского. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 488 с.
15. Dally J. W., Riley W. F. Experimental Stress Analysis. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1991. xxii, 639 p.
16. Tokovyy Yu. V., Hung K.-M., Ma C.-C. Determination of stresses and displacements in a thin annular disk subjected to diametral compression. *Journal of Mathematical Sciences*. 2010. Vol. 165. P. 342–354. DOI: 10.1007/s10958-010-9803-6
17. Kourkoulis S. K., Markides Ch. F. Stresses and displacements in a circular ring under parabolic diametral compression. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. 2014. Vol. 71. P. 272–292. DOI: 10.1016/j.ijrmms.2014.07.009
18. Rübling A., Hölzel P., Pilder A., Hönisch L., Schrodberger M., Kleyla M., Bartecki M., Süchting-Rose K., Kühl H. The brittle ring test: a simple and reliable method for evaluating the fracture strength of technical ceramics – theoretical and experimental investigations. *International Journal of Ceramic Engineering & Science*. 2026. Vol. 8, no. 2. Article e70047. DOI: 10.1002/ces2.70047
19. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.
20. England A. H. Complex Variable Methods in Elasticity. London: Wiley-Interscience, 1971. 181 p.

*Поступила 27.05.2026; доработана после рецензирования 10.08.2026;
принята к публикации 25.08.2026*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. S. Timoshenko, “On the distribution of stresses in a circular ring compressed by two forces acting along a diameter”, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, **44**:263 (1922), 1014–1019. DOI: 10.1080/14786441208562578
2. M. Mellor, I. Hawkes, “Measurement of tensile strength by diametral compression of discs and annuli”, *Engineering Geology*, **5**:3 (1971), 173–225. DOI: 10.1016/0013-7952(71)90001-9

3. M. A. Legan, V. A. Blinov, “[Stress Analysis for Perforated Cylinders with Combined Use of the Boundary Element Method and Nonlocal Fracture Criteria]”, *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred [Computational Continuum Mechanics]*, **10**:3 (2017), 332–340 (In Russ.). DOI: 10.7242/1999-6691/2017.10.3.26
4. V. P. Efimov, “Rock tests in nonuniform fields of tensile stresses”, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, **54**:5 (2013), 857–865.
5. S. V. Suknev, “Fracture of a quasi-brittle geomaterial with a circular hole under non-uniform distributed compression”, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, **60**:6 (2019), 1115–1124.
6. S. V. Suknev, “Application of methods of the theory of critical distances to estimate the fracture of quasi-brittle materials with notches”, *Mechanics of Solids*, **58**:1 (2023), 108–118. DOI: 10.31857/S0572329922100191
7. V. Kurguzov, D. Kuznetsov, “Fracture analysis of Brazilian circular hole disk under mixed mode loading”, Article 109875, *Engineering Fracture Mechanics*, **297** (2024). DOI: 10.1016/j.engfracmech.2024.109875
8. S. P. Timoshenko, Dzh. Gud'yer, *Teoriya uprugosti [Theory of Elasticity]*, 2nd ed., transl. from English, ed. G. S. Shapiro, Nauka. Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury Publ., Moscow, 1979 (In Russ.), 560 p.
9. D. W. Hobbs, “The tensile strength of rocks”, *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, **1**:3 (1964), 385–388.
10. M. Z. Narodetskiy, “[Determination of stresses in a circular ring under the action of concentrated forces]”, *Izvestiya AN SSSR. Otdelenie tekhnicheskikh nauk*, 1948, no. 1, 7–18 (In Russ.).
11. R. B. Chianese, R. J. Erdlac, “The general solution to the distribution of stresses in a circular ring compressed by two forces acting along a diameter”, *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, **41**:2 (1988), 239–247. DOI: 10.1093/qj-mam/41.2.239
12. D.-L. Ma, “Elastic stress solution for a ring subjected to point-loaded compression”, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, **42**:2 (1990), 185–191. DOI: 10.1016/0308-0161(90)90018-D
13. M. Batista, J. Usenik, “Stresses in a circular ring under two forces acting along a diameter”, *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, **31**:1 (1996), 75–78. DOI: 10.1243/03093247V311075
14. M. M. Frokht, *Fotouprugost'. Polyarizatsionno-opticheskiy metod issledovaniya napryazheniy. T. 2 [Photoelasticity. Polarization-optical method for stress investigation. Vol. 2]*, transl. from English, ed. N. I. Prigorovskiy, Gostekhizdat Publ., Moscow; Leningrad, 1950 (In Russ.), 488 p.
15. J. W. Dally, W. F. Riley, *Experimental Stress Analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1991, ISBN: 978-0-07-015218-2, xxii, 639 p.

16. Yu. V. Tokovyy, K.-M. Hung, C.-C. Ma, “Determination of stresses and displacements in a thin annular disk subjected to diametral compression”, *Journal of Mathematical Sciences*, **165** (2010), 342–354. DOI: 10.1007/s10958-010-9803-6
17. S. K. Kourkoulis, Ch. F. Markides, “Stresses and displacements in a circular ring under parabolic diametral compression”, *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, **71** (2014), 272–292. DOI: 10.1016/j.ijrmms.2014.07.009
18. A. Rübling, P. Hölzel, A. Pilder, L. Hönisch, M. Schrodberger, M. Kleyla, M. Bartecki, K. Süchting-Rose, H. Kühl, “The brittle ring test: a simple and reliable method for evaluating the fracture strength of technical ceramics – theoretical and experimental investigations”, Article e70047, *International Journal of Ceramic Engineering & Science*, **8:2** (2026). DOI: 10.1002/ces2.70047
19. N. I. Muskhelishvili, *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti [Some basic problems of the mathematical theory of elasticity]*, Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 708 p.
20. A. H. England, *Complex Variable Methods in Elasticity*, Wiley-Interscience, London, 1971, 181 p.

Submitted 27.05.2026; Revised 10.08.2026; Accepted 25.08.2026

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.