

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

DOI 10.15507/2079-6900.28.202603.212-224

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 512.577, 519.68:007.5, 004.032.26

Порождающие множества аддитивного и мультипликативного группоидов обобщенных подсетей многослойной нейронной сети прямого распространения сигнала

А. В. Литаврин, Е. А. Потоловская

ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет» (г. Красноярск, Российская Федерация)

Аннотация. Аддитивные группоиды подсетей, мультипликативные группоиды подсетей и соответствующие группоиды обобщенных подсетей многослойной нейронной сети прямого распространения сигнала вводились ранее, чтобы изучать связи между алгебраическими свойствами данных группоидов и структурными свойствами многослойной нейронной сети прямого распространения сигнала, на базе которой строятся эти группоиды. В частности, было установлено, что свойство этих группоидов быть ассоциативными накладывает жесткое ограничение на структуру графа нейронной сети. В работе находятся порождающие множества аддитивного группоид подсетей, мультипликативного группоид подсетей и аддитивного группоид обобщенных подсетей. Для нейронных сетей, у которых каждый слой имеет строго более одного нейрона, находится порождающее множество мультипликативного группоид обобщенных подсетей. Порождающие множества данных группоидов предполагается использовать далее для решения проблемы о поэлементном описании моноида всех эндоморфизмов данных группоидов. Нахождение моноида всех эндоморфизмов некоторого группоид в общем случае является нетривиальной задачей и дает некоторые свойства этого группоид. Кроме того, порождающие множества данных группоидов можно использовать для изучения их алгебраических свойств. Нахождение порождающих множеств указанных группоидов происходит путем нахождения разложения для каждого элемента группоид через элементы специальных множеств. Данные порождающие множества строились по принципу добавления в них недостающих элементов и выбрасывания из них тех элементов, которые порождаются остальными. Результаты работы могут быть использованы для изучения свойств многослойных нейронных сетей прямого распространения сигнала, то есть имеют практическую значимость

Ключевые слова: группоид, порождающее множество группоид, аддитивный группоид подсетей, мультипликативный группоид подсетей, аддитивный группоид обобщенных подсетей, мультипликативный группоид обобщенных подсетей, многослойная нейронная сеть.

Для цитирования: Литаврин А. В., Потоловская Е. А. Порождающие множества аддитивного и мультипликативного группоидов обобщенных подсетей многослойной нейронной сети прямого распространения сигнала // *Журнал Средневожского математического общества*. 2026. Т. 28, № 3. С. 212–224. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202603.212-224

© А. В. Литаврин, Е. А. Потоловская



Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License.
This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Об авторах:

Литаврин Андрей Викторович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики № 2, ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет» (660041, Красноярский край, г. Красноярск, пр. Свободный, д. 79), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6285-0201>, anm11@rambler.ru

Потоловская Ева Александровна, студент института математики и фундаментальной информатики, ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет» (660041, Красноярский край, г. Красноярск, пр. Свободный, д. 79), ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-1990-5275>, eva.potolovskaya@gmail.com

Original article

MSC2020 08A62, 68T05

Generating sets for additive and multiplicative groupoids of generalized subnetworks of a multilayer feedforward neural network

A. V. Litavrin, E. A. Potolovskaya

Siberian Federal University (Krasnoyarsk, Russian Federation)

Abstract. Additive subnetwork groupoids, multiplicative subnetwork groupoids, and corresponding generalized subnetwork groupoids of a multilayer feedforward neural network were previously introduced to study the relationships between the algebraic properties of these groupoids and the structural properties of the multilayer feedforward neural network upon which these groupoids are constructed. In particular, it was established that the associative nature of these groupoids imposes a strict constraint on the structure of the neural network graph. In this paper, generating sets are found for the additive subnetwork groupoid, the multiplicative subnetwork groupoid, and the additive generalized subnetwork groupoid. For such neural networks that each their layer has strictly more than one neuron, a generating set is found for the multiplicative groupoid of generalized subnetworks. The generating sets for these groupoids are further proposed for use in elementwise description of the monoid of all endomorphisms for these groupoids. Finding the monoid of all endomorphisms for a groupoid is generally a nontrivial problem and yields some properties of this groupoid. Furthermore, the generating sets of these groupoids may be used to study their algebraic properties. Generating sets for these groupoids are obtained by finding a decomposition for each element of the groupoid in terms of elements of special sets. These generating sets were constructed by adding missing elements and removing the elements generated by the remaining ones. The results of this work may be used to study the properties of multilayer feedforward neural networks. Thus, they have practical significance.

Keywords: groupoid, generating set of groupoid, additive groupoid of subnets, multiplicative groupoid of subnets, additive groupoid of generalized subnets, multiplicative groupoid of generalized subnets, multilayer neural network

For citation: A. V. Litavrin, E. A. Potolovskaya. Generating sets for additive and multiplicative groupoids of generalized subnetworks of a multilayer feedforward neural network. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 28:3(2026), 212–224. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202603.212-224

About the authors:

Andrey V. Litavrin, Ph.D. (Phys. and Math.), Associate Professor of the Department of Higher Mathematics No. 2, Siberian Federal University (79 Svobodny Ave., Krasnoyarsk 660041, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6285-0201>, anm11@rambler.ru

Eva A. Potolovskaya, Student at the Institute of Mathematics and Computer Sciences, Siberian Federal University (79 Svobodny Ave., Krasnoyarsk 660041, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-1990-5275>, eva.potolovskaya@gmail.com

1. Введение

Информацию о многослойных нейронных сетях прямого распространения сигнала можно найти в работах [1–3]. С успехами в области обучения многослойных нейронных сетей можно ознакомиться в обзоре [4].

Для каждой многослойной нейронной сети $\mathcal{N}$ прямого распространения сигнала в работе [5] вводится аддитивный группоид подсетей $\text{AGS}(\mathcal{N})$, в работе [6] вводится мультипликативный группоид подсетей $\text{MGS}(\mathcal{N})$. Группоиды $\text{AGS}(\mathcal{N})$ и $\text{MGS}(\mathcal{N})$ вводились с целью исследования связи между алгебраическими свойствами этих группоидов и свойствами нейронной сети $\mathcal{N}$. Было установлено, что ассоциативность группоидов $\text{AGS}(\mathcal{N})$ и $\text{MGS}(\mathcal{N})$ накладывает жесткие ограничения на структуру графа нейронной сети $\mathcal{N}$ (см. утверждение 2 из [5] и утверждение 1 из [6]). Эндоморфизмы группоидов $\text{AGS}(\mathcal{N})$ изучались в работах [5] и [7]. В общем случае проблема поэлементного описания моноидов всех эндоморфизмов группоидов $\text{AGS}(\mathcal{N})$ и $\text{MGS}(\mathcal{N})$ остается открытой.

В работе [8] вводится понятие обобщенной подсети многослойной нейронной сети $\mathcal{N}$ (см. определение 2.1 из [8]). В связи с этим понятием возникают аддитивный группоид обобщенных подсетей $\widehat{\text{AGS}}(\mathcal{N})$ и мультипликативный группоид обобщенных подсетей $\widehat{\text{MGS}}(\mathcal{N})$ (см. определение 2.2 из [8]). В работе [8] меняется формальное определение многослойной нейронной сети прямого распространения сигнала: согласно определению 1.1 из [8] такие сети могут быть однослойными (в первоначальной работе [5] минимальное число слоев сети равнялось 2). Расширение понятия многослойной нейронной сети не приводит к изменению свойств группоидов $\text{AGS}(\mathcal{N})$ и $\text{MGS}(\mathcal{N})$, которые были получены в работах [5–7]. Необходимость данного расширения и актуальность понятия обобщенной подсети многослойной нейронной сети обсуждается во введении работы [8]. В работе [8] изучались элементарные алгебраические свойства группоидов $\widehat{\text{AGS}}(\mathcal{N})$ и $\widehat{\text{MGS}}(\mathcal{N})$ и было установлено, что каждая обобщенная подсеть $\mathcal{N}'$ сети $\mathcal{N}$ индуцирует подгруппоиды в группоидах $\widehat{\text{AGS}}(\mathcal{N})$ и $\widehat{\text{MGS}}(\mathcal{N})$, изоморфные группоидам $\widehat{\text{AGS}}(\mathcal{N}')$ и $\widehat{\text{MGS}}(\mathcal{N}')$.

В работе [8] обозначается проблема 4.5 о поэлементном описании моноида всех эндоморфизмов группоидов $\widehat{\text{AGS}}(\mathcal{N})$ и $\widehat{\text{MGS}}(\mathcal{N})$. Данная проблема в настоящий момент остается открытой. Естественным образом к данной проблеме можно применить метод, заключающийся в выяснении, как произвольный эндоморфизм данных группоидов действует на порождающих элементах данного группоида. Поэтому возникает интерес в нахождении порождающих множеств группоидов $\widehat{\text{AGS}}(\mathcal{N})$ и $\widehat{\text{MGS}}(\mathcal{N})$. Поскольку проблема поэлементного описания моноида всех эндоморфизмов не решена для группоидов $\text{AGS}(\mathcal{N})$ и $\text{MGS}(\mathcal{N})$, то актуальным является вопрос нахождения порождающих множеств и этих группоидов. Порождающие множества группоидов вызывают самостоятельный интерес и вне контекста описания моноида всех эндоморфизмов.

Основной результат настоящей работы выражен в виде теорем 3.1, 3.2, 4.1 и 4.2. Теорема 3.1 дает описание порождающего множества группоида $\text{AGS}(\mathcal{N})$. Порождающее множество из теоремы 3.1 приводилось еще в работе [5], но без доказательства. Теорема 3.2 дает описание порождающего множества группоидов $\widehat{\text{AGS}}(\mathcal{N})$. Теоремы 4.1 и 4.2 дают описание порождающих множеств группоидов $\text{MGS}(\mathcal{N})$ и $\widehat{\text{MGS}}(\mathcal{N})$ для нейронной сети $\mathcal{N}$, все слои которой содержат строго больше одного нейрона. С точки зрения приложений ограничения из теорем 4.1 и 4.2 несущественны, так как их можно обойти с помощью добавления формальных нейронов.

2. Основные определения и предварительные результаты

Пусть $G = (G, *)$ – это некоторый группоид. Будем говорить, что множество S – это порождающее множество элементов группоидов $G = (G, *)$, если пересечение всех подгруппоидов, содержащих S , совпадает со всем множеством G (стандартное определение порождающего множества некоторой алгебры). Из данного определения вытекает истинность следующего утверждения.

Утверждение 2.1. Пусть $G = (G, *)$ – это некоторый группоид и $S \subseteq G$. Множество S порождает группоид G тогда и только тогда, когда всякий элемент $g \in G$ является элементом из S или является некоторым произведением конечного числа элементов из S .

В данной работе будут исследоваться порождающие множества идемпотентных группоидов. Для таких группоидов условие, что всякий элемент $g \in G$ является элементом из S или является некоторым произведением конечного числа элементов из S , эквивалентно условию: всякий элемент $g \in G$ является некоторым произведением конечного числа элементов из S . Идемпотентность группоидов $\text{AGS}(\mathcal{N})$, $\text{MGS}(\mathcal{N})$, $\widehat{\text{AGS}}(\mathcal{N})$ и $\widehat{\text{MGS}}(\mathcal{N})$ тривиально вытекает из определения операций в этих группоидах, для удобства читателя эти определения будут приведены ниже (см. определение 2.3 и 2.4).

Нам потребуется формальное определение многослойной нейронной сети. Как обычно, $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел и $F(\mathbb{R}) := \text{Hom}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ – множество всех отображений из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$.

Определение 2.1. Пусть заданы следующие объекты:

- 1) кортеж $(M_1, \dots, M_n)$ длины $n \geq 1$ конечных непустых множеств, где при $i \neq j$ выполняется условие $M_i \cap M_j = \emptyset$;
- 2) множество $S := (M_1 \times M_2) \cup (M_2 \times M_3) \cup \dots \cup (M_{n-1} \times M_n)$;
- 3) отображение $f: S \rightarrow \mathbb{R}$;
- 4) множество $A := M_1 \cup \dots \cup M_n$;
- 5) отображение $g: A \rightarrow F(\mathbb{R})$;
- 6) отображение $l: A \rightarrow \mathbb{R}$.

Тогда кортеж $\mathcal{N} = (M_1, \dots, M_n, f, g, l)$ будем называть многослойной нейронной сетью прямого распространения сигнала.

Приведем стандартные обозначения, связанные с нейронными сетями и кортежами. С каждой нейронной сетью $\mathcal{N} = (M_1, \dots, M_n, f, g, l)$ будем связывать следующее обозначение:

$$\text{Syn}(\mathcal{N}) = \bigcup_{i=1}^{n-1} M_i \times M_{i+1}.$$

Таким образом, $Syn(\mathcal{N})$ – множество всех синаптических связей сети $\mathcal{N}$. Кортеж $(M_1, \dots, M_n)$ будем называть основным кортежем нейронов сети $\mathcal{N}$. Кортеж из пустых множеств будем обозначать символом $\bar{\emptyset} := (\emptyset, \dots, \emptyset)$ (длина такого кортежа всегда будет понятна из контекста). Пусть даны два кортежа $\bar{X} = (X_1, \dots, X_n)$ и $\bar{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ из конечных множеств. Будем использовать обозначения:

$$\bar{X} \cup \bar{Y} := (X_1 \cup Y_1, \dots, X_n \cup Y_n); \quad \bar{X} \cap \bar{Y} := (X_1 \cap Y_1, \dots, X_n \cap Y_n);$$

$$\bar{X} \subseteq \bar{Y} \Leftrightarrow (X_1 \subseteq Y_1) \wedge (X_2 \subseteq Y_2) \wedge \dots \wedge (X_n \subseteq Y_n).$$

Ниже приведем определения непрерывного кортежа и группоидов $AGS(\mathcal{N})$, $MGS(\mathcal{N})$, $\widehat{AGS}(\mathcal{N})$ и $\widehat{MGS}(\mathcal{N})$.

Определение 2.2. Пусть $(X_1, \dots, X_n)$ – некоторый кортеж, составленный из конечных множеств. Будем говорить, что кортеж непрерывный, если для любых различных $i, j \in \{1, \dots, n\}$ выполняется следующая импликация: если $X_i \neq \emptyset$ и $X_j \neq \emptyset$ и $i < j$, то для любого $s \in \{i, i+1, \dots, j-1, j\}$ выполняется неравенство $X_s \neq \emptyset$. Кортеж $\bar{\emptyset}$ считаем непрерывным по определению.

Понятие непрерывный кортеж возникает в работе [5].

Определение 2.3. Пусть определена нейросеть $\mathcal{N} = (M_1, \dots, M_n, f, g, l)$ с основным кортежем нейронов $\bar{M} = (M_1, \dots, M_n)$. Множество всевозможных непрерывных кортежей $\bar{X} \subseteq \bar{M}$ будем обозначать символом $AGS(\mathcal{N})$. Далее, пусть $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ – два произвольных элемента из $AGS(\mathcal{N})$. Определим бинарные алгебраические операции $(+)$ и $(*)$ на множестве $AGS(\mathcal{N})$:

$$\bar{X} + \bar{Y} := \begin{cases} \bar{X} \cup \bar{Y}, & \text{если } \bar{X} \cup \bar{Y} \in AGS(\mathcal{N}) \\ \bar{\emptyset}, & \text{если } \bar{X} \cup \bar{Y} \notin AGS(\mathcal{N}) \end{cases}, \quad \bar{X} * \bar{Y} := \begin{cases} \bar{X} \cap \bar{Y}, & \text{если } \bar{X} \cap \bar{Y} \in AGS(\mathcal{N}) \\ \bar{\emptyset}, & \text{если } \bar{X} \cap \bar{Y} \notin AGS(\mathcal{N}). \end{cases}$$

Тогда группоид $AGS(\mathcal{N}) := (AGS(\mathcal{N}), +)$ будем называть аддитивным группоидом подсетей нейронной сети $\mathcal{N}$. Группоид $MGS(\mathcal{N}) := (AGS(\mathcal{N}), *)$ будем называть мультипликативным группоидом подсетей нейронной сети $\mathcal{N}$.

Группоиды $AGS(\mathcal{N})$ и $MGS(\mathcal{N})$ возникают в работах [5] и [6]. Связь между этими группоидами и подсетями нейронной сети $\mathcal{N}$ приводится в работах [5, 6] и [8].

Множество всех подмножеств множества X будем обозначать через $B(X)$. Пусть $\mathcal{N} = (M_1, \dots, M_n, f, g, l)$. Тогда введем множество

$$\widehat{AGS}(\mathcal{N}) := AGS(\mathcal{N}) \times B(Syn(\mathcal{N})).$$

Элементы из $\widehat{AGS}(\mathcal{N})$ будем обозначать большими латинскими буквами с крышкой.

Определение 2.4. Полагаем, что определена нейросеть $\mathcal{N} = (M_1, \dots, M_n, f, g, l)$. Пусть $\hat{U}_1 = (\bar{X}_1, Q_1)$, $\hat{U}_2 = (\bar{X}_2, Q_2)$ – это два произвольных элемента из $\widehat{AGS}(\mathcal{N})$. Определим бинарные алгебраические операции $(+)$ и $(*)$ на множестве $\widehat{AGS}(\mathcal{N})$:

$$\hat{U}_1 + \hat{U}_2 := \begin{cases} (\bar{X}_1 \cup \bar{X}_2, Q_1 \cup Q_2), & \text{если } \bar{X}_1 \cup \bar{X}_2 \in AGS(\mathcal{N}) \\ (\bar{\emptyset}, \emptyset), & \text{если } \bar{X}_1 \cup \bar{X}_2 \notin AGS(\mathcal{N}); \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\widehat{U}_1 * \widehat{U}_2 := \begin{cases} (\overline{X}_1 \cap \overline{X}_2, Q_1 \cap Q_2), & \text{если } \overline{X}_1 \cap \overline{X}_2 \in \text{AGS}(\mathcal{N}) \\ (\overline{\emptyset}, \emptyset), & \text{если } \overline{X}_1 \cap \overline{X}_2 \notin \text{AGS}(\mathcal{N}). \end{cases} \quad (2.2)$$

Тогда группоид $\widehat{\text{AGS}}(\mathcal{N}) := (\widehat{\text{AGS}}(\mathcal{N}), +)$ будем называть аддитивным группоидом обобщенных подсетей нейронной сети $\mathcal{N}$ и группоид $\widehat{\text{MGS}}(\mathcal{N}) := (\widehat{\text{AGS}}(\mathcal{N}), *)$ будем называть мультипликативным группоидом обобщенных подсетей нейронной сети $\mathcal{N}$.

Группоиды $\widehat{\text{AGS}}(\mathcal{N})$ и $\widehat{\text{MGS}}(\mathcal{N})$ возникают в работе [8]. Связь между этими группоидами и обобщенными подсетями нейронной сети $\mathcal{N}$ приводится в работе [8].

3. Аддитивный группоид подсетей

В работе [5] для каждой нейронной сети $\mathcal{N} = (M_1, \dots, M_n, f, g, l)$, состоящей из n слов, и для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ вводилось множество $D_i(\mathcal{N})$, состоящее из всевозможных кортежей, у которых i -я компонента является одноэлементным подмножеством множества M_i , а все остальные компоненты равны пустому множеству. Таким образом,

$$D_i(\mathcal{N}) = \{(\underbrace{\emptyset, \dots, \emptyset}_{i-1}, \{a_i\}, \emptyset, \dots, \emptyset) \mid a_i \in M_i\}.$$

Также в работе [5] отмечалось (без доказательства), что множество

$$D(\mathcal{N}) := \{(\emptyset, \emptyset, \dots, \emptyset)\} \cup \bigcup_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} D_i(\mathcal{N})$$

является порождающим множеством группоида $\text{AGS}(\mathcal{N})$, а при $n > 2$ группоид $\text{AGS}(\mathcal{N})$ порождается множеством

$$\bigcup_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} D_i(\mathcal{N}).$$

Ниже докажем сформулированное утверждение.

Теорема 3.1. Пусть $\mathcal{N} = (M_1, \dots, M_n, f, g, l)$ – нейронная сеть. Тогда $D(\mathcal{N})$ порождает группоид $\text{AGS}(\mathcal{N})$.

Доказательство. Пусть $\overline{U} = (U_1, U_2, \dots, U_n)$ – это произвольный элемент группоида $\text{AGS}(\mathcal{N})$, отличный от кортежа $\overline{\emptyset}$. Тогда справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \overline{U} = (U_1, U_2, \dots, U_n) &= (U_1, \emptyset, \emptyset, \dots, \emptyset) \cup (\emptyset, U_2, \emptyset, \dots, \emptyset) \cup \dots \cup (U_1, \emptyset, \emptyset, \dots, \emptyset) = \\ &= (\dots((U_1, \emptyset, \emptyset, \dots, \emptyset) + (\emptyset, U_2, \emptyset, \dots, \emptyset)) + \dots + (\emptyset, \emptyset, \dots, U_{n-1}, \emptyset)) + (\emptyset, \emptyset, \emptyset, \dots, U_n). \end{aligned}$$

Таким образом, кортеж $\overline{U}$ представляется в виде суммы кортежей вида:

$$(\emptyset, \emptyset, \dots, U_s, \dots, \emptyset, \emptyset). \quad (3.1)$$

Поскольку U_s – это конечное множество и для всякого конечного множества X моноид $(B(X), \cup)$ порождается пустым множеством и всеми одноэлементными подмножествами множества X , то всякий кортеж вида (3.1) можно представить в виде суммы элементов из множества $D(\mathcal{N})$. Так как кортеж $\overline{\emptyset}$ принадлежит множеству $D(\mathcal{N})$, группоид $\text{AGS}(\mathcal{N})$ порождается множеством $D(\mathcal{N})$.

Доказательство завершено.

Для любого конечного множества X через $\text{Singl}(X)$ обозначим совокупность, состоящую из всех одноэлементных подмножеств множества X и пустого множества. Множество $\text{Singl}(X)$ является порождающим множеством для моноида $(B(X), \cup)$, когда X — это конечное множество.

Теорема 3.2. Пусть $\mathcal{N} = (M_1, \dots, M_n, f, g, l)$ — нейронная сеть. Тогда группоид $\widehat{\text{AGS}}(\mathcal{N})$ порождается множеством $D(\mathcal{N}) \times \text{Singl}(\text{Syn}(\mathcal{N}))$.

Доказательство. Пусть $\hat{U} = (\bar{U}, Q)$ — это произвольный элемент группоида $\widehat{\text{AGS}}(\mathcal{N})$. В силу теоремы 3.1 для кортежа $\bar{U}$ существует разложение

$$\bar{U} = (\dots((\bar{U}_1 + \bar{U}_2) + \bar{U}_3) + \dots) + \bar{U}_t, \quad (3.2)$$

где t — это подходящее натуральное число и кортежи $\bar{U}_s$ принадлежат множеству $D(\mathcal{N})$ для любого $s \in \{1, 2, \dots, t\}$. Так как множество $\text{Syn}(\mathcal{N})$ конечно, то для любого множества $Q \in B(\text{Syn}(\mathcal{N}))$ существует разложение

$$Q = \bigcup_{s \in \{1, 2, \dots, k\}} Q_s, \quad (3.3)$$

где k — это подходящее натуральное число и для любого $s \in \{1, 2, \dots, k\}$ множество Q_s принадлежит $\text{Singl}(\text{Syn}(\mathcal{N}))$. Используя соотношение (3.2) получаем равенство

$$\hat{U} = (\bar{U}, Q) = (\dots(((\bar{U}_1, Q) + (\bar{U}_2, Q)) + (\bar{U}_3, Q)) + \dots) + (\bar{U}_t, Q). \quad (3.4)$$

В силу соотношения (3.3) для каждого кортежа $(\bar{U}_u, Q)$ ($u \in \{1, 2, \dots, t\}$) из предыдущего равенства можно записать разложение

$$(\bar{U}_u, Q) = (\dots(((\bar{U}_u, Q_1) + (\bar{U}_u, Q_2)) + (\bar{U}_u, Q_3)) + \dots) + (\bar{U}_u, Q_k).$$

Подставив эти разложения в соотношения (3.4) получим разложение кортежа $\hat{U}$ через элементы множества $D(\mathcal{N}) \times \text{Singl}(\text{Syn}(\mathcal{N}))$. В силу произвольности $\hat{U}$ получаем, что группоид $\widehat{\text{AGS}}(\mathcal{N})$ порождается множеством $D(\mathcal{N}) \times \text{Singl}(\text{Syn}(\mathcal{N}))$.

Доказательство завершено.

4. Мультипликативный группоид подсетей

Для каждой сети $\mathcal{N} = (M_1, \dots, M_n, f, g, l)$ через $\text{GenMult}(\mathcal{N}) \subseteq \text{AGS}(\mathcal{N})$ обозначим множество, состоящее из кортежа $(M_1, M_2, \dots, M_n)$ (основной кортеж нейронов сети $\mathcal{N}$) и всех кортежей вида

$$(M_1, \dots, M_{i-1}, A_i, M_{i+1}, \dots, M_n),$$

где $i \in \{1, \dots, n\}$, A_i — это подмножество множества M_i и мощность множества A_i равна $|M_i| - 1$ или $|M_i| - 2$.

Далее, для каждого конечного множества X через $\text{GenCap}(X)$ будем обозначать множество, состоящее из множества X и всех подмножеств множества X мощности $|X| - 1$.

Утверждение 4.1. Пусть X — это конечное множество. Моноид $(B(X), \cap)$ порождается множеством $\text{GenCap}(X)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1) Пусть $|X| = 1$. Тогда для любого множества $A \in B(X)$ выполняется ровно одно из условий: $A = X$, $A = \emptyset$. В этом случае $A = X$ или $|A| = |X| - 1$, следовательно, утверждение выполняется.

2) Пусть $|X| = 2$. Тогда для любого $A \in B(X)$ выполняется ровно одна импликация:

$$A = X \Rightarrow |A| = |X| = 2;$$

$$A = \emptyset \Rightarrow A = \{a\} \cap \{b\} = \emptyset \quad (|\{a\}| = |\{b\}| = 1);$$

$$|A| = 1 \Rightarrow |A| = |X| - 1 = 1.$$

Эти соотношения показывают, что утверждение выполняется при $|X| = 2$.

3) Пусть $|X| \geq 3$. Любое множество $A \in B(X)$ мощности $|X| - 3$ мы можем получить как пересечение множеств мощности $|X| - 2$ и $|X| - 1$. Действительно, для любых $a_1, \dots, a_{|X|-3} \in X$ имеем равенство множеств

$$\{a_1, \dots, a_{|X|-3}, c_1\} \cap \{a_1, \dots, a_{|X|-3}, b_1, b_2\} = \{a_1, \dots, a_{|X|-3}\},$$

где $c_1 \notin \{b_1, b_2\}$ и $c_1, b_1, b_2 \notin \{a_1, \dots, a_{|X|-3}\}$. Существование элементов c_1, b_1, b_2 , с приведенными ограничениями, обусловлено тем, что $|X| \geq 3$. При этом любое множество мощности $|X| - 2$ можно получить как пересечение множеств мощности $|X| - 1$. В самом деле, для любых $a_1, \dots, a_{|X|-2} \in X$ имеем равенство множеств

$$\{a_1, \dots, a_{|X|-2}, c_1\} \cap \{a_1, \dots, a_{|X|-2}, b_1\} = \{a_1, \dots, a_{|X|-2}\}.$$

Множество $A \in B(X)$ мощности $|X| - (i + 2)$ ($i = 1, \dots, |X| - 2$) можно получить как пересечение множеств $|X| - (i + 1)$. Таким образом, любое множество из $B(X)$ можно получить как пересечение множеств X и множеств мощности $|X| - 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

Для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ введем обозначения

$$\overline{W}_i(A_i) := (M_1, \dots, M_{i-1}, A_i, M_{i+1}, \dots, M_n), \quad (4.1)$$

$$\overline{P}_i(A_i, \dots, A_n) := (M_1, \dots, M_{i-1}, A_i, A_{i+1}, \dots, A_n), \quad (4.2)$$

$$\overline{O}_i(A_1, \dots, A_i) := (A_1, \dots, A_{i-1}, A_i, M_{i+1}, \dots, M_n), \quad (4.3)$$

где при любом $s \in \{1, \dots, n\}$ множества A_s — непустое подмножество множества M_s .

Поскольку группоид $\text{MGS}(\mathcal{N})$ является идемпотентным для любой сети $\mathcal{N}$, то принадлежность некоторого кортежа $\overline{U}$ произвольному подмножеству $T \subseteq \text{MGS}(\mathcal{N})$ равносильно тому, что кортеж $\overline{U}$ является произведением элементов из множества T . Действительно, выполняется равенство $\overline{U} = \overline{U} * \overline{U}$.

Лемма 4.1. Пусть $\mathcal{N} = (M_1, \dots, M_n, f, g, l)$ — это нейронная сеть такая, что для любого натурального $i \leq n$ выполняется условие $|M_i| \geq 2$. Кортежи вида (4.1), (4.2) и (4.3) из $\text{MGS}(\mathcal{N})$ являются произведениями конечного числа элементов из $\text{GenMult}(\mathcal{N})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Кортежи $\overline{W}_i(A)$ можно представить как некоторое произведение элементов из $\text{GenMult}(\mathcal{N})$. В самом деле, множество A представимо в виде

$$A = \bigcap_{s \in \{1, 2, \dots, t\}} A_s,$$

где t – это некоторое натуральное число и A_s – это подмножества множества M_i из $\text{GenCap}(M_i)$ для любого $s \in \{1, 2, \dots, t\}$. Приведенное разложение множества A с указанными свойствами существует в силу утверждения 4.1. Поэтому имеем соотношение

$$\begin{aligned}\overline{W}_i(A) &= \bigcap_{s \in \{1, 2, \dots, t\}} \overline{W}_i(A_s) = \\ &= ((\dots(\overline{W}_i(A_1) \cap \overline{W}_i(A_2)) \cap \overline{W}_i(A_3)) \cap \dots) \cap \overline{W}_i(A_t) = \\ &= ((\dots(\overline{W}_i(A_1) * \overline{W}_i(A_2)) * \overline{W}_i(A_3)) * \dots) * \overline{W}_i(A_t).\end{aligned}$$

Поскольку пересечение любых двух кортежей из семейства $(\overline{W}_i(A_s))_{s \in \{1, 2, \dots, t\}}$ есть непрерывный кортеж, то в представленном выражении операция пересечения может быть заменена на операцию $(*)$. Так как все кортежи семейства $(\overline{W}_i(A_s))_{s \in \{1, 2, \dots, t\}}$ принадлежат множеству $\text{GenMult}(\mathcal{N})$, то кортежи $\overline{W}_i(A)$ порождаются кортежами из $\text{GenMult}(\mathcal{N})$.

Для всякого $i \in \{1, \dots, n\}$ выполняются равенства:

$$\begin{aligned}\overline{P}_i(A_i, \dots, A_n) &= ((\dots(\overline{W}_i(A_i) \cap \overline{W}_{i+1}(A_{i+1})) \cap \overline{W}_{i+2}(A_{i+2})) \cap \dots) \cap \overline{W}_n(A_n) = \\ &= ((\dots(\overline{W}_i(A_i) * \overline{W}_{i+1}(A_{i+1})) * \overline{W}_{i+2}(A_{i+2})) * \dots) * \overline{W}_n(A_n),\end{aligned}\quad (4.4)$$

$$\begin{aligned}\overline{O}_i(A_1, \dots, A_i) &= ((\dots(\overline{W}_1(A_1) \cap \overline{W}_2(A_2)) \cap \overline{W}_3(A_3)) \cap \dots) \cap \overline{W}_i(A_i) = \\ &= ((\dots(\overline{W}_1(A_1) * \overline{W}_2(A_2)) * \overline{W}_3(A_3)) * \dots) * \overline{W}_i(A_i).\end{aligned}\quad (4.5)$$

Поскольку пересечение любых двух соседних кортежей в выражениях (4.4) и (4.5) есть непрерывный кортеж, то операцию пересечения можно заменить на операцию $(*)$. Если в выражениях (4.4) и (4.5) все $\overline{W}_i$ заменить на их выражения через элементы из $\text{GenMult}(\mathcal{N})$, то получим разложения $\overline{P}_i(A_{i+1}, \dots, A_n)$ и $\overline{O}_i(A_1, \dots, A_i)$ через элементы из $\text{GenMult}(\mathcal{N})$.

Доказательство завершено.

Лемма 4.2. Пусть $\mathcal{N} = (M_1, \dots, M_n, f, g, l)$ – нейронная сеть такая, что для любого натурального $i \leq n$ выполняется условие $|M_i| \geq 2$. Тогда всякий элемент из $\text{MGS}(\mathcal{N})$ представляется как произведение подходящих кортежей вида (4.1), (4.2) или (4.3).

Доказательство.

1) Пусть $\overline{U}$ – это произвольный кортеж из $\text{MGS}(\mathcal{N})$ вида:

$$\overline{U} = (U_1, \dots, U_s, \emptyset, \dots, \emptyset),\quad (4.6)$$

где при любом $j \in \{1, 2, \dots, s\}$ выполняется условие $U_j \neq \emptyset$. Тогда выполняется равенство множеств

$$\begin{aligned}\overline{U} &= ((\dots((\overline{W}_1(U_1) \cap \overline{W}_2(U_2)) \cap \overline{W}_3(U_3)) \cap \dots) \cap \overline{W}_s(U_s)) \cap \\ &\cap (\overline{P}_s(A_{s+1}, \dots, A_n) \cap \overline{P}_s(A'_{s+1}, \dots, A'_n)),\end{aligned}\quad (4.7)$$

где для любого $t \in \{s+1, s+2, \dots, n\}$ множества $A_t, A'_t \subseteq M_t$ удовлетворяют условию $A_t \cap A'_t = \emptyset$. Пара множеств (A_t, A'_t) с указанным условием существует в силу выполнения неравенства $|M_i| \geq 2$ для любого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Поскольку в выражении (4.7) пересечение любой пары кортежей, стоящих рядом, является непрерывным множеством, то пересечения можно заменить на $(*)$. Таким образом, получим следующее разложение:

$$\bar{U} = (\dots ((\bar{W}_1(U_1) * \bar{W}_2(U_2) * \bar{W}_3(U_3) * \dots) * \bar{W}_s(U_s)) * (\bar{P}_s(A_{s+1}, \dots, A_n) * \bar{P}_s(A'_{s+1}, \dots, A'_n))) .$$

Поэтому для кортежей вида (4.6) разложение из утверждения леммы построено.

2) Пусть $\bar{U}$ – это произвольный кортеж из $\text{MGS}(\mathcal{N})$ вида:

$$\bar{U} = (U_1, \dots, U_n), \quad (4.8)$$

где для любого $j \in \{1, \dots, n\}$ выполняется равенство $U_j \neq \emptyset$. Тогда выполняется равенство

$$\bar{U} = (\dots ((\bar{W}_1(U_1) \cap \bar{W}_2(U_2)) \cap \bar{W}_3(U_3)) \cap \bar{W}_4(U_4)) \cap \dots) \cap \bar{W}_n(U_n).$$

Так как при пересечении двух кортежей, стоящих рядом, будет получаться непрерывный кортеж, то пересечения можно заменить на $(*)$ и мы получим разложение:

$$\bar{U} = (\dots ((\bar{W}_1(U_1) * \bar{W}_2(U_2) * \bar{W}_3(U_3) * \bar{W}_4(U_4) \dots) * \bar{W}_n(U_n))).$$

Таким образом, построено разложение из утверждения данной леммы для кортежей вида (4.8).

3) Полагаем, что $\bar{U}$ – это произвольный кортеж из $\text{MGS}(\mathcal{N})$ вида:

$$\bar{U} = (\emptyset, \dots, \emptyset, U_1, \dots, U_s), \quad (4.9)$$

где $U_j \neq \emptyset$ для любого $j \in \{1, 2, \dots, s\}$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \bar{U} &= (\bar{O}_s(A_1, \dots, A_{n-s}) \cap \bar{O}_s(A'_1, \dots, A'_{n-s})) \cap \\ &\cap (\dots ((\bar{W}_{n-s+1}(U_1) \cap \bar{W}_{n-s+2}(U_2) \cap \bar{W}_{n-s+3}(U_3) \cap \dots) \cap \bar{W}_n(U_s)), \end{aligned}$$

где $A_t \cap A'_t = \emptyset$ для любого $t \in \{1, 2, \dots, n-s\}$. В силу непрерывности кортежа, получающегося при пересечении любых двух соседних кортежей в представленном разложении, операцию пересечения можно заменить на операцию $(*)$. В результате приходим к разложению кортежей вида (4.9) из утверждения данной леммы.

4) Пусть $\bar{U}$ – это произвольный кортеж из $\text{MGS}(\mathcal{N})$ вида:

$$\bar{U} = (\underbrace{\emptyset, \dots, \emptyset}_m, U_1, \dots, U_s, \emptyset, \dots, \emptyset), \quad (4.10)$$

где $U_j \neq \emptyset$ при любом $j \in \{1, \dots, s\}$. Тогда выполняется равенство

$$\begin{aligned} \bar{U} &= ((\bar{O}_s(A_1, \dots, A_m) \cap \bar{O}_s(A'_1, \dots, A'_m)) \cap \\ &\cap (\dots ((\bar{W}_{m+1}(U_1) \cap \bar{W}_{m+2}(U_2) \cap \bar{W}_{m+3}(U_3) \cap \dots) \cap \bar{W}_{m+s}(U_s)))) \cap \\ &\cap (\bar{P}_s(A_{m+s+1}, \dots, A_n) \cap \bar{P}_s(A'_{m+s+1}, \dots, A'_n)), \end{aligned}$$

где $A_t \cap A'_t = \emptyset$ при любом $t \in \{1, 2, \dots, m\} \cup \{m+s+1, \dots, n\}$. В силу непрерывности кортежа, получающегося при пересечении любых двух соседних кортежей, операцию пересечения можно заменить на операцию $(*)$. В результате приходим к разложению элементов вида (4.10) из утверждения леммы.

5) Рассмотрим кортежи вида:

$$(M_1, M_2, \dots, M_n), (\emptyset, \emptyset, \dots, \emptyset). \quad (4.11)$$

Для основного кортежа нейронов будет выполняться равенство $(M_1, M_2, \dots, M_n) = \overline{W}_i(M_i)$, где i – произвольное число из $\{1, 2, \dots, n\}$. Поскольку $|M_i| \geq 2$, то в каждом множестве M_i можно подобрать два подмножества A_i и B_i такие, что $A_i \cap B_i = \emptyset$. Тогда будет выполняться равенство

$$(\emptyset, \emptyset, \dots, \emptyset) = (\dots((\overline{Z}_1 * \overline{Z}_2) * \overline{Z}_3) * \dots) * \overline{Z}_n,$$

где $\overline{Z}_i = \overline{W}_i(A_i) * \overline{W}_i(B_i)$. Таким образом, кортежи вида (4.11) можно представить как произведение подходящих кортежей вида (4.1), (4.2) или (4.3).

Любой кортеж из $\text{MGS}(\mathcal{N})$ является одним из кортежей вида (4.6), (4.8), (4.9), (4.11) или (4.10). Поэтому утверждение леммы выполняется для всех кортежей из $\text{MGS}(\mathcal{N})$. Доказательство завершено.

Теорема 4.1. Пусть $\mathcal{N} = (M_1, \dots, M_n, f, g, l)$ – нейронная сеть такая, что для любого натурального $i \leq n$ выполняется условие $|M_i| \geq 2$. Тогда $\text{GenMult}(\mathcal{N})$ порождает группоид $\text{MGS}(\mathcal{N})$.

Доказательство. В силу леммы 4.2 любой кортеж из $\text{MGS}(\mathcal{N})$ является произведением кортежей вида (4.1), (4.2) и (4.3). По лемме 4.1 все эти кортежи являются произведениями элементов из $\text{GenMult}(\mathcal{N})$. Поэтому любой кортеж из $\text{MGS}(\mathcal{N})$ является произведением элементов из $\text{GenMult}(\mathcal{N})$. Значит, $\text{GenMult}(\mathcal{N})$ порождает $\text{MGS}(\mathcal{N})$.

Доказательство завершено.

Теорема 4.2. Пусть $\mathcal{N} = (M_1, \dots, M_n, f, g, l)$ – нейронная сеть такая, что для любого натурального $i \leq n$ выполняется условие $|M_i| \geq 2$. Группоид $\widehat{\text{MGS}}(\mathcal{N})$ порождается множеством $\text{GenMult}(\mathcal{N}) \times \text{GenCap}(\text{Syn}(\mathcal{N}))$.

Доказательство. Пусть $\widehat{U} = (\overline{X}, Q)$ – это произвольный элемент из $\widehat{\text{MGS}}(\mathcal{N})$. По теореме 4.1 для каждого $\overline{X}$ существует разложение

$$\overline{X} = f(\overline{X}_1, \overline{X}_2, \overline{X}_3, \dots, \overline{X}_t), \quad (4.12)$$

где f – это выражение, записанное с помощью операции $(*)$ и скобок (т.е. терм), t – это подходящее натуральное число и для любого $s \in \{1, 2, \dots, t\}$ кортежи $\overline{X}_s$ принадлежат множеству $\text{GenMult}(\mathcal{N})$. Так как множество $\text{Syn}(\mathcal{N})$ конечно, то в силу утверждения 4.1 для любого множества $Q \in B(\text{Syn}(\mathcal{N}))$ существует разложение

$$Q = \bigcap_{s \in \{1, 2, \dots, k\}} Q_s, \quad (4.13)$$

где k – это подходящее натуральное число, и для любого $s \in \{1, 2, \dots, k\}$ множество Q_s принадлежит $\text{GenCap}(\text{Syn}(\mathcal{N}))$. Используя соотношение (4.12), получаем равенство

$$\widehat{U} = (\overline{X}, Q) = f((\overline{X}_1, Q), (\overline{X}_2, Q), (\overline{X}_3, Q), \dots, (\overline{X}_t, Q)). \quad (4.14)$$

В силу соотношения (4.13) для каждого кортежа $(\overline{X}_u, Q)$ ($u \in \{1, 2, \dots, t\}$) из предыдущего равенства можно записать разложение

$$(\overline{X}_u, Q) = (\dots((\overline{X}_u, Q_1) * (\overline{X}_u, Q_2)) * (\overline{X}_u, Q_3)) * \dots * (\overline{X}_u, Q_k).$$

Подставив эти разложения в равенство (4.14), получим разложение кортежа $\widehat{U}$ через элементы множества $\text{GenMult}(\mathcal{N}) \times \text{GenCap}(\text{Syn}(\mathcal{N}))$. В силу произвольности $\widehat{U}$ получаем, что группоид $\widehat{\text{MGS}}(\mathcal{N})$ порождается множеством $\text{GenMult}(\mathcal{N}) \times \text{GenCap}(\text{Syn}(\mathcal{N}))$. Доказательство завершено.

5. Заключение

Порождающие множества группоидов, которые рассматривались в данной работе планируется применить для описания моноидов всех эндоморфизмов данных группоидов. Предполагается использовать метод исследования действия произвольного эндоморфизма на элементах порождающего множества. Кроме того, основные результаты работы могут быть полезны для изучения свойств многослойных нейронных сетей с помощью группоидов, которые рассматривались в данной работе.

Благодарности. Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Красноярском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Соглашение № 075-02-2026-1314).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Головкин В. А., Краснопрошин В. В. Нейросетевые технологии обработки данных. Учеб. пособие. Минск: Изд-во Беларус. гос. ун-та, 2017. 263 с.
2. Горбань А. Н. Обобщенная аппроксимационная теорема и вычислительные возможности нейронных сетей // *Сибирский журнал вычислительной математики*. 1998. Т. 1, № 1. С. 11–24.
3. Розенблатт Ф. Принципы нейродинамики: персептрон и теория механизмов мозга. Пер. с англ. М.: Мир, 1965. 478 с.
4. Созыкин А. В. Обзор методов обучения глубоких нейронных сетей // *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Вычислительная математика и информатика»*. 2017. Т. 6, № 3. С. 28–59
5. Литаврин А. В. Эндоморфизмы конечных коммутативных группоидов, связанных с многослойными нейронными сетями прямого распределения // *Труды Института математики и механики УрО*. 2021. Т. 27, № 1. С. 130–145. DOI: 10.21538/0134-48892021-27-1-130-145
6. Литаврин А. В. О некоторых конечных коммутативных группоидах, связанных с многослойными нейронными сетями прямого распространения // XXI Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвященная 85-летию со дня рождения А. А. Карацубы.: тезисы докладов международной конференции. Тула, 2022. С. 106–109.
7. Litavrin A. V. On endomorphisms of the additive monoid of subnets of a two-layer neural network. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*. 2022. Vol. 39. P. 111–126. DOI: 10.26516/1997-7670.2022.39.111

8. Litavrin A. V., Moiseenkova T. V. On some commutative and idempotent finite groupoids associated with subnets of multilayer feedforward neural networks // *Журнал СВУ. Серия «Математика и физика»*. 2025. Т. 18, № 1. С. 59–70

*Поступила 12.03.2026; доработана после рецензирования 03.08.2026;
принята к публикации 25.08.2026*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. V. A. Golovko, V. V. Krasnoproshin, *Neural network data processing technologies*, Publishing house of Belarusian state university, Minsk, 2017 (In Russ.), 263 p.
2. A. N. Gorban, “Generalized approximation theorem and computational capabilities of neural networks”, *Siberian Journal of Computational Mathematics*, **1**:1 (1998), 11–24 (In Russ.).
3. F. Rosenblatt, *Principles of Neurodynamics: The Perceptron and the Theory of Brain Mechanisms*, Mir, M., 1965, 478 p.
4. A. V. Sozykin, “Review of Methods for Training Deep Neural Networks”, *Bulletin of South Ural State University. Series «Computational Mathematics and Informatics»*, **6**:3 (2017), 28–59 (In Russ.).
5. A. V. Litavrin, “Endomorphisms of Finite Commutative Groupoids Associated with Multilayer Feedforward Neural Networks”, *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch*, **27**:1 (2021), 130–145 (In Russ.). DOI: 10.21538/0134-48892021-27-1-130-145
6. A. V. Litavrin, “On Some Finite Commutative Groupoids Associated with Multilayer Feedforward Neural Networks”, *XXI International Conference «Algebra, Number Theory, and Discrete Geometry: Modern Problems and Applications» dedicated to the 85th anniversary of A. A. Karatsuba’s birth: Abstracts of the International Conference*, 2022, 106–109 (In Russ.).
7. A. V. Litavrin, “On endomorphisms of the additive monoid of subnets of a two-layer neural network”, *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, **39** (2022), 111–126. DOI: 10.26516/1997-7670.2022.39.111
8. A. V. Litavrin, T. V. Moiseenkova, “On some commutative and idempotent finite groupoids associated with subnets of multilayer feedforward neural networks”, *SFU Journal. Series «Mathematics and Physics»*, **18**:1 (2025), 59–70.

Submitted 12.03.2026; Revised 03.08.2026; Accepted 25.08.2026

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.