

DOI 10.15507/2079-6900.28.202603.225-239

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.6

О порядке аппроксимации алгоритма символьной прогонки

Ю. А. Повещенко¹, И. Р. Янгляев^{2,3}, В. О. Подрыга¹, О. С. Язовцева^{2,3},
И. М. Губайдуллин^{2,4}

¹ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (г. Москва, Российская Федерация)

²Уфимский государственный нефтяной технический университет (г. Уфа, Российская Федерация)

³ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (г. Саранск, Российская Федерация)

⁴ИНК УФИЦ РАН (г. Уфа, Российская Федерация)

Аннотация. В статье приведено исследование порядка точности алгоритма символьной прогонки, предлагаемого для решения задач пьезопроводности в нефтесодержащих трещиновато-пористых пластах. Алгоритм символьной прогонки представляет собой модификацию алгоритма классической прогонки и заключается в нахождении значений искомой сеточной функции в полиномиальном виде. Это влечет также полиномиальное представление одного прогоночного коэффициента и невязки. Декомпозиция области организована следующим образом: на всем нефтяном пласте введена макросетка с большим пространственным шагом, в одной из ячеек которой построена микросетка с меньшим пространственным шагом. Алгоритм позволяет получить точное решение на микросетке с целью уточнения расчетов независимо от значений функции в макроузлах. Проведена верификация алгоритма на задачах с известным аналитическим решением, получен второй порядок точности алгоритма в постановке сгущающихся сеток, что отвечает точности заявленной разностной схемы. Алгоритм применен для исследования задачи пьезопроводности в трещиновато-пористом коллекторе, получены картины распределения давления в системе трещин.

Ключевые слова: математическое моделирование, алгоритм символьной прогонки, трещиновато-пористый коллектор, уравнение пьезопроводности

Для цитирования: Повещенко Ю. А., Янгляев И. Р., Подрыга В. О., Язовцева О. С., Губайдуллин И. М. О порядке аппроксимации алгоритма символьной прогонки // Журнал Средневолжского математического общества. 2026. Т. 28, № 3. С. 225–239. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202603.225-239

Об авторах:

Повещенко Юрий Андреевич, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (125047, Россия, г. Москва, Миусская пл., д. 4), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9211-9057>, hecon@mail.ru

Янгляев Ильнур Радикович, аналитик, Уфимский государственный нефтяной технический университет (450064, Россия, г. Уфа, ул. Космонавтов, д. 1), лаборант-исследователь, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-4659-965X>, ilnur.yanglyev@mail.ru



Подрыга Виктория Олеговна, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (125047, Россия, г. Москва, Миусская пл., д. 4), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7874-6978>, pvictoria@list.ru

Язовцева Ольга Сергеевна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Уфимский государственный нефтяной технический университет (450064, Россия, г. Уфа, ул. Космонавтов, д. 1), доцент, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8075-4491>, yazovtsevaos@yandex.ru

Губайдуллин Ирек Марсович, доктор физико-математических наук, профессор, Уфимский государственный нефтяной технический университет (450064, Россия, г. Уфа, ул. Космонавтов, д. 1), заведующий лабораторией математической химии, Институт нефтехимии и катализа – обособленное структурное подразделение Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук (450075, Россия, г. Уфа, проспект Октября 141), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9787-0325>, irekmars@mail.ru

Original article

MSC2020 65N06

On the Order of Approximation of the Symbolic Tridiagonal Matrix Algorithm

Yu. A. Poveshchenko¹, I. R. Yanglyayev^{2,3}, V. O. Podryga¹, O. S. Yazovtseva^{2,3}, I. M. Gubaydullin^{2,4}

¹*Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences (Moscow, Russian Federation)*

²*Ufa State Petroleum Technological University (Ufa, Russian Federation)*

³*National Research Mordovia State University (Saransk, Russian Federation)*

⁴*Institute of Petrochemistry and Catalysis – a separate structural subdivision of the Ufa Federal Research Centre of the Russian Academy of Sciences (Ufa, Russian Federation)*

Abstract. The work studies the order of approximation of the symbolic tridiagonal matrix algorithm proposed for solving piezoconductivity problems in oil-bearing fractured-porous formations. The symbolic tridiagonal matrix algorithm is a modification of the classical tridiagonal matrix algorithm and consists in finding the values of the sought grid function in a polynomial form. This also entails a polynomial representation of one tridiagonal matrix coefficient and of the residual. The domain decomposition is organized as follows: over the entire oil-bearing formation a macrogrid with a large spatial step is introduced, and in one of its cells a microgrid with a finer spatial step is constructed. The algorithm allows obtaining an exact solution on the microgrid to refine the calculations independently of the function values at the macronodes. The algorithm is verified on problems with a known analytical solution, and the second order of accuracy of the algorithm is obtained in the formulation with nested grids, which corresponds to the accuracy of the stated difference scheme. The algorithm is applied to study the piezoconductivity problem in a fractured-porous reservoir, and pressure distribution patterns in the fracture system are obtained.

Yu. A. Poveshchenko, I. R. Yanglyayev, V. O. Podryga, O. S. Yazovtseva, I. M. Gubaydullin. On the Order...

Keywords: mathematical modeling, symbolic tridiagonal matrix algorithm, fractured-porous reservoir, piezoconductivity equation

For citation: Yu. A. Poveshchenko, I. R. Yanglyayev, V. O. Podryga, O. S. Yazovtseva, I. M. Gubaydullin. On the Order of Approximation of the Symbolic Tridiagonal Matrix Algorithm. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 28:3(2026), 225–239. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202603.225-239

About the authors:

Yury A. Poveshchenko, D.Sc. (Phys. and Math.), Leading Researcher, Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences (4 Miusskaya Sq., Moscow 125047, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9211-9057>, hecon@mail.ru

Ilnur R. Yanglyayev, Analyst, Ufa State Petroleum Technological University (1 Kosmonavtov St., Ufa 450064, Russia), Laboratory Research Assistant, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevikskaya St., Saransk 430005, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-4659-965X>, ilnur.yanglyayev@mail.ru

Viktoriia O. Podryga, D.Sc. (Phys. and Math.), Leading Researcher, Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences (4 Miusskaya Sq., Moscow 125047, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7874-6978>, pvictoria@list.ru

Olga S. Yazovtseva, Ph.D. (Phys. and Math.), Senior Researcher, Ufa State Petroleum Technological University (1 Kosmonavtov St., Ufa 450064, Russia), Associate Professor, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevikskaya St., Saransk 430005, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8075-4491>, yazovtsevaos@yandex.ru

Irek M. Gubaydullin, D.Sc. (Phys. and Math.), Professor, Ufa State Petroleum Technological University (1 Kosmonavtov St., Ufa 450064, Russia), Head of the Laboratory of Mathematical Chemistry, Institute of Petrochemistry and Catalysis – a separate structural subdivision of the Ufa Federal Research Centre of the Russian Academy of Sciences (141 Oktyabrya Ave., Ufa 450075, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9787-0325>, irekmars@mail.ru

1. Введение

В настоящее время растут потребности разработки экономичных вычислительных алгоритмов для исследования практически значимых процессов. Важной характеристикой алгоритма является порядок сходимости или порядок точности. При этом вся область исследования может не требовать высокой точности исследования, а уточнение расчетов требуется только в выделенных областях. Такие задачи приобретают особую актуальность при исследовании процессов в неоднородных (гетерогенных) средах. Одним из примеров является исследование пьезопроводности в трещиновато-пористых породах, например, в нефтесодержащих пластах. При этом задача моделирования подобных процессов является актуальным вопросом на протяжении долгого времени. Исследователи отмечают необходимость учета многих факторов. Во-первых, это неоднородная структура пласта – в нем имеются трещины и матрицы пор. Описание движения флюида в них принципиально отличается – в трещинах работают законы фильтрации, например, Дарси [1]. В порах течение как таковое отсутствует, флюид распространяется за счет активного обмена с трещинами [2].

В задачах флюидодинамики в сложных средах также важен учет многофазности флюида. В работах [3] и [4] обсуждаются вопросы отдельного учета фаз флюида и необходимость расщепления всей модели на отдельный учет течения флюидов и процессы пьезопроводности. Аналогичный подход использован в настоящей работе.

Поскольку в нефтесодержащем пласте присутствуют нерегулярно расположенные скважины, существенно влияющие на динамику процессов, вблизи скважин необходимо достаточно точное исследование. При этом расчеты вдали от кустов скважин могут быть проведены со значительно меньшей точностью, например, с большим шагом интегрирования по пространству.

В работе [5] исследование скважины проводится отдельно от всего нефтесодержащего пласта с использованием цилиндрической геометрии. Эффективным средством повышения точности расчетов в выделенных областях являются иерархические сетки. В настоящей работе кустовое исследование прискважинных областей будет включено в общее исследование всего пласта.

Важным вопросом при моделировании процессов в гетерогенных средах является согласование решений на границе различных сеток внутри одной области. Работа [6] посвящена численному моделированию распространения сейсмических волн от очага землетрясения через геологический массив к наземным сооружениям (многоэтажным домам) с целью анализа возникающих разрушений в зависимости от параметров здания и глубины залегания источника волн. В работе, аналогично настоящей, применяется метод конечных разностей. Согласование решений на границе сеток достигается за счет линейной или билинейной интерполяций. Более мелкая сетка позволяет детально моделировать волны. При этом шаг интегрирования по времени выбран на основе самого мелкого пространственного разбиения. Применяемый в настоящей работе метод символьной прогонки позволяет избежать измельчения шага по времени при переходе к более мелкой пространственной сетке, поскольку в прискважинной области решается задача Дирихле.

Целью настоящей работы является исследование алгоритма символьной прогонки для разрешения задачи Дирихле в прискважинной области. Данный алгоритм представляет собой модификацию алгоритма классической прогонки и заключается в нахождении значений искомой сеточной функции в полиномиальном виде. С этой целью проведена декомпозиция всей области интегрирования, отвечающей нефтесодержащему пласту, с крупным пространственным шагом (макросетка с макроячейками). Внутри одной макроячейки, содержащей в себе кусты скважин, реализована микросетка – сетка с меньшим пространственным шагом. Это позволяет вести расчеты на более подробной пространственной сетке с целью их уточнения в прискважинной области. Вид полиномов определяется значениями сеточных функций в макроузлах, образующих макроячейку. Исследование метода символьной прогонки проведено на примере решения задачи Дирихле для одномерного и двумерного параболических уравнений. Для аппроксимации уравнений применен метод конечных разностей. Показано, что метод сохраняет второй порядок точности применяемой разностной схемы.

2. Математическая модель и расчетная сетка

Рассмотрим уравнения для описания динамики несмешивающегося двухфазного флюида в трещиновато-пористом коллекторе [7]:

$$\frac{\partial(\varphi^f \rho_w^f S_w^f)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_w^f \vec{U}_w^f) + q_w^f = 0, \quad \frac{\partial(\varphi^m \rho_w^m S_w^m)}{\partial t} + q_w^m = 0, \quad (2.1)$$

$$q_w^m = -q_w^f = -\rho_w^m \sigma \lambda_w^m (P^f - P^m), \quad \lambda_w^m = -\frac{k^m k_{rw}(S_w^m)}{\mu_w}, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial(\varphi^f \rho_o^f S_o^f)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_o^f \vec{U}_o^f) + q_o^f = 0, \quad \frac{\partial(\varphi^m \rho_o^m S_o^m)}{\partial t} + q_o^m = 0, \quad (2.3)$$

$$q_o^m = -q_o^f = -\rho_o^m \sigma \lambda_o^m (P^f - P^m), \quad \lambda_o^m = -\frac{k^m k_{ro}(S_o^m)}{\mu_o}, \quad (2.4)$$

$$\vec{U}_w^f = -\frac{k^f k_{rw}(S_w^f)}{\mu_w} \operatorname{grad} P^f, \quad \vec{U}_o^f = -\frac{k^f k_{ro}(S_o^f)}{\mu_o} \operatorname{grad} P^f. \quad (2.5)$$

Здесь нижние индексы w и o обозначают принадлежность характеристики воде и нефти, верхние индексы f и m обозначают принадлежность характеристики системе трещин и матрице; φ^f и φ^m – пористости в трещинах и в матрице соответственно; ρ^f и ρ^m – плотности жидкостей в системе трещин и в матрице (кг/м³); S^f и S^m – насыщенности в системе трещин и в матрице ($S_o^f + S_w^f = 1$, $S_o^m + S_w^m = 1$); t – время (с); $\vec{U}^f$ – скорость потока нефти и воды в системе трещин (м/с), определяемая из обобщенного закона Дарси [1]; q^f и q^m – источниковые члены, определяемые моделью Уоррена-Рута [1] (кг/(м³·с)), P^f и P^m – давление в системе трещин и в матрице (Па), k^f и k^m – абсолютные проницаемости системы трещин и матрицы (м²), $k_r(S^f)$ и $k_r(S^m)$ – относительные проницаемости жидкости, μ – вязкость нефти и воды (Па·с), σ – коэффициент трещиноватости породы (1/м²). Отметим, что в рассматриваемой модели Уоррена-Рута скорость течения флюида в матрице равна 0: $\vec{U}^m \equiv \vec{0}$ [1]. Область интегрирования двумерна, представляет собой квадрат $[0, l] \times [0, l]$.

Уравнение пьезопроводности в трещинах и матрице примет вид:

$$\frac{S_w^f}{\rho_w^f} \frac{\partial(\varphi^f \rho_w^f)}{\partial t} + \frac{S_o^f}{\rho_o^f} \frac{\partial(\varphi^f \rho_o^f)}{\partial t} + \operatorname{DIG}^f = 0, \quad (2.6)$$

$$\operatorname{DIG}^f = \frac{\operatorname{div}(\rho_w^f \vec{U}_w^f)}{\rho_w^f} + \frac{\operatorname{div}(\rho_o^f \vec{U}_o^f)}{\rho_o^f} + \sigma(P^f - P^m) \left(\frac{\rho_w^m}{\rho_w^f} \lambda_w^m + \frac{\rho_o^m}{\rho_o^f} \lambda_o^m \right), \quad (2.7)$$

$$\frac{S_w^m}{\rho_w^m} \frac{\partial(\varphi^m \rho_w^m)}{\partial t} + \frac{S_o^m}{\rho_o^m} \frac{\partial(\varphi^m \rho_o^m)}{\partial t} + \operatorname{DIG}^m = 0, \quad (2.8)$$

$$\operatorname{DIG}^m = -\sigma(P^f - P^m)(\lambda_w^m + \lambda_o^m). \quad (2.9)$$

Зафиксируем насыщенности без потери общности. Тогда уравнения (2.6)-(2.9) представимы в виде:

$$\frac{\partial P^f}{\partial t} - \kappa \operatorname{div} \operatorname{grad} P^f + \alpha^f (P^f - P^m) = 0, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial P^m}{\partial t} + \alpha^m (P^m - P^f) = 0, \quad (2.11)$$

где

$$\kappa = \frac{k^f}{\varphi^f} \left(\frac{k_{rw}(S_w^f)}{\mu_w} + \frac{k_{ro}(S_o^f)}{\mu_o} \right) \left(\frac{S_w^f \alpha_w}{\rho_w^{f(0)}} + \frac{S_o^f \alpha_o}{\rho_o^{f(0)}} \right)^{-1},$$

$$\alpha^f = \frac{\sigma}{\varphi^f} \left(\frac{\rho_w^m}{\rho_w^f} \lambda_w^m + \frac{\rho_o^m}{\rho_o^f} \lambda_o^m \right) \left(\frac{S_w^f \alpha_w}{\rho_w^{f(0)}} + \frac{S_o^f \alpha_o}{\rho_o^{f(0)}} \right)^{-1},$$

$$\alpha^m = \frac{\sigma(\lambda_w^m + \lambda_o^m)}{\varphi^m} \left(\frac{S_w^m \alpha_w}{\rho_w^{m(0)}} + \frac{S_o^m \alpha_o}{\rho_o^{m(0)}} \right)^{-1}.$$

Здесь α_o и α_w – коэффициенты сжимаемости нефти и воды, $c^2/\text{м}^2$, $\rho_o^{(0)}$ и $\rho_w^{(0)}$ – плотности нефти и воды в недеформированном состоянии, $\text{кг}/\text{м}^3$.

Будем решать задачу Дирихле для уравнения (2.10) с использованием декомпозиции области, представленной на рис. 2.1.

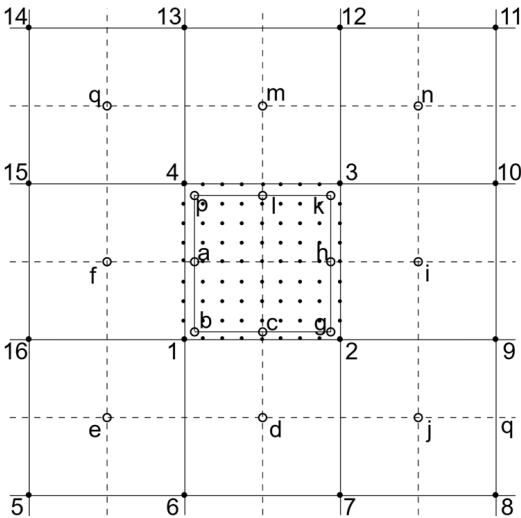


Рис. 2.1. Расчетная сетка задачи. 1 ÷ 16 и • – нумерация и обозначения узлов макросетки, 1 ÷ 4 и • – нумерация и обозначения узлов микросетки, о – обозначения пересечений потоковых линий. Для узла 1 потоковый контур обозначен abcdef, для 2 – cghijd, для 3 – ihklmn, для 4 – lpaqfm

Fig. 2.1. Computational grid of the problem. 1 ÷ 16 and • – numbering and designations of the macrogrid nodes, 1 ÷ 4 and • – numbering and designations of the microgrid nodes, о – designations of the intersections of the flow lines. For node 1, the flow contour is designated abcdef, for 2 – cghijd, for 3 – ihklmn, for 4 – lpaqfm

На рис. 2.1 макросетка с большим пространственным шагом отвечает всей области интегрирования. Внутри макроячейки с вершинами 1-4 реализована микросетка. Предполагается, что нам известны значения давления в вершинах макроячейки 1-4: $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ соответственно.

3. Вычислительный алгоритм

Приведем краткое описание метода символьной прогонки для одномерного случая. Рассмотрим сеточную функцию $\bar{u}_i, i = 0, \dots, N$ – номер узла сетки.

По аналогии с методом классической прогонки [8] запишем балансное соотношение на сетке $i = 0, \dots, N$:

$$A_i \bar{u}_{i-1} - C_i \bar{u}_i + B_i \bar{u}_{i+1} = -\bar{F}_i, \quad i = 1, \dots, N - 1. \tag{3.1}$$

Здесь A_i, B_i, C_i – числовые коэффициенты, $\bar{F}_i$ – сеточная функция.

Основное отличие метода символьной прогонки от классической заключается в полиномиальном представлении сеточной функции $\bar{u}_i$, невязки $\bar{F}_i$ и одного прогоночного коэффициента β_i . Полиномы зависят от значений давления π_1, π_2 на концах отрезка

интегрирования. Задача сводится к уточнению коэффициентов полиномов при π_1, π_2 итерационным методом. Далее по тексту полиномиальные величины будут обозначены чертой сверху.

Полиномиальное представление для величин имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\bar{u} &= c_0^u + c_1^u \pi_1 + c_2^u \pi_2, \\ \bar{\beta} &= c_0^\beta + c_1^\beta \pi_1 + c_2^\beta \pi_2, \\ \bar{F} &= c_0^F + c_1^F \pi_1 + c_2^F \pi_2.\end{aligned}$$

Здесь c_0, c_1, c_2 – коэффициенты полиномов, подлежащие уточнению с использованием итерационного процесса; верхние индексы означают величины, в полиномиальном представлении которых участвуют эти коэффициенты.

По аналогии с методом классической прогонки получаем выражение для нахождения прогоночных коэффициентов

$$(A_i \alpha_i \alpha_{i+1} - C_i \alpha_{i+1} + B_i) \bar{u}_{i+1} + (A_i \alpha_i \bar{\beta}_{i+1} + A_i \bar{\beta}_i - C_i \bar{\beta}_{i+1} + \bar{F}_i) = 0.$$

Нахождение скалярного коэффициента α и полиномиального коэффициента $\bar{\beta}$ осуществляется по формулам:

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad \bar{\beta}_{i+1} = \frac{A_i \bar{\beta}_i + \bar{F}_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad i = 1, \dots, N-1.$$

Для нахождения значений $\alpha_0, \bar{\beta}_0$ аналогично классической прогонке используются граничные условия задачи:

$$\bar{u}_0 = \alpha_1 \bar{u}_1 + \bar{\beta}_1 = \pi_1, \text{ т.е. } \alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = \pi_1 \quad (c_0^\beta = 0, \quad c_1^\beta = 1, \quad c_2^\beta = 0).$$

Обратное направление метода символьной прогонки реализуется с начальным значением $\bar{u}_N = \pi_2$.

Таким образом, задача восстановления значений сеточной функции сводится к уточнению значений коэффициентов полиномов c_0, c_1, c_2 с верхними индексами, соответствующими обозначениям искомым полиномов.

При переходе на двумерный случай полиномиальное представление сеточной функции, прогоночного коэффициента и невязки примет вид:

$$\begin{aligned}\bar{u} &= c_0^u + \sum_{n=1}^4 c_n^u \pi_n, \\ \bar{\beta} &= c_0^\beta + \sum_{n=1}^4 c_n^\beta \pi_n, \\ \bar{F} &= c_0^F + \sum_{n=1}^4 c_n^F \pi_n.\end{aligned}$$

Здесь $\pi_n, n = 1, 2, 3, 4$ – значения давления в узлах макроячейки 1-4 на рис. 2.1; $c_j, j = 0, \dots, 4$ с верхними индексами, соответствующими обозначениям искомым полиномов, – коэффициенты полиномов.

Нахождение коэффициентов при значениях давления проводится итерационным методом с предварительно заданной точностью. При решении двумерных задач используется метод переменных направлений для решения локально одномерных систем [9, 10], вычисляющих коэффициенты при неизвестных значениях сеточных функций в макроузлах.

4. Исследование порядка сходимости алгоритма

4.1. Одномерный случай

Для исследования порядка сходимости алгоритма для одномерного случая выбрана следующая задача, отвечающая виду (2.10):

$$\Delta u = -\sin x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\frac{\pi}{2}} = 1,$$

имеющая точное решение $u = \sin x$.

С использованием метода символьной прогонки, представленного в п. 3, получены результаты на последовательности сгущающихся сеток с числом пространственных узлов $N = 20, 40, 80, 160, 320$ и точное решение, представленные на рис. 2-3.

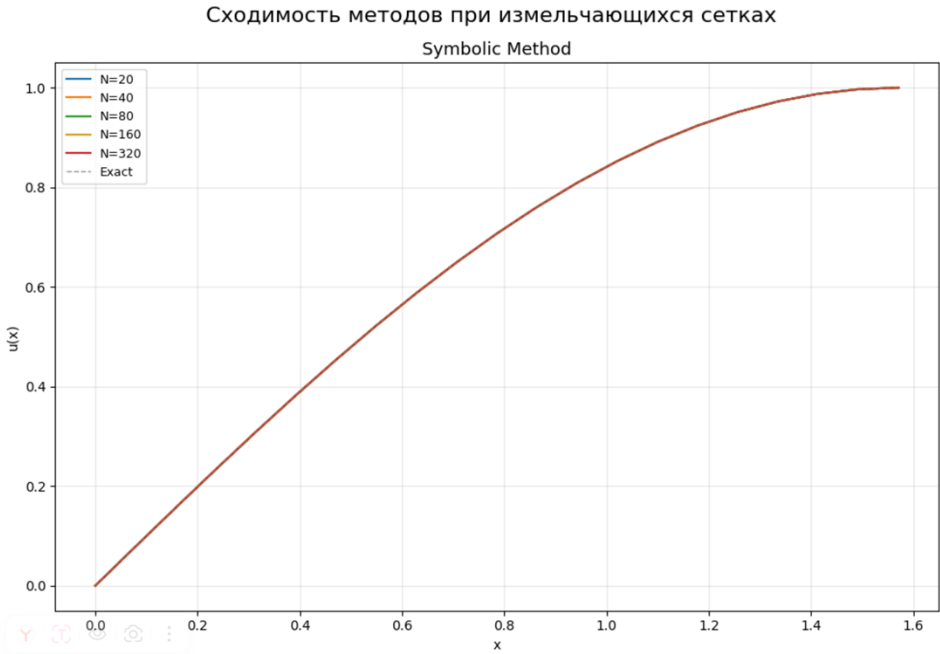


Рис. 4.1. Решения, полученные методом символьной прогонки на сгущающихся сетках

Fig. 4.1. Solutions obtained by the symbolic tridiagonal matrix algorithm on refined grids

На рис. 4.1 представлены графики решений при различном разбиении отрезка интегрирования. На рис. 4.2 представлена детализация рис. 4.1 в окрестности точки $x = \frac{\pi}{4}$. Из рис. 4.1-4.2 видно, что при измельчении расчетной сетки решения сходятся к точному.

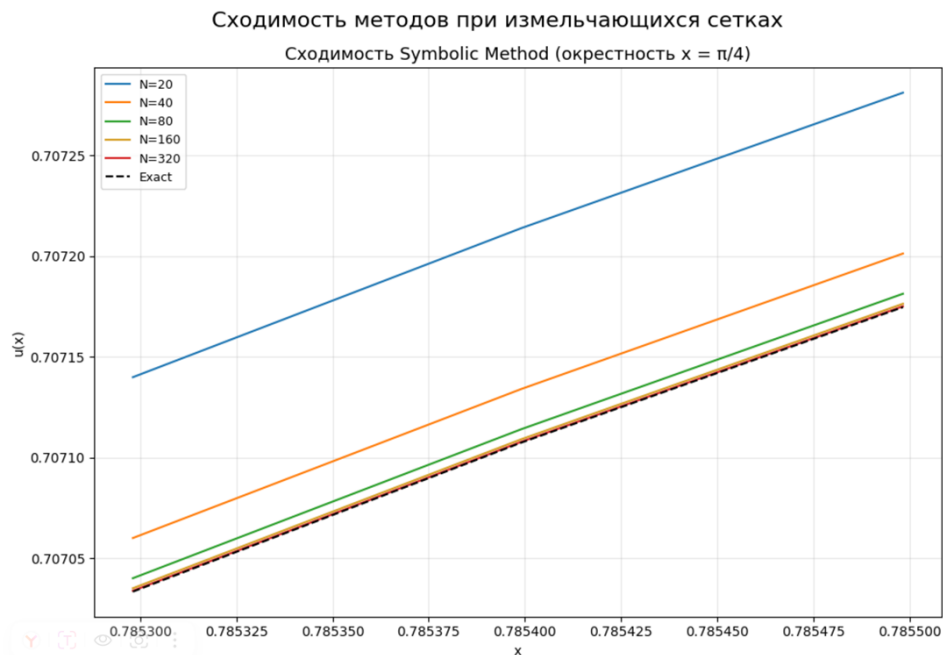


Рис. 4.2. Решения, полученные методом символьной прогонки на сгущающихся сетках в окрестности точки $x = \frac{\pi}{4}$

Fig. 4.2. Solutions obtained by the symbolic tridiagonal algorithm on refined grids in a neighborhood of the point $x = \frac{\pi}{4}$

Отклонения решений от точного приведены в таблице 4.1.

Таблица 4.1. Отклонения от точного решения для одномерной задачи
Table 4.1. Deviations from the exact solution for the one-dimensional problem

Число узлов сетки	Отклонение в начале отрезка интегрирования	Отклонение в середине отрезка интегрирования	Отклонение в конце отрезка интегрирования	Отклонение по максимальной норме
$N = 20$	$1.46 \cdot 10^{-5}$	$1.06 \cdot 10^{-4}$	$2.41 \cdot 10^{-5}$	$1.08 \cdot 10^{-4}$
$N = 40$	$3.66 \cdot 10^{-6}$	$2.66 \cdot 10^{-5}$	$6.03 \cdot 10^{-6}$	$2.70 \cdot 10^{-5}$
$N = 80$	$9.14 \cdot 10^{-7}$	$6.65 \cdot 10^{-6}$	$1.51 \cdot 10^{-6}$	$6.76 \cdot 10^{-6}$
$N = 160$	$2.28 \cdot 10^{-7}$	$1.66 \cdot 10^{-6}$	$3.77 \cdot 10^{-7}$	$1.69 \cdot 10^{-6}$
$N = 320$	$5.70 \cdot 10^{-8}$	$4.16 \cdot 10^{-7}$	$9.40 \cdot 10^{-8}$	$4.22 \cdot 10^{-7}$

Расчет порядка точности как максимальной нормы отклонений, равно как и в остальных точках отрезка показывает второй порядок точности алгоритма, что соответствует используемой разностной схеме.

4.2. Двумерный случай

Для исследования порядка сходимости алгоритма для двумерного случая выбрана следующая задача, отвечающая виду (2.10):

$$\Delta u = -8 \sin(2x) \sin(2y), \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$
$$u|_{x=0} = y, \quad u|_{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + y + \frac{\pi}{2}y, \quad u|_{y=0} = x, \quad u|_{y=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + x + \frac{\pi}{2}x,$$

имеющая точное решение $u = x + y + xy + \sin(2x) \sin(2y)$.

С использованием метода символьной прогонки, представленного в п. 3, получены результаты на последовательности сгущающихся сеток с числом пространственных узлов $N = 20, 40, 80, 160$ и точное решение, представленные на рис. 4.3-4.4.

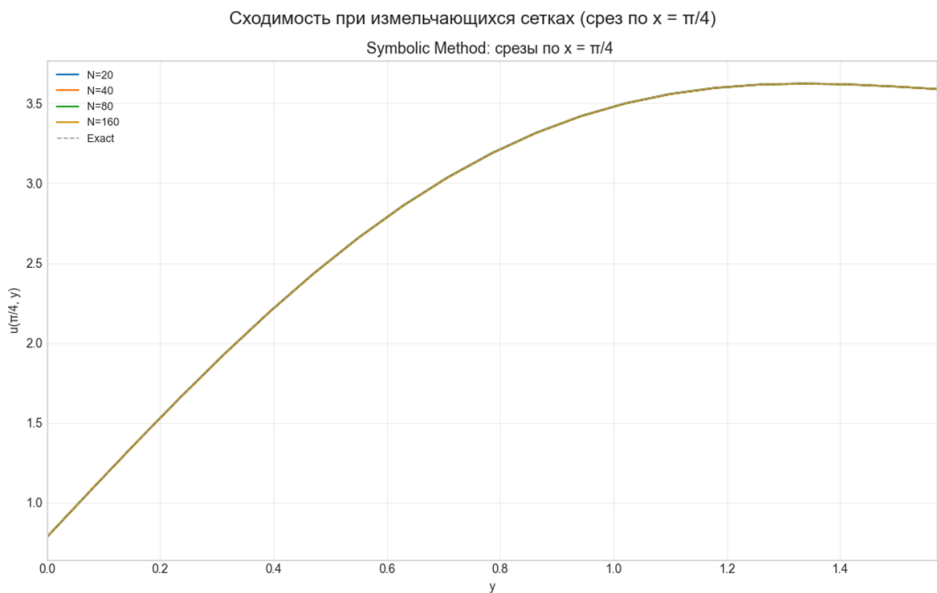


Рис. 4.3. Решения, полученные методом символьной прогонки на сгущающихся сетках при $x = \frac{\pi}{4}$

Fig. 4.3. Solutions obtained by the symbolic matrix tridiagonal algorithm on refined grids for $x = \frac{\pi}{4}$

Рис. 4.3-4.4 показывают, что при измельчении пространственных сеток решения, полученные с использованием метода символьной прогонки, сходятся к точному. Отклонения решений от точного приведены в таблице 4.2. Размер расчетной сетки – $N \times N$.

Из таблицы 4.2 следует, что метод символьной прогонки дает второй порядок точности для используемой разностной схемы для задачи с известным точным решением.

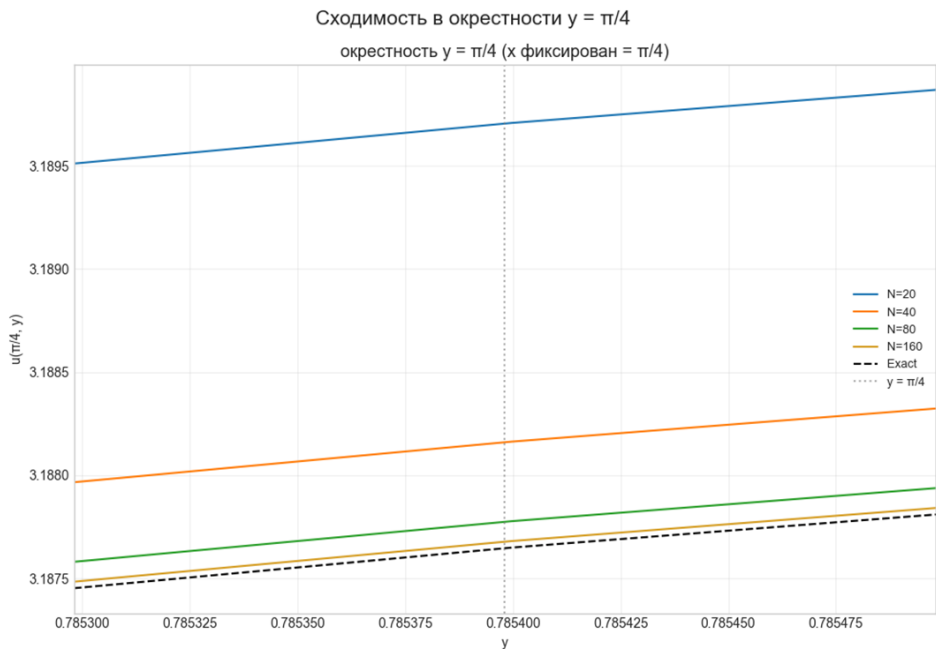


Рис. 4.4. Решения, полученные методом символьной прогонки на сгущающихся сетках при $x = \frac{\pi}{4}$ в окрестности точки $y = \frac{\pi}{4}$
Fig. 4.4. Solutions obtained by the symbolic tridiagonal matrix algorithm on refined grids for $x = \frac{\pi}{4}$ in a neighborhood of the point $y = \frac{\pi}{4}$

Таблица 4.2. Отклонения от точного решения для двумерной задачи
Table 4.2. Deviations from the exact solution for the two-dimensional problem

Число узлов сетки	Отклонение в начале отрезка интегрирования	Отклонение в середине отрезка интегрирования	Отклонение в конце отрезка интегрирования	Отклонение по максимальной норме
$N = 20$	$3.22 \cdot 10^{-4}$	$2.06 \cdot 10^{-3}$	$3.22 \cdot 10^{-4}$	$2.06 \cdot 10^{-3}$
$N = 40$	$8.03 \cdot 10^{-5}$	$5.14 \cdot 10^{-4}$	$8.03 \cdot 10^{-5}$	$5.14 \cdot 10^{-4}$
$N = 80$	$2.00 \cdot 10^{-5}$	$1.28 \cdot 10^{-4}$	$2.00 \cdot 10^{-5}$	$1.28 \cdot 10^{-4}$
$N = 160$	$4.93 \cdot 10^{-6}$	$3.15 \cdot 10^{-5}$	$4.93 \cdot 10^{-6}$	$3.15 \cdot 10^{-5}$

5. Вычислительный эксперимент

Для исследования распределения давления в трещиновато-пористой среде нефтесодержащего пласта было решено уравнение пьезопроводности (2.10) при фиксированных значениях насыщенностей. Начальное распределение давления отвечает билинейному закону распределения: $P(x, y) = (1 - x)(1 - y)\pi_1 + x(1 - y)\pi_2 + xy\pi_3 + (1 - x)y\pi_4$. Параметры процесса и их значения приведены ниже:

$$\phi^f = 0.01, \quad \rho_o^f = 780 \text{ кг/м}^3, \quad \rho_w^f = 1110 \text{ кг/м}^3, \quad S_w^f = 0.5, \quad k^f = 10^{-12} \text{ м}^2,$$

$$\begin{aligned} \sigma &= 0.6 \text{ л/м}^2, \quad \mu_o = 0.87 \cdot 10^{-3} \text{ Па}\cdot\text{с}, \quad \mu_w = 0.36 \cdot 10^{-3} \text{ Па}\cdot\text{с}, \\ k_{ro}(S_w^f) &= \left(\frac{0.63 - S_w^f}{0.63 - 0.25} \right)^{3.5}, \quad k_{rw}(S_w^f) = 0.295 \cdot \left(\frac{S_w^f - 0.25}{0.63 - 0.25} \right)^3, \quad \alpha^f = 0.04, \quad \tau = 1 \text{ с}, \\ h_x, h_y &= 0.01 \text{ м}, \quad \beta_w = 4.74 \cdot 10^{-6} \text{ с}^2/\text{м}^2, \quad \beta_o = 2.41 \cdot 10^{-6} \text{ с}^2/\text{м}^2. \end{aligned}$$

На рис. 5.1-5.2 приведены расчетные данные для уравнения пьезопроводности (2.10). В первой тестовой задаче взяты следующие значения давления в узлах макроячейки 1-4: $\pi_1 = 3 \cdot 10^7$ Па, $\pi_2 = 4 \cdot 10^7$ Па, $\pi_3 = 1.5 \cdot 10^7$ Па, $\pi_4 = 10^7$ Па.

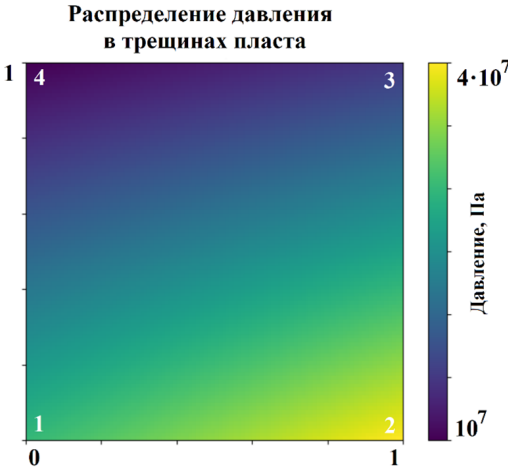


Рис. 5.1. Распределение давления в первом тестовом случае
Fig. 5.1. Pressure distribution in the first test case

Из рис. 5.1 хорошо прослеживается отток давления из узлов 1 и 2 с большими его значениями в сторону узлов 3 и 4 с меньшими значениями.

Во второй тестовой задаче взяты следующие значения давления в узлах макроячейки 1-4: $\pi_1 = 10^7$ Па, $\pi_2 = 10^7$ Па, $\pi_3 = 10^7$ Па, $\pi_4 = 4 \cdot 10^7$ Па.

На рис. 5.2 отражен перепад давления в случае превышения его значений в узле 4. Отток приводит к снижению значений в узле 4.

6. Заключение

В работе исследован алгоритм символьной прогонки с целью оценки его порядка точности в двумерном и одномерном случаях. Для применения алгоритма построена сетка с большим пространственным шагом (макросетка с макроячейками), внутри одной из ячеек которой реализована сетка с более мелким пространственным разбиением (микросетка с микроячейками). Алгоритм символьной прогонки является модификацией алгоритма классической прогонки. Его основное отличие заключается в полиномиальном представлении искомой сеточной функции, одного прогоночного коэффициента и невязки. Роль неизвестных в полиномах играют значения давления в узлах декомпозированной макроячейки, а коэффициенты подлежат уточнению итерационными методами.

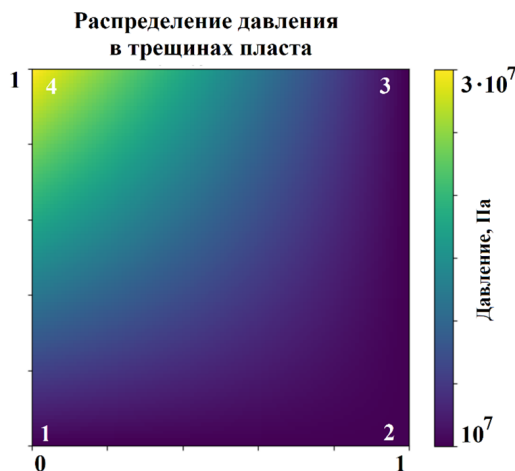


Рис. 5.2. Распределение давления во втором тестовом случае

Fig. 5.2. Pressure distribution in the second test case

Проведены вычислительные эксперименты на последовательности сгущающихся секток. Оценки отклонений расчетных данных от точного решения позволяют сделать вывод о втором порядке точности исследуемого алгоритма.

Алгоритм символьной прогонки применен к решению задачи пьезопроводности в трещиновато-пористом коллекторе нефтесодержащего пласта. Получены картины распределения давления в прискважинной области для различных начально-краевых условий задачи, корректно отражающие физику процессов.

Благодарности. Работа Ю.А. Повещенко (разработка и анализ методологии) и В.О. Подрыги (разработка и анализ модели) выполнена в рамках государственного задания ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. Работа И.Р. Янгляева (разработка и реализация алгоритмов, проведение расчетов), О.С. Язовцевой (анализ результатов, редактирование текста) и И.М. Губайдуллина (научная консультация, кураторство данных) поддержана Российским научным фондом (проект № 25-71-20005). Расчеты проведены с помощью суперкомпьютера K100, установленного в ЦКП ИПМ им. М.В. Келдыша РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Warren J. E., Root P. J. The Behavior of Naturally Fractured Reservoirs. *Soc. Pet. Eng. J.* 1963. Vol. 3. P. 245–255. DOI: 10.2118/426-PA
2. Owusu R., Sakyi A., Dontwi I. K., Amoako-Yirenkyi P. A New Macro-Scale Volume Averaged Transport Model for Diffusive Dominated Non-Darcian Flow Problem in Multi-Scaled Naturally Fractured Reservoirs. *J. Pet. Explor. Prod. Technol.* 2022. Vol. 12. P. 2511–2522. DOI: 10.1007/s13202-022-01498-x
3. Nayagum D., Schefer G., Mose R. Modelling Two-Phase Incompressible Flow in Porous Media Using Mixed Hybrid and Discontinuous Finite Elements. *Comput. Geosci.* 2004. Vol. 8. P. 49–73. DOI: 10.1023/B:COMG.0000024446.98662.36

4. Zhang Q., Yang Y., Wang D., Sun H., Zhong J., Yao J., Lisitsa V. Correlations of Residual Oil Distribution with Pore Structure During the Water Flooding Process in Sandstone Reservoirs. *Adv. Geo-Energy Res.* 2024. Vol. 12. P. 113–126. DOI: 10.46690/ager.2024.05.04
5. Liu Xt., Xuan Ll., Liu Q., Cai Hx., Luo Wj. Research on the Application of Sidetracking Technology to Recover Residual Oil from Old Wells in Shallow and High-Water-Cut Oil Reservoirs in Nanpu Onshore Oilfield. *Proceedings of the International Field Exploration and Development Conference 2023*. Singapore: Springer, 2024. P. 652–665. DOI: 10.1007/978-981-97-0475-0_56
6. Петров И. Б., Фаворская А. В., Хохлов Н. И. Сеточно-характеристический метод на системах вложенных иерархических сеток и его применение для исследования сейсмических волн // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2017. Т. 57, № 11. С. 1804–1811. DOI: 10.7868/S0044466917110126.EDN ZQZYGX.
7. Uzyanbaev R. M., Bobreneva Yu. O., Poveshchenko Yu. A., Podryga V. O., Polyakov S. V., Rahimly P. I., Gubaydullin I. M. Numerical Modeling of Two-Phase Fluid Filtration for Carbonate Reservoir in Two-Dimensional Formulation. *Mathematics*. 2024. Vol. 12, no. 21. 3412. DOI: 10.3390/math12213412
8. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971. 553 с.
9. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1967. 197 с.
10. Kudryashova T. A., Polyakov S. V. Parallel Algorithms for Solving Multidimensional Boundary Value Problems for Parabolic Equations. In: *Fundamental Physical and Mathematical Problems and Modeling of Technical and Technological Systems, Collection of Articles*. Vol. 6. Moscow: Janus-K Publishing House, 2003. P. 212–226.

*Поступила 30.05.2026; доработана после рецензирования 30.07.2026;
принята к публикации 25.08.2026*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. J. E. Warren, P. J. Root, “The Behavior of Naturally Fractured Reservoirs”, *Soc. Pet. Eng. J.*, **3** (1963), 245–255. DOI: 10.2118/426-PA
2. R. Owusu, A. Sakyi, I. K. Dontwi, P. Amoako-Yirenkyi, “A New Macro-Scale Volume Averaged Transport Model for Diffusive Dominated Non-Darcian Flow Problem in Multi-Scaled Naturally Fractured Reservoirs”, *J. Pet. Explor. Prod. Technol.*, **12** (2022), 2511–2522. DOI: 10.1007/s13202-022-01498-x
3. D. Nayagum, G. Schäfer, R. Mosé, “Modelling Two-Phase Incompressible Flow in Porous Media Using Mixed Hybrid and Discontinuous Finite Elements”, *Comput. Geosci.*, **8** (2004), 49–73. DOI: 10.1023/B:COMG.0000024446.98662.36

Yu. A. Poveshchenko, I. R. Yanglyayev, V. O. Podryga, O. S. Yazovtseva, I. M. Gubaydullin. On the Order...

4. Q. Zhang, Y. Yang, D. Wang, H. Sun, J. Zhong, J. Yao, V. Lisitsa, “Correlations of Residual Oil Distribution with Pore Structure During the Water Flooding Process in Sandstone Reservoirs”, *Adv. Geo-Energy Res.*, **12** (2024), 113–126. DOI: 10.46690/ager.2024.05.04
5. Xt. Liu, Ll. Xuan, Q. Liu, Hx. Cai, Wj. Luo, *Proceedings of the International Field Exploration and Development Conference 2023*, Springer, Singapore, 2024 DOI: 10.1007/978-981-97-0475-0_56.
6. I. B. Petrov, A. V. Favorskaya, N. I. Khokhlov, “Grid-characteristic method on systems of nested hierarchical grids and its application to the study of seismic waves”, *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **57**:11 (2017), 1804–1811. DOI: 10.7868/S0044466917110126
7. R. M. Uzyanbaev, Yu. O. Bobreneva, Yu. A. Poveshchenko, V. O. Podryga, S. V. Polyakov, P. I. Rahimly, I. M. Gubaydullin, “Numerical Modeling of Two-Phase Fluid Filtration for Carbonate Reservoir in Two-Dimensional Formulation”, *Mathematics*, **12**:21 (2024), 3412. DOI: 10.3390/math12213412
8. A. A. Samarskii, *Introduction to the Theory of Difference Schemes*, Nauka, Moscow, 1971, 553 p.
9. N. N. Yanenko, *The Method of Fractional Steps for Solving Multidimensional Problems of Mathematical Physics*, Nauka. Siberian Branch, Novosibirsk, 1967, 197 p.
10. T. A. Kudryashova, S. V. Polyakov, *Fundamental Physical and Mathematical Problems and Modeling of Technical and Technological Systems, Collection of Articles*, **6**, Janus-K Publishing House, Moscow, 2003.

Submitted 30.05.2026; Revised 30.07.2026; Accepted 25.08.2026

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.