

DOI 10.15507/2079-6900.28.202603.193-211

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 515.163

Об одном обобщении преобразования Лапласа

А. М. Собина*ФГБОУ ВО Уфимский государственный нефтяной технический университет
(г. Уфа, Российская Федерация)**Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
(г. Нижний Новгород, Российская Федерация)*

Аннотация. В настоящей работе вводится и исследуется новое обобщение классического преобразования Лапласа для функционалов, заданных на пространствах целых функций многих комплексных переменных. В качестве ядра этого преобразования выбрана целая функция специального вида, которая естественным образом обобщает экспоненту и находит применение в задачах, связанных с дифференциальными уравнениями в обобщённых частных производных, а также в теории многомерных аналогов пространств Фока. Одной из ключевых задач теории функций многих комплексных переменных является описание роста целых функций. Для этого используются различные характеристики роста функций, такие как сопряжённые порядки и типы, порядки и типы по каждой переменной и др. В данной работе для функции, задающей ядро обобщённого преобразования Лапласа, вычисляются порядки и типы по каждой переменной, что позволяет охарактеризовать поведение этой функции на бесконечности. Кроме того, в статье устанавливается изоморфизм между пространством, сопряжённым к пространству целых функций многих комплексных переменных, наделённому топологией компактной сходимости, и пространством функций, аналитических по каждой переменной вне некоторого круга. Этот результат играет важную роль в дальнейших построениях. На его основе доказывается, что введённое обобщённое преобразование Лапласа реализует изоморфизм между пространством непрерывных линейных функционалов над пространством целых функций многих комплексных переменных и пространством целых функций с заданным порядком роста. Таким образом, предлагаемый подход открывает новые возможности для исследования функциональных пространств и их приложений к дифференциальным уравнениям.

Ключевые слова: целые функции многих комплексных переменных, порядки и типы целой функции по каждой переменной, обобщённое преобразование Лапласа

Для цитирования: Собина А. М. Об одном обобщении преобразования Лапласа // Журнал Средневолжского математического общества. 2026. Т. 28, № 3. С. 193–211. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202603.193-211

Об авторах:

Собина Алиа Мидхатовна, старший преподаватель кафедры Информационных технологий и прикладной математики, Уфимский государственный нефтяной технический университет (450064, Россия, г. Уфа, ул. Космонавтов, д. 1), аспирант кафедры фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603150, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Б. Печерская, д. 25/12), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9014-9508>, aliya-0887@mail.ru



MSC2020 57N10

On a generalization of the Laplace transform

A. M. Sobina*Ufa State Petroleum Technological University (Ufa, Russian Federation)**Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russian Federation)*

Abstract. In the paper we introduce and study a new generalization of the classical Laplace transform for functionals defined on spaces of entire functions of several complex variables. The kernel of the transform is chosen to be an entire function of a special form, which naturally generalizes the exponential function and has applications in problems related to differential equations with generalized partial derivatives, as well as in the theory of multidimensional analogues of Fock spaces.

One of the key problems in the theory of functions of several complex variables is the description of growth of entire functions. Various growth characteristics of functions may be used for this purpose, such as conjugate orders and types, orders and types with respect to each variable, and others. In this work, for the function defining the kernel of the generalized Laplace transform, we compute orders and types with respect to each variable, which makes it possible to characterize the function's behaviour at infinity.

Furthermore, we establish an isomorphism between the space dual to the space of entire functions of several complex variables, endowed with the topology of compact convergence, and the space of functions that are analytic in each variable outside some polydisk. This result plays an important role in subsequent constructions. On its basis, we prove that the introduced generalized Laplace transform realizes an isomorphism between the space of continuous linear functionals over the space of entire functions of several complex variables and the space of entire functions with a prescribed order of growth. Thus, the proposed approach opens up new possibilities for the study of function spaces and their applications to differential equations.

Keywords: Entire functions of several complex variables, the orders and types of an entire function with respect to each variable, generalized Laplace transform

For citation: A. M. Sobina. On a generalization of the Laplace transform. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 28:3(2026), 193–211. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202603.193-211

About the authors:

Aliya M. Sobina, Senior Lecturer at the Department of Information Technologies and Applied Mathematics, Ufa State Petroleum Technological University (1 Kosmonavtov St., Ufa 450064, Russia), Postgraduate Student, Department of Fundamental Mathematics, National Research University «Higher School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9014-9508>, aliya-0887@mail.ru

1. Введение

Настоящая работа посвящена изучению одного обобщения преобразования Лапласа для функционалов, заданных на целых функциях многих комплексных переменных.

Преобразование Лапласа сопряженного пространства и его обобщения играют значительную роль в анализе функций действительного и комплексного переменного. В различных источниках оно также носит название преобразованием Фурье-Лапласа, Фурье или Фурье-Бореля. Благодаря таким преобразованиям многие проблемы теории операторов свертки, дифференциальных уравнений и теории аппроксимации функций сводятся к задачам из теории аналитических функций (например, описание сопряженных пространств в терминах преобразования Фурье-Лапласа [1, 2], а также реализация сопряженного пространства с помощью обобщенного преобразования Фурье-Бореля [3]). Зачастую, более эффективным инструментом в решении задач анализа являются обобщения преобразования Лапласа. Применяют различные способы обобщения. Например, в своих работах О.Э. Яремко и Н.Н. Яремко [4] изучают обобщенное двойное преобразование Лапласа; В.И. Иванов [5] рассматривает двупараметрическое обобщенное преобразование Лапласа. Наиболее распространенным способом построения обобщений преобразования Лапласа является замена экспоненты, которая является ядром классического преобразования Лапласа, на какую-либо другую функцию. В работе С.В. Панюшкина [6] исследуются обобщенные преобразования Фурье, ядром которых служит целая векторозначная функция одной комплексной переменной. Другие подходы к построению обобщенных преобразований Лапласа на основе операторов дифференцирования с кусочно-постоянными коэффициентами рассматриваются в работе [7], где также развивается соответствующее операционное исчисление и находится решение уравнения теплопроводности. В настоящей работе в качестве ядра обобщенного преобразования Лапласа берется другая целая функция $\mathcal{U}_\lambda(z)$, которая играет важную роль как при изучении дифференциальных операторов в обобщенных частных производных [8, 9], так и в теории многомерных обобщенных пространств Фока [10].

В первом параграфе представлен литературный обзор и основные определения. Во втором параграфе изучается рост целой функции $\mathcal{U}_\lambda(z)$, показана связь порядка и типа по каждой переменной этой функции с такими характеристиками формирующих ее многочленов $p_1, p_2, \dots, p_n$, как степень и главный член. В третьем параграфе доказывается изоморфизм пространства, сопряженного к пространству целых функций n комплексных переменных, наделенному топологией компактной сходимости, и пространства функций, аналитических по каждой переменной вне некоторого круга. В последнем, четвертом параграфе вводится определение обобщенного преобразования Лапласа, ядром которого является функция (2.6), и доказывается, что это преобразование является изоморфизмом между пространством функционалов и пространством функций определенного порядка.

2. Основные понятия и определения

Для описания функции $\mathcal{U}_\lambda(z)$, а также для удобства дальнейших рассуждений, нам понадобится ряд обозначений. Всюду далее n – это фиксированное натуральное число. Символом $\mathbb{N}_0$ будем обозначать множество $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Если $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ – n -мерная комплексная переменная и $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ – мультииндекс (т.е. $k_j \in \mathbb{N}_0$ для всех $j = \overline{1, n}$), то через z^k будем обозначать произведение $z_1^{k_1} \cdot z_2^{k_2} \cdot \dots \cdot z_n^{k_n}$. Для векторов $z \in \mathbb{C}^n$ используется норма $\|z\| = (|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2)^{1/2}$. Будем применять также обозначения $|k| = k_1 + k_2 + \dots + k_n$ и $a_k = a_{k_1, k_2, \dots, k_n}$. Записи $\sum_{|k| \geq 0}$ и $\sum_{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0}$ будем считать эквивалентными записи $\sum_{k_1 \in \mathbb{N}_0} \dots \sum_{k_n \in \mathbb{N}_0}$.

Далее приведём некоторые сведения, необходимые для более точной формулировки

результатов исследования.

2.1. Характеристики роста целых функций одной комплексной переменной

В теории целых функций одной комплексной переменной рост функции определяется такими характеристиками, как порядок и тип. Приведём определение этих характеристик, следуя А.Ф. Леонтьеву (см. §1 главы 1 монографии [11]).

Определение 2.1. *Говорят, что целая функция $f(z)$ имеет конечный порядок, если найдётся число $a > 0$, удовлетворяющее условию: существует такое $R > 0$, что при всех $z \in \mathbb{C}$, таких что $|z| > R$, выполняется неравенство $|f(z)| < \exp(|z|^a)$.*

Нижняя грань ρ_f множества чисел a , удовлетворяющих этому условию, называется порядком функции $f(z)$. Если условие не выполняется ни при каком конечном $a > 0$, то говорят, что $f(z)$ имеет бесконечный порядок (т.е. $\rho_f = \infty$).

Определение 2.2. *Пусть целая функция $f(z)$ имеет порядок $0 < \rho_f < \infty$. Говорят, что $f(z)$ имеет конечный тип при порядке $0 < \rho_f < \infty$, если найдётся число $b > 0$, удовлетворяющее условию: существует такое $R > 0$, что при всех $z \in \mathbb{C}$, таких что $|z| > R$, выполняется неравенство $|f(z)| < \exp(b|z|^{\rho_f})$.*

Нижняя грань σ_f множества чисел b , удовлетворяющих этому условию, называется типом функции $f(z)$ при порядке ρ_f . Если условие не выполняется ни при каком конечном $b > 0$, то говорят, что $f(z)$ имеет бесконечный тип (т.е. $\sigma_f = \infty$) при порядке ρ_f .

Из определений 2.1 и 2.2 вытекают следующие формулы для порядка и типа целой функции одной комплексной переменной (см. [11], глава 1, формулы (1.5) и (1.8)):

$$\rho_f = \overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln |f(z)|}{\ln |z|} \quad \text{и} \quad \sigma_f = \overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} \frac{\ln |f(z)|}{|z|^{\rho_f}}. \quad (2.1)$$

Кроме того, А.Ф. Леонтьев вывел (см. теорему 1.1 на стр. 12 монографии [11]) следующие формулы, выражающие порядок ρ_f и тип σ_f целой функции f , задаваемой степенным рядом $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m$, $z \in \mathbb{C}$, через коэффициенты этого ряда:

$$\rho_f = \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{m \ln m}{\ln |1/a_m|} \quad \text{и} \quad \sigma_f = \frac{1}{e\rho_f} \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m |a_m|^{\rho_f/m}. \quad (2.2)$$

Замечание 2.1. *Из определения 2.2 следует, что если целая функция $f(z)$ имеет тип $\sigma_f < \infty$ при порядке ρ_f , то для любого $\varepsilon > 0$ найдётся константа $B_\varepsilon > 0$, такая что при всех $z \in \mathbb{C}$ выполняется неравенство $|f(z)| \leq B_\varepsilon \exp((\sigma_f + \varepsilon)|z|^{\rho_f})$.*

2.2. Характеристики роста целых функций многих комплексных переменных

В теории целых функций многих комплексных переменных, в отличие от случая одной комплексной переменной, существуют несколько понятий порядков и типов, характеризующих рост целых функций с разных точек зрения. Например, в работах Л.С. Маергойза [12] и Л.И. Ронкина [13] введены следующие характеристики роста:

- 1) порядок и тип целой функции по каждой переменной;
- 2) порядок и тип целой функции по совокупности переменных;

3) системы сопряженных порядков и сопряженных типов целой функции.

В настоящей работе исследованы порядок и тип по каждой переменной. Рассмотрены несколько вариантов, некоторые из которых, согласно Л.С. Маергойзу [12], можно описать следующим образом. Пусть целая функция f от n комплексных переменных задана n -кратным степенным рядом $f(z) = \sum_{|k| \geq 0} a_k z^k$. С одной стороны, рост этой функции по каждой переменной z_j , $j = \overline{1, n}$ характеризуется при фиксированных значениях остальных переменных $z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n$ порядком $\rho_j(z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n)$ целой функции $g_j(z) = f(z_1, \dots, z_{j-1}, z, z_{j+1}, \dots, z_n)$. С другой стороны, рост целой функции $f(z)$ по переменной z_j можно сравнить с ростом по переменной r_j таких мажорант функции $f(z)$, как $N_f(r_1, \dots, r_n) = \sum_{|k| \geq 0} |a_k| r_1^{k_1} \cdot \dots \cdot r_n^{k_n}$, где $r_1 = |z_1|$, $\dots$, $r_n = |z_n|$, и $M_f(r_1, \dots, r_n) = \max\{|f(z)| \mid |z_1| \leq r_1, \dots, |z_n| \leq r_n\}$. В той же работе [12] Л.С. Маергойз утверждает со ссылкой на исследования других авторов, что при каждом $j = \overline{1, n}$ функции $\rho_i(z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n)$ почти всюду в $\mathbb{C}^n$ совпадают с порядками указанных мажорант N_f и M_f по переменной r_j .

Мы будем работать в рамках первого из описанных выше вариантов, используя следующее определение.

Определение 2.3. Пусть $f(z) = f(z_1, \dots, z_n)$ – целая функция от n комплексных переменных, и $j \in \{1, \dots, n\}$.

1) Порядком функции f по переменной z_j будем называть порядок $\rho_{f,j}(z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n)$ целой функции $g_j(z) = f(z_1, \dots, z_{j-1}, z, z_{j+1}, \dots, z_n)$, $z \in \mathbb{C}$, при фиксированных значениях переменных $z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n$.

2) Если $0 < \rho_{f,j}(z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n) < \infty$, то типом функции f по переменной z_j будем называть тип $\sigma_{f,j}(z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n)$ функции $g_j(z)$.

Из этого определения и формул (2.1) при каждом $j = \overline{1, n}$ вытекают следующие два равенства, соответственно для порядка $\rho_{f,j}$ и типа $\sigma_{f,j}$ целой функции $f(z)$ от n комплексных переменных по переменной z_j :

$$\rho_{f,j} = \rho_{f,j}(z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n) = \varlimsup_{z \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln |f(z_1, \dots, z_{j-1}, z, z_{j+1}, \dots, z_n)|}{\ln |z|}, \quad (2.3)$$

$$\sigma_{f,j} = \sigma_{f,j}(z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n) = \varlimsup_{z \rightarrow \infty} \frac{\ln |f(z_1, \dots, z_{j-1}, z, z_{j+1}, \dots, z_n)|}{|z|^{\rho_{f,j}}}. \quad (2.4)$$

2.3. Обобщенная экспонента

Замечание 2.2. Пусть p – некоторый многочлен с комплексными коэффициентами, имеющий степень $q \in \mathbb{N}$, такой, что $p(s) \neq 0$ при любых $s \in \mathbb{N}$. Для каждого $\lambda \in \mathbb{C}$ зададим функцию $y_\lambda(z)$ от комплексной переменной z с помощью степенного ряда

$$y_\lambda(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda z)^k}{p(1) \cdot p(2) \cdot \dots \cdot p(k)}. \quad (2.5)$$

Замечание 2.3. Пусть $\mathbf{p} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ – некоторая система комплексных многочленов со степенями $q_1, q_2, \dots, q_n \in \mathbb{N}$ соответственно. Предположим, что все эти многочлены имеют ненулевые старшие коэффициенты, а также что для любых $j = \overline{1, n}$ и $s \in \mathbb{N}$ верно неравенство $p_j(s) \neq 0$. Для каждого набора $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$

зададим функцию $\mathcal{Y}_\lambda(z)$ от n -мерной комплексной переменной $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ с помощью следующего равенства:

$$\mathcal{Y}_\lambda(z) = y_{\lambda_1}(z_1) \cdot y_{\lambda_2}(z_2) \cdot \dots \cdot y_{\lambda_n}(z_n) = \prod_{j=1}^n \left(1 + \sum_{k_j=1}^{\infty} \frac{(\lambda_j z_j)^{k_j}}{p_j(1) \cdot p_j(2) \cdot \dots \cdot p_j(k_j)} \right). \quad (2.6)$$

Замечание 2.4. Для любого мультииндекса $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{N}_0^n$ и для каждого $j = \overline{1, n}$ введем следующие обозначения: $P_{j, \mathbf{k}} = 1$, если $k_j = 0$, и $P_{j, \mathbf{k}} = p_j(1) \cdot p_j(2) \cdot \dots \cdot p_j(k_j)$, если $k_j > 0$. Положим также

$$a_{\mathbf{k}} = \frac{\lambda^{\mathbf{k}}}{P_{1, \mathbf{k}} \cdot P_{2, \mathbf{k}} \cdot \dots \cdot P_{n, \mathbf{k}}}. \quad (2.7)$$

Тогда, раскрывая скобки в правой части равенства (2.6), можно получить представление функции $\mathcal{Y}_\lambda(z)$ в виде n -кратного степенного ряда

$$\mathcal{Y}_\lambda(z) = \sum_{|\mathbf{k}| \geq 0} a_{\mathbf{k}} z^{\mathbf{k}} = \sum_{|\mathbf{k}| \geq 0} \frac{\lambda^{\mathbf{k}}}{P_{1, \mathbf{k}} \cdot P_{2, \mathbf{k}} \cdot \dots \cdot P_{n, \mathbf{k}}} z^{\mathbf{k}}. \quad (2.8)$$

В нашей работе вычисляются такие характеристики роста функции $\mathcal{Y}_\lambda(z)$, заданной в (2.6), как порядок и тип по каждой переменной. Далее с помощью этой функции вводится изучаемое в настоящей работе обобщенное преобразование Лапласа.

3. Порядок и тип функции $\mathcal{Y}_\lambda(z)$ по каждой переменной

В данном параграфе изучается рост целых функций $y_\lambda(z)$ и $\mathcal{Y}_\lambda(z)$.

3.1. Порядок и тип обобщённой экспоненты $y_\lambda(z)$

Сначала необходимо показать, что функция $y_\lambda(z)$, зависящая от одной комплексной переменной и определяемая равенством (2.5), является целой, а также вычислить её порядок и тип. Это будет сделано в предложении 3.1, для доказательства которого нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3.1. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ и $\{\gamma_m\}_{m=1}^\infty$ — такая последовательность комплексных чисел, что существует предел

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (\gamma_m - \alpha \ln m) = \beta. \quad (3.1)$$

Тогда последовательность $\{(\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_m)/m - \alpha \ln m\}_{m=1}^\infty$ также имеет предел, и выполняется равенство

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_m}{m} - \alpha \ln m \right) = \beta - \alpha. \quad (3.2)$$

Доказательство.

1) Сначала докажем равенство

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln m}{m} - \ln m \right) = -1. \quad (3.3)$$

Так как функция $\ln x$ не убывает, то при любом $m \in \mathbb{N}$ верна оценка

$$\int_1^m \ln x \, dx \leq \ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln m \leq \int_1^m \ln x \, dx + \ln m.$$

Вычисляя интегралы и деля обе части этого неравенства на m , находим:

$$-1 + \frac{1}{m} \leq \frac{\ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln m}{m} - \ln m \leq -1 + \frac{1 + \ln m}{m}.$$

Переходя здесь к пределу при $m \rightarrow \infty$, получим нужное нам равенство (3.3).

2) Далее для доказательства формулы (3.2) применим известную теорему Чезаро-Штольца. Из неё, в частности, вытекает, что если числовая последовательность сходится, то последовательность её средних арифметических сходится к тому же пределу. Отсюда и из условия (3.1) получаем, что существует предел

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{(\gamma_1 - \alpha \ln 1) + (\gamma_2 - \alpha \ln 2) + \dots + (\gamma_m - \alpha \ln m)}{m} \right) = \beta.$$

Из этого равенства и из формулы (3.3) следует нужное соотношение:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_m}{m} - \alpha \ln m \right) = \beta + \alpha \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln m}{m} - \ln m \right) = \beta - \alpha.$$

Доказательство завершено.

Предложение 3.1. Пусть $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, и многочлен $p(z)$ степени $q \in \mathbb{N}$ с комплексными коэффициентами имеет вид $p(z) = t_q z^q + t_{q-1} z^{q-1} + \dots + t_0$, $z \in \mathbb{C}$, где $t_q \neq 0$. Тогда функция $y_\lambda(z)$, заданная формулой (2.5), является целой, имеет порядок $\rho_{y_\lambda} = 1/q$ и тип $\sigma_{y_\lambda} = q|\lambda/t_q|^{1/q}$.

Доказательство. Сначала вычислим величины ρ_f и σ_f для функции $f = y_\lambda$ по формулам Леонтьева (2.2), а затем покажем, что эта функция целая.

1) Для каждого $m \in \mathbb{N}$ положим $\gamma_m = \ln |p(m)|$. Тогда

$$\gamma_m = \ln |t_q m^q + t_{q-1} m^{q-1} + \dots + t_0| = \ln |t_q| + q \ln m + \ln \left| 1 + \frac{t_{q-1}}{m t_q} + \dots + \frac{t_0}{m^q t_q} \right|.$$

Отсюда следует, что $\lim_{m \rightarrow \infty} (\gamma_m - \alpha \ln m) = \beta$, где $\alpha = q$ и $\beta = \ln |t_q|$. Таким образом, последовательность $\{\gamma_m\}_{m=1}^\infty$ удовлетворяет условиям леммы 3.1. Согласно этой лемме, выполняется равенство (3.2), т.е. $\lim_{m \rightarrow \infty} ((\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_m)/m - \alpha \ln m) = \beta - \alpha$. Подставляя сюда значения α , β и γ_m ($m \in \mathbb{N}$), приходим к формуле

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln |p(1)| + \ln |p(2)| + \dots + \ln |p(m)|}{m} - q \ln m \right) = \ln |t_q| - q. \quad (3.4)$$

Отсюда получаем следующее равенство: $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln |p(1) \cdot p(2) \cdot \dots \cdot p(m)| - m \ln |\lambda|}{m \ln m} = q$.

Поэтому $\rho_f = \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{m \ln m}{\ln |1/a_m|} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m \ln m}{\ln |p(1) \cdot p(2) \cdot \dots \cdot p(m)| - m \ln |\lambda|} = \frac{1}{q}$.

2) Из формулы (3.4) вытекает равенство $\lim_{m \rightarrow \infty} \ln \frac{|p(1) \cdot p(2) \cdot \dots \cdot p(m)|^{1/m}}{m^q} = \ln \frac{|t_q|}{e^q}$. Следовательно,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{|p(1) \cdot p(2) \cdot \dots \cdot p(m)|^{1/m}}{m^q} = \frac{|t_q|}{e^q}. \quad (3.5)$$

Отсюда и из формул (2.2) находим:

$$\sigma_f = \frac{1}{e^{\rho_f}} \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m |a_m|^{\rho_f/m} = \frac{q|\lambda|^{1/q}}{e} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m^q}{|p(1) \cdot p(2) \cdot \dots \cdot p(m)|^{1/m}} \right)^{1/q} = q \left| \frac{\lambda}{t_q} \right|^{1/q}.$$

3) Из предыдущего равенства вытекает, что $\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} |a_m|^{1/m} = 0$. Поэтому, используя формулу Коши-Адамара, получаем следующее значение для радиуса сходимости $R_{\text{сх}}$ ряда (2.5): $R_{\text{сх}} = 1/\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} |a_m|^{1/m} = \infty$. Таким образом, функция $y_\lambda(z)$, заданная формулой (2.5), является целой.

Доказательство завершено.

Замечание 3.1. Из равенства (3.5) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших $m \in \mathbb{N}$ верно неравенство $|p(1) \cdot p(2) \cdot \dots \cdot p(m)|^{1/m}/m^q < |t_q|e^{-q} + \varepsilon$. Поэтому найдётся такая константа $Q_\varepsilon > 0$, что при всех $m \in \mathbb{N}$ выполняется оценка $|p(1) \cdot p(2) \cdot \dots \cdot p(m)| \leq Q_\varepsilon (|t_q|e^{-q} + \varepsilon)^m m^{qm}$.

Замечание 3.2. В силу предложения 3.1, функция $y_1(z)$ имеет порядок $\rho_{y_1} = 1/q$ и тип $\sigma_{y_1} = q|t_q|^{-1/q}$. Значит, согласно замечанию 2.1, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $B_\varepsilon > 0$, что $|y_1(z)| < B_\varepsilon \exp((q|t_q|^{-1/q} + \varepsilon)|z|^{1/q})$ при всех $z \in \mathbb{C}$. Заменяя здесь z на λz и воспользовавшись равенством $y_\lambda(z) = y_1(\lambda z)$, получим оценку

$$|y_\lambda(z)| \leq B_\varepsilon \exp((q|t_q|^{-1/q} + \varepsilon) \cdot |\lambda z|^{1/q}) \quad \text{при всех } \lambda, z \in \mathbb{C}. \quad (3.6)$$

3.2. Порядок и тип произведения целых функций

Согласно определению 2.3, функция $\mathcal{Y}_\lambda(z) = \mathcal{Y}_\lambda(z_1, z_2, \dots, z_n)$ является произведением функций $y_{\lambda_1}(z_1), y_{\lambda_2}(z_2), \dots, y_{\lambda_n}(z_n)$. Поэтому для вычисления порядка и типа функции $\mathcal{Y}_\lambda(z)$ нам понадобится следующее простое утверждение о порядке и типе произведения целых функций. Оно известно, для полноты изложения ниже приведено его доказательство.

Предложение 3.2. Пусть для каждого $j = \overline{1, n}$ задана целая функция одного комплексного переменного $h_j(z)$, которая имеет порядок $\rho_{h_j} \in (0; +\infty)$ и тип σ_{h_j} . Пусть, кроме того, целая функция f от n комплексных переменных при любых $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ определяется равенством $f(z) = h_1(z_1) \cdot h_2(z_2) \cdot \dots \cdot h_n(z_n)$. Тогда при каждом $j = \overline{1, n}$ и любых фиксированных значениях переменных $z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n$, не являющихся нулями функций $h_1, \dots, h_{j-1}, h_{j+1}, \dots, h_n$ соответственно, функция f имеет по переменной z_j порядок ρ_{h_j} и тип σ_{h_j} при порядке ρ_{h_j} . Другими словами, при каждом $j = \overline{1, n}$ и любых $z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, таких что $h_1(z_1) \cdot h_{j-1}(z_{j-1}) \cdot h_{j+1}(z_{j+1}) \cdot h_n(z_n) \neq 0$, выполняются равенства

$$\rho_{f,j}(z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n) = \rho_{h_j} \quad \text{и} \quad \sigma_{f,j}(z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n) = \sigma_{h_j}. \quad (3.7)$$

Доказательство. Зафиксируем произвольный индекс $j \in \{1, \dots, n\}$. Пусть $h_1(z_1) \cdot \dots \cdot h_{j-1}(z_{j-1}) \cdot h_{j+1}(z_{j+1}) \cdot \dots \cdot h_n(z_n) \neq 0$. Тогда, в силу определения 2.3, а также

формул (2.3) и (2.1), порядок $\rho_{f,j}$ можно найти следующим образом:

$$\begin{aligned}\rho_{f,j} &= \rho_{f,j}(z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n) = \overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln |f(z_1, \dots, z_{j-1}, z, z_{j+1}, \dots, z_n)|}{\ln |z|} = \\ &= \overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} \frac{\ln (\ln |h_1(z_1) \cdot \dots \cdot h_{j-1}(z_{j-1}) \cdot h_{j+1}(z_{j+1}) \cdot h_n(z_n)| + \ln |h_j(z)|)}{\ln |z|} = \\ &= \overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln |h_j(z)|}{\ln |z|} = \rho_{h_j}.\end{aligned}$$

Аналогично, используя формулу (2.4), находим тип $\sigma_{f,j}$ функции f по переменной z_j :

$$\begin{aligned}\sigma_{f,j} &= \sigma_{f,j}(z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n) = \overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} \frac{\ln |f(z_1, \dots, z_{j-1}, z, z_{j+1}, \dots, z_n)|}{|z|^{\rho_{f,j}}} = \\ &= \overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} \frac{\ln |h_1(z_1) \cdot \dots \cdot h_{j-1}(z_{j-1}) \cdot h_{j+1}(z_{j+1}) \cdot \dots \cdot h_n(z_n)| + \ln |h_j(z)|}{|z|^{\rho_{f,j}}} = \\ &= \overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} \frac{\ln |h_j(z)|}{|z|^{\rho_{f,j}}} = \sigma_{h_j}.\end{aligned}$$

Доказательство завершено.

Замечание 3.3. В предложении 3.2 при каждом $j = \overline{1, n}$ целая функция $h_j(z)$ не постоянна, так как $\rho_{h_j} \in (0; +\infty)$. По теореме единственности $h_j(z)$ имеет в $\mathbb{C}$ только изолированные нули. Следовательно, условие $h_1(z_1) \cdot h_{j-1}(z_{j-1}) \cdot h_{j+1}(z_{j+1}) \cdot h_n(z_n) \neq 0$ выполняется для всех наборов $(z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n-1}$, за исключением не более, чем счётного числа таких наборов. Таким образом, согласно предложению 3.2, равенства (3.7) выполняются в $\mathbb{C}^{n-1}$ всюду, кроме не более, чем счётного числа точек (а значит, почти всюду относительно меры Лебега).

3.3. Порядок и тип функции $\mathcal{U}_\lambda(z)$ по каждой переменной

Пользуясь полученными результатами, найдем порядок и тип функции $\mathcal{U}_\lambda(z)$, заданной в определении 2.3.

Теорема 3.1. Пусть $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ – комплексные многочлены степеней $q_1, q_2, \dots, q_n \in \mathbb{N}$ соответственно. Предположим, что при каждом $j = \overline{1, n}$ старший коэффициент t_{j,q_j} многочлена p_j не равен нулю, а также $p_j(s) \neq 0$ при любых $s \in \mathbb{N}$. Тогда для любого набора $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$, не содержащего нулей, при каждом $j = \overline{1, n}$ целая функция от n комплексных переменных

$$\mathcal{U}_\lambda(z) = \prod_{j=1}^n \left(1 + \sum_{k_j=1}^{\infty} \frac{(\lambda_j z_j)^{k_j}}{p_j(1) \cdot p_j(2) \cdot \dots \cdot p_j(k_j)} \right)$$

имеет по переменной z_j порядок $\rho_{\mathcal{U}_\lambda,j} = \rho_{\mathcal{U}_\lambda,j}(z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n) = 1/q_j$ и тип $\sigma_{\mathcal{U}_\lambda,j} = \sigma_{\mathcal{U}_\lambda,j}(z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n) = q_j |\lambda_j / t_{j,q_j}|^{1/q_j}$ при порядке $\rho_{\mathcal{U}_\lambda,j}$, для любых фиксированных значений переменных $z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n$, за исключением наборов, для которых $\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n y_{\lambda_i}(z_i) = 0$.

Замечание 3.4. Утверждение теоремы сразу следует из предложений 3.1 и 3.2, а также замечания 3.3.

Замечание 3.5. Так как $\mathcal{Y}_\lambda(z) = y_{\lambda_1}(z_1) \cdot y_{\lambda_2}(z_2) \cdot \dots \cdot y_{\lambda_n}(z_n)$ по определению 2.3, то, применяя к каждому сомножителю неравенство (3.6), получим оценку

$$|\mathcal{Y}_\lambda(z)| \leq C \exp(\alpha_1 |\lambda_1 z_1|^{1/q_1} + \dots + \alpha_n |\lambda_n z_n|^{1/q_n}) \quad \text{для любых } \lambda, z \in \mathbb{C}^n, \quad (3.8)$$

где $C > 0$ и $\alpha_j = q_j |t_{q_j}|^{-1/q_j} + \varepsilon > 0$ при всех $j = \overline{1, n}$.

4. Изоморфизм пространств $H^*(\mathbb{C}^n)$ и $H_0(\{\infty\}^n)$

Обозначим через $C(\mathbb{C}^n)$ пространство всех непрерывных функций $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$, наделенное локально-выпуклой топологией компактной сходимости (т.е. равномерной сходимости на компактах). Эту топологию можно задать с помощью счётной системы полунорм $\{\pi_m\}_{m=1}^\infty$, определяемых для любых $m \in \mathbb{N}$ и $f \in C(\mathbb{C}^n)$ равенством $\pi_m(f) = \max\{|f(z)| \mid |z_1| \leq m, \dots, |z_n| \leq m\}$. Символом $H(\mathbb{C}^n)$ обозначим подпространство в $C(\mathbb{C}^n)$, состоящее из всех целых функций, наделенное той же топологией. Пусть $H^*(\mathbb{C}^n)$ – пространство всех линейных непрерывных функционалов на $H(\mathbb{C}^n)$.

Определение 4.1. Через $H_0(\{\infty\}^n)$ далее будем обозначать линейное пространство всех комплекснозначных функций, определённых и аналитических по каждой переменной вне некоторого круга, и стремящихся к нулю на бесконечности. То есть для каждой функции $g \in H_0(\{\infty\}^n)$ найдётся такое $r_g > 0$, что $g(z)$ определена и является аналитической в области $\Omega_{r_g} = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_j| > r_g, j = \overline{1, n}\}$, причём $\lim_{\|z\| \rightarrow \infty} g(z) = 0$. Будем при этом отождествлять в $H_0(\{\infty\}^n)$ любые две функции, имеющие одинаковые значения на пересечении их областей определения.

Следующее замечание характеризует функции $g \in H_0(\{\infty\}^n)$ через их ряды Лорана.

Замечание 4.1. Любая функция $g \in H_0(\{\infty\}^n)$, как это следует из определения 4.1, раскладывается в Ω_{r_g} в кратный ряд Лорана (см. [14], теорема 1.118):

$$g(z) = \sum_{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}} \frac{b_{k_1, \dots, k_n}}{z_1^{k_1} \cdot \dots \cdot z_n^{k_n}}, \quad (4.1)$$

коэффициенты которого при любых $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ вычисляются по формуле

$$b_{k_1, \dots, k_n} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|z_1|=r_g+\varepsilon} \dots \int_{|z_n|=r_g+\varepsilon} z_1^{k_1-1} \cdot \dots \cdot z_n^{k_n-1} g(z) dz_1 \dots dz_n. \quad (4.2)$$

Из этой формулы получается следующая оценка для коэффициентов:

$$|b_{k_1, \dots, k_n}| \leq (r_g + \varepsilon)^{k_1 + \dots + k_n - n} \cdot \max\{|g(z)| \mid |z_1| = \dots = |z_n| = r_g + \varepsilon\}, \quad k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, верно и обратное утверждение: если функция g в некоторой окрестности точки $\infty = (\infty, \dots, \infty) \in \mathbb{C}^n$ раскладывается в ряд Лорана (4.1), такой что при некоторых $M > 0$ и $r > 0$ для любых $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ коэффициенты удовлетворяют оценке $|b_{k_1, \dots, k_n}| \leq M \cdot r^{k_1 + \dots + k_n}$, то функция g принадлежит классу $H_0(\{\infty\}^n)$.

Из результатов работы Кёте [15] вытекает, что в случае $n = 1$ пространства $H^*(\mathbb{C}^n)$ и $H_0(\{\infty\}^n)$ изоморфны. Следующая теорема является попыткой распространить этот результат на случай $n > 1$. В несколько другом направлении данный результат Кёте обобщён в работе [16] (см. также имеющиеся там ссылки).

Теорема 4.1. *Пространство $H^*(\mathbb{C}^n)$ линейно изоморфно пространству $H_0(\{\infty\}^n)$. Изоморфизм $\Psi: H_0(\{\infty\}^n) \rightarrow H^*(\mathbb{C}^n)$, $g \mapsto \Psi_g$ можно задать равенством*

$$\Psi_g(f) = \int_{|z_1|=r_g+\varepsilon} \dots \int_{|z_n|=r_g+\varepsilon} f(z)g(z)dz_1 \dots dz_n, \quad f \in H(\mathbb{C}^n), \quad (4.3)$$

где ε — произвольное положительное число.

Доказательство. Сначала заметим, что правая часть формулы (4.3) не зависит от $\varepsilon > 0$, так как функции f и g являются аналитическими в области Ω_{r_g} .

Нам достаточно проверить следующие четыре факта: то, что $\Psi_g \in H^*(\mathbb{C}^n)$ для любой $g \in H_0(\{\infty\}^n)$, а также линейность, инъективность и сюръективность отображения $\Psi: H_0(\{\infty\}^n) \rightarrow H^*(\mathbb{C}^n)$. Переходим к доказательству этих фактов.

1) Если $g \in H_0(\{\infty\}^n)$, то функционал Ψ_g , заданной формулой (4.3), очевидно, является линейным по $f \in H(\mathbb{C}^n)$. Его непрерывность следует из оценки

$$|\Psi_g(f)| \leq (2\pi(r_g + \varepsilon))^n \cdot \max\{|g(z)| \mid |z_1| = \dots = |z_n| = r_g + \varepsilon\} \cdot \pi_m(f)$$

для любого натурального $m \geq r_g + \varepsilon$. Итак, Ψ действует из $H_0(\{\infty\}^n)$ в $H^*(\mathbb{C}^n)$.

2) Линейность отображения $\Psi: g \mapsto \Psi_g$ сразу видна из формулы (4.3).

3) Покажем, что отображение Ψ инъективно. Для этого достаточно показать, что его ядро $\text{Ker}(\Psi)$ равно нулю. Итак, предположим, что $g \in \text{Ker}(\Psi) \subset H_0(\{\infty\}^n)$, т.е.

$$\Psi_g(f) = \int_{|z_1|=r_g+\varepsilon} \dots \int_{|z_n|=r_g+\varepsilon} f(z)g(z)dz_1 \dots dz_n = 0 \quad \text{при всех } f \in H(\mathbb{C}^n). \quad (4.4)$$

Согласно замечанию 4.1, функция g раскладывается в кратный ряд Лорана (4.1), коэффициенты которого при любых $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ вычисляются по формуле (4.2). Из равенств (4.2) и (4.4) при $f(z) = z_1^{k_1-1} \dots z_n^{k_n-1}$ следует, что $b_{k_1, \dots, k_n} = 0$ при всех $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$. Поэтому $g(z) \equiv 0$. Таким образом, отображение Ψ инъективно.

4) Покажем, что Ψ сюръективно, т.е. для любого функционала $F_0 \in H^*(\mathbb{C}^n)$ существует функция $g \in H_0(\{\infty\}^n)$, для которой $\Psi_g = F_0$.

Итак, пусть $F_0 \in H^*(\mathbb{C}^n)$. Поскольку $H(\mathbb{C}^n)$ — это линейное подпространство в $C(\mathbb{C}^n)$, то, согласно теореме Хана-Банаха, F_0 можно продолжить до линейного непрерывного функционала F на $C(\mathbb{C}^n)$. Из непрерывности F вытекает существование таких $m \in \mathbb{N}$ и $M > 0$, что для всех $f \in C(\mathbb{C}^n)$ верно соотношение

$$|F(f)| \leq M \cdot \pi_m(f) = M \cdot \max\{|f(z)| \mid |z_1| \leq m, \dots, |z_n| \leq m\}.$$

Из этого соотношения, в силу теоремы Рисса-Маркова, следует, что на полидиске $\Pi_m = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_1| \leq m, \dots, |z_n| \leq m\}$ существует борелевская счетно-аддитивная комплексная мера ν_m , для которой при всех $f \in C(\mathbb{C}^n)$ выполняется равенство

$$F(f) = \int_{\Pi_m} f d\nu_m. \quad (4.5)$$

Далее, зададим на множестве $\Omega_m = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_j| > m, j = \overline{1, n}\}$ функцию $g(z)$ следующим образом: для каждого $z = (z_1, \dots, z_n) \in \Omega_m$ положим

$$g(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Pi_m} \frac{d\nu_m(\xi)}{(\xi_1 - z_1) \cdot \dots \cdot (\xi_n - z_n)}. \quad (4.6)$$

Теперь убедимся, что функция g принадлежит пространству $H_0(\{\infty\}^n)$. Соотношение $\lim_{\|z\| \rightarrow \infty} g(z) = 0$ вытекает из следующей оценки, которая верна при всех $z \in \Omega_m$:

$$|g(z)| \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\Pi_m} \frac{d|\nu_m|(\xi)}{(|z_1| - |\xi_1|) \cdot \dots \cdot (|z_n| - |\xi_n|)} \leq \frac{|\nu_m|(\Pi_m)}{(2\pi)^n (|z_1| - m) \cdot \dots \cdot (|z_n| - m)},$$

где $|\nu_m|$ — вариация меры ν_m . Чтобы показать, что функция $g(z)$ является аналитической в области Ω_m , сначала разложим в ряд Тейлора ядро Коши:

$$\frac{1}{(\xi_1 - z_1) \cdot \dots \cdot (\xi_n - z_n)} = \sum_{l_1=0}^{\infty} \frac{\xi_1^{l_1}}{z_1^{l_1+1}} \cdot \dots \cdot \sum_{l_n=0}^{\infty} \frac{\xi_n^{l_n}}{z_n^{l_n+1}} = \sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} \frac{\xi_1^{k_1-1} \cdot \dots \cdot \xi_n^{k_n-1}}{z_1^{k_1} \cdot \dots \cdot z_n^{k_n}}.$$

Этот ряд при каждом $z = (z_1, \dots, z_n) \in \Omega_m$ сходится равномерно по $\xi \in \Pi_m$. Умножая его на $1/(2\pi i)^n$ и интегрируя по $d\nu_m(\xi)$, с учётом формулы (4.6), придём к равенству

$$g(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Pi_m} \frac{d\nu_m(\xi)}{(\xi_1 - z_1) \cdot \dots \cdot (\xi_n - z_n)} = \sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} \frac{b_{k_1, \dots, k_n}}{z_1^{k_1} \cdot \dots \cdot z_n^{k_n}}, \quad (4.7)$$

где

$$b_{k_1, \dots, k_n} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Pi_m} \xi_1^{k_1-1} \cdot \dots \cdot \xi_n^{k_n-1} d\nu_m(\xi) \quad \text{при любых } k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}.$$

Ряд (4.7) сходится при всех $z \in \Omega_m$, поэтому функция $g(z)$ аналитична на Ω_m .

Таким образом, в соответствии с определением 4.1, функция g принадлежит пространству $H_0(\{\infty\}^n)$, причем для неё $r_g = m$.

Для завершения доказательства теоремы остаётся для любой $f \in H(\mathbb{C}^n)$ и произвольного положительного ε проверить равенство

$$F_0(f) = \int_{|z_1|=r_g+\varepsilon} \dots \int_{|z_n|=r_g+\varepsilon} f(z)g(z)dz_1 \dots dz_n. \quad (4.8)$$

Действительно, подставляя сюда формулу (4.6), меняя порядок интегрирования и используя многомерную формулу Коши, а также формулу (4.5), правую часть этого равенства можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} & \int_{|z_1|=r_g+\varepsilon} \dots \int_{|z_n|=r_g+\varepsilon} f(z)g(z)dz_1 \dots dz_n = \\ & = \int_{|z_1|=r_g+\varepsilon} \dots \int_{|z_n|=r_g+\varepsilon} \frac{f(z)}{(2\pi i)^n} \int_{\Pi_m} \frac{d\nu_m(\xi)}{(\xi_1 - z_1) \cdot \dots \cdot (\xi_n - z_n)} dz_1 \dots dz_n = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Pi_m} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|z_1|=r_g+\varepsilon} \cdots \int_{|z_n|=r_g+\varepsilon} \frac{f(z) dz_1 \dots dz_n}{(\xi_1 - z_1) \cdots (\xi_n - z_n)} d\nu_m(\xi) = \\
&= \int_{\Pi_m} f(\xi) d\nu_m(\xi) = F(f) = F_0(f).
\end{aligned}$$

Итак, отображение Ψ сюръективно.

Доказательство завершено.

В следующем предложении значения функционала $F \in H^*(\mathbb{C}^n)$ выражаются через коэффициенты ряда Лорана соответствующей ему функции $g \in H_0(\{\infty\}^n)$.

Предложение 4.1. Пусть функция $g \in H_0(\{\infty\}^n)$ имеет ряд Лорана

$$g(z) = \sum_{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}} \frac{b_{k_1, \dots, k_n}}{z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}}, \quad z \in \Omega_{r_g}.$$

и функционал $F \in H^*(\mathbb{C}^n)$ задаётся равенством

$$F(f) = \int_{|z_1|=r_g+\varepsilon} \cdots \int_{|z_n|=r_g+\varepsilon} f(z) g(z) dz_1 \dots dz_n. \quad (4.9)$$

Тогда значение функционала F на функции $f \in H(\mathbb{C}^n)$, имеющей ряд Тейлора

$$f(z) = \sum_{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0} c_{k_1, \dots, k_n} z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}, \quad z \in \mathbb{C}^n, \quad (4.10)$$

может быть вычислено по формуле

$$F(f) = (2\pi i)^n \sum_{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0} c_{k_1, \dots, k_n} \cdot b_{k_1+1, \dots, k_n+1}.$$

Доказательство. Доказательство вытекает из формул (4.9), (4.10), (4.2) и цепочки равенств

$$\begin{aligned}
F(f) &= \int_{|z_1|=r_g+\varepsilon} \cdots \int_{|z_n|=r_g+\varepsilon} \sum_{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0} c_{k_1, \dots, k_n} z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n} g(z) dz_1 \dots dz_n = \\
&= \sum_{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0} c_{k_1, \dots, k_n} \int_{|z_1|=r_g+\varepsilon} \cdots \int_{|z_n|=r_g+\varepsilon} z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n} g(z) dz_1 \dots dz_n = \\
&= \sum_{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0} c_{k_1, \dots, k_n} \cdot (2\pi i)^n b_{k_1+1, \dots, k_n+1} = (2\pi i)^n \sum_{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0} c_{k_1, \dots, k_n} \cdot b_{k_1+1, \dots, k_n+1}.
\end{aligned}$$

Доказательство завершено.

5. Обобщенное преобразование Лапласа на пространстве $H^*(\mathbb{C}^n)$

Целая функция $\mathcal{Y}_\lambda$, называемая обобщённой экспонентой, была введена нами в определении 2.3 в предположении, что задана система $\mathbf{p} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ таких комплексных многочленов с положительными степенями, что $p_j(s) \neq 0$ при любых $j = \overline{1, n}$ и $s \in \mathbb{N}$. В силу равенств (2.6) и (2.8), для любых $\lambda \in \mathbb{C}^n$ и $z \in \mathbb{C}^n$ имеем:

$$\mathcal{Y}_\lambda(z) = \prod_{j=1}^n \left(1 + \sum_{k_j=1}^{\infty} \frac{(\lambda_j z_j)^{k_j}}{p_j(1) \cdot p_j(2) \cdot \dots \cdot p_j(k_j)} \right) = \sum_{|\mathbf{k}| \geq 0} \frac{\lambda^{\mathbf{k}}}{P_{1,\mathbf{k}} \cdot P_{2,\mathbf{k}} \cdot \dots \cdot P_{n,\mathbf{k}}} z^{\mathbf{k}}, \quad (5.1)$$

где $P_{j,\mathbf{k}} = 1$, если $k_j = 0$, и $P_{j,\mathbf{k}} = p_j(1) \cdot p_j(2) \cdot \dots \cdot p_j(k_j)$, если $k_j > 0$, $j = \overline{1, n}$.

Определение 5.1. Обобщённым преобразованием Лапласа произвольного функционала $F \in H^*(\mathbb{C}^n)$ назовём функцию $\Phi_{\mathbf{p}}(F) = \tilde{F}: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$, определяемую равенством

$$\tilde{F}(\lambda) = F(\mathcal{Y}_\lambda) = \langle F, \mathcal{Y}_\lambda(\cdot) \rangle, \quad \lambda \in \mathbb{C}^n.$$

Теорема 4.1 позволяет нам рассматривать обобщённое преобразование Лапласа как оператор $\Phi_{\mathbf{p}}$ на пространстве функций $g \in H_0(\{\infty\}^n)$. В следующем предложении результат преобразования выражен через коэффициенты ряда Лорана функции g . Его доказательство сразу вытекает из определения 5.1, формулы (5.1) и предложения 4.1.

Предложение 5.1. Пусть функционал $F \in H^*(\mathbb{C}^n)$ задаётся равенством

$$F(f) = \int_{|z_1|=r_g+\varepsilon} \dots \int_{|z_n|=r_g+\varepsilon} f(z) g(z) dz_1 \dots dz_n, \quad (5.2)$$

где функция $g \in H_0(\{\infty\}^n)$ имеет ряд Лорана $g(z) = \sum_{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}} \frac{b_{k_1, \dots, k_n}}{z_1^{k_1} \cdot \dots \cdot z_n^{k_n}}$.

Тогда его обобщённое преобразование Лапласа $\tilde{F}(\lambda)$ является целой функцией, и при любом $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ может быть записано в виде

$$\tilde{F}(\lambda) = (2\pi i)^n \sum_{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0} \frac{b_{k_1+1, \dots, k_n+1}}{P_{1,\mathbf{k}} \cdot \dots \cdot P_{n,\mathbf{k}}} \lambda_1^{k_1} \cdot \dots \cdot \lambda_n^{k_n}. \quad (5.3)$$

Замечание 5.1. Предложение 5.1 показывает, что отображение $\Phi_{\mathbf{p}}: F \rightarrow \tilde{F}$ инъективно, и следовательно, является линейным изоморфизмом между пространством $H^*(\mathbb{C}^n)$ и его образом. Из замечания 4.1 вытекает, что образ $\Phi_{\mathbf{p}}(H^*(\mathbb{C}^n))$ состоит из всех целых функций $h(\lambda)$, у которых коэффициенты ряда Тейлора

$$h(\lambda) = \sum_{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0} d_{k_1, \dots, k_n} \lambda_1^{k_1} \cdot \dots \cdot \lambda_n^{k_n},$$

при некоторых $D > 0$ и $r > 0$ для всех $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0$ подчиняются неравенству

$$|d_{k_1, \dots, k_n} \cdot P_{1,\mathbf{k}} \cdot \dots \cdot P_{n,\mathbf{k}}| \leq D \cdot r^{k_1 + \dots + k_n}.$$

В силу формулы (5.3), оператор $\Phi_{\mathbf{p}}^{-1}$, обратный к обобщённому преобразованию Лапласа, переводит функцию $h(\lambda) \in \Phi_{\mathbf{p}}(H^*(\mathbb{C}^n))$ в функционал $F = \Phi_{\mathbf{p}}^{-1}h \in H^*(\mathbb{C}^n)$,

определяемый по формуле (5.2) функцией $g \in H_0(\{\infty\}^n)$, задаваемой рядом Лорана

$$g(z) = \sum_{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0} \frac{d_{k_1, \dots, k_n} \cdot P_{1, \mathbf{k}} \cdot \dots \cdot P_{n, \mathbf{k}}}{z_1^{k_1+1} \cdot \dots \cdot z_n^{k_n+1}}.$$

При этом, согласно предложению 4.1, значения $F(f)$ для функции $f \in H(\mathbb{C}^n)$, имеющей ряд Тейлора $f(z) = \sum_{|\mathbf{k}| \geq 0} c_{\mathbf{k}} z^{\mathbf{k}}$, можно вычислять по формуле

$$F(f) = (\Phi_{\mathbf{p}}^{-1} h)(f) = (2\pi i)^n \sum_{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0} P_{1, \mathbf{k}} \cdot \dots \cdot P_{n, \mathbf{k}} \cdot c_{k_1, \dots, k_n} \cdot d_{k_1, \dots, k_n}.$$

Далее в теореме 5.1 мы несколько по-другому опишем образ $\Phi_{\mathbf{p}}(H^*(\mathbb{C}^n))$, а именно, в терминах ограничений на рост входящих в него функций.

Определение 5.2. Пусть задана система $\mathbf{p} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ комплексных многочленов, имеющих соответственно степени $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{N}$. Через $H_{\mathbf{p}}(\mathbb{C}^n)$ будем обозначать класс тех целых функций $h: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$, для которых существуют положительные константы $M > 0$ и $\beta_1, \dots, \beta_n > 0$, такие что

$$|h(\lambda)| \leq M \cdot \exp(\beta_1 |\lambda_1|^{1/q_1} + \dots + \beta_n |\lambda_n|^{1/q_n}) \quad \text{при всех } \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n. \quad (5.4)$$

Теорема 5.1. Обобщённое преобразование Лапласа $\Phi_{\mathbf{p}}$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между пространствами $H^*(\mathbb{C}^n)$ и $H_{\mathbf{p}}(\mathbb{C}^n)$.

Доказательство. 1) Докажем сначала включение $\Phi_{\mathbf{p}}(H^*(\mathbb{C}^n)) \subset H_{\mathbf{p}}(\mathbb{C}^n)$, т.е. что функция $\tilde{F} = \Phi_{\mathbf{p}}(F)$ при любом $F \in H^*(\mathbb{C}^n)$ принадлежит классу $H_{\mathbf{p}}(\mathbb{C}^n)$. Применяя интегральное представление (4.3) функционала F и определение 5.1, найдём:

$$\tilde{F}(\lambda) = \int_{|z_1|=r_g+\varepsilon} \dots \int_{|z_n|=r_g+\varepsilon} \mathcal{Y}_{\lambda}(z) g(z) dz_1 \dots dz_n, \quad \lambda \in \mathbb{C}^n,$$

где $g \in H_0(\{\infty\}^n)$ и $\varepsilon > 0$. Далее, в силу неравенства (3.8) из замечания 3.5, получим:

$$|\tilde{F}(\lambda)| \leq (2\pi(r_g + \varepsilon))^n \cdot C \exp(\alpha_1(r_g + \varepsilon)^{1/q_1} |\lambda_1|^{1/q_1} + \dots + \alpha_n(r_g + \varepsilon)^{1/q_n} |\lambda_n|^{1/q_n}) \cdot \max\{|g(z)| \mid |z_1| = \dots = |z_n| = r_g + \varepsilon\}, \quad \lambda \in \mathbb{C}^n,$$

при некоторых положительных C и $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Итак, верна оценка

$$|\tilde{F}(\lambda)| \leq M \cdot \exp(\beta_{q_1} |\lambda_1|^{1/q_1} + \dots + \beta_n |\lambda_n|^{1/q_n}), \quad \lambda \in \mathbb{C}^n,$$

где $M = (2\pi(r_g + \varepsilon))^n \cdot C \cdot \max\{|g(z)| \mid |z_1| = \dots = |z_n| = r_g + \varepsilon\}$ и $\beta_j = \alpha_j(r_g + \varepsilon)^{1/q_j}$ при каждом $j = \overline{1, n}$. Следовательно, $\tilde{F} = \Phi_{\mathbf{p}}(F) \in H_{\mathbf{p}}(\mathbb{C}^n)$.

2) Докажем теперь обратное включение $H_{\mathbf{p}}(\mathbb{C}^n) \subset \Phi_{\mathbf{p}}(H^*(\mathbb{C}^n))$, т.е. что любая функция $h \in H_{\mathbf{p}}(\mathbb{C}^n)$ принадлежит образу $\Phi_{\mathbf{p}}(H^*(\mathbb{C}^n))$. Согласно замечанию 5.1, для этого достаточно проверить, что у каждой функции $h \in H_{\mathbf{p}}(\mathbb{C}^n)$ коэффициенты её ряда Тейлора $h(\lambda) = \sum_{|\mathbf{k}| \geq 0} d_{\mathbf{k}} \lambda^{\mathbf{k}}$ для некоторых $D > 0$ и $r > 0$ при всех $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0$ подчиняются неравенству $|d_{k_1, \dots, k_n} \cdot P_{1, \mathbf{k}} \cdot \dots \cdot P_{n, \mathbf{k}}| \leq D \cdot r^{k_1 + \dots + k_n}$.

а) Сначала оценим произведение $|P_{1, \mathbf{k}} \cdot \dots \cdot P_{n, \mathbf{k}}|$. В силу замечания 3.1, для каждого $j = \overline{1, n}$ найдутся такие положительные числа Q_j и γ_j , что при всех $k_j \in \mathbb{N}$ выполняется

оценка $|P_{j,\mathbf{k}}| = |p_j(1) \cdot \dots \cdot p_j(k_j)| \leq Q_j \cdot \gamma_j^{k_j} \cdot k_j^{q_j k_j}$. Следовательно, $|P_{1,\mathbf{k}} \cdot \dots \cdot P_{n,\mathbf{k}}| \leq Q \cdot \gamma^{k_1 + \dots + k_n} \cdot k_1^{q_1 k_1} \cdot \dots \cdot k_n^{q_n k_n}$ где $Q = Q_1 \cdot \dots \cdot Q_n$, $\gamma = \max(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$.

б) Теперь оценим коэффициенты $d_{k_1, \dots, k_n}$ ряда Тейлора функции $h(\boldsymbol{\lambda})$. Так как она является целой, то при всех $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0$ и любых $R_1, \dots, R_n > 0$ верна формула

$$d_{k_1, \dots, k_n} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|z_1|=R_1} \dots \int_{|z_n|=R_n} \frac{h(\boldsymbol{\lambda})}{\lambda_1^{k_1+1} \cdot \dots \cdot \lambda_n^{k_n+1}} d\lambda_1 \dots d\lambda_n.$$

Отсюда, используя неравенство (5.4), получаем оценку

$$|d_{k_1, \dots, k_n}| \leq M \frac{\exp(\beta_1 R_1^{1/q_1} + \dots + \beta_n R_n^{1/q_n})}{R_1^{k_1} \cdot \dots \cdot R_n^{k_n}} \quad \text{при всех } k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0.$$

Положим $R_j = k_j^{q_j}$, $j = 1, \dots, n$. Тогда, обозначив $\beta = \exp(\max(\beta_1, \dots, \beta_n))$, получим:

$$|d_{k_1, \dots, k_n}| \leq M \exp(\beta_1 k_1 + \dots + \beta_n k_n) \cdot k_1^{-q_1 k_1} \cdot \dots \cdot k_n^{-q_n k_n} \leq M \beta^{k_1 + \dots + k_n} \cdot k_1^{-q_1 k_1} \cdot \dots \cdot k_n^{-q_n k_n}.$$

в) Умножив последнее неравенство на неравенство для $|P_{1,\mathbf{k}} \cdot \dots \cdot P_{n,\mathbf{k}}|$, полученное в пункте а), получим нужную оценку: $|d_{k_1, \dots, k_n} \cdot P_{1,\mathbf{k}} \cdot \dots \cdot P_{n,\mathbf{k}}| \leq D \cdot r^{k_1 + \dots + k_n}$, где $D = M \cdot Q$ и $r = \beta \cdot \gamma$.

Итак, включение $H_{\mathbf{p}}(\mathbb{C}^n) \subset \Phi_{\mathbf{p}}(H^*(\mathbb{C}^n))$ доказано. Значит, $\Phi_{\mathbf{p}}(H^*(\mathbb{C}^n)) = H_{\mathbf{p}}(\mathbb{C}^n)$.
Доказательство завершено.

6. Заключение

В настоящей работе предложен и детально исследован новый подход к обобщению классического преобразования Лапласа на случай функционалов над пространствами целых функций многих комплексных переменных. Ключевым элементом построения выступает специально выбранное ядро, это целая функция, естественным образом обобщающая экспоненту. Для этого ядра систематически вычислены порядки и типы по каждой переменной, что позволило дать точную характеристику его асимптотического поведения на бесконечности.

Важным результатом работы является доказательство изоморфизма между сопряжённым пространством к пространству целых функций с топологией компактной сходимости и пространством функций, аналитических по каждой переменной вне некоторого круга. На основе этого доказано, что введённое обобщённое преобразование Лапласа устанавливает изоморфизм между пространством непрерывных линейных функционалов и пространством целых функций с заданным порядком роста.

Полученные результаты расширяют инструментарий теории функций многих комплексных переменных и открывают новые перспективы для исследования функциональных пространств. Предложенный подход оказывается востребованным в ряде прикладных задач, в частности, в теории дифференциальных уравнений в обобщённых частных производных и в изучении многомерных аналогов пространств Фока. Дальнейшие исследования могут быть направлены на построение спектральной теории соответствующих операторов, изучение сверток в многомерных областях и приложение к задачам интерполяции и аппроксимации.

Благодарности. Автор благодарит О.Е. Галкина за плодотворные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Башмаков Р. А., Исаев К. П., Махота А. А. Ряды экспонент в нормированных пространствах аналитических функций // *Уфимский математический журнал*. 2021. Т. 13, № 3. С. 27–36.
2. Мусин И. Х. О преобразовании Фурье–Лапласа одного класса обобщенных функций // *Уфимский математический журнал*. 2020. Т. 12, № 4. С. 80–91.
3. Коробейник Ю. Ф., Мелихов С. Н. Реализация сопряженного пространства с помощью обобщенного преобразования Фурье–Бореля. Приложения // *Комплексный анализ и математическая физика*. Красноярск, 1988. С. 62–78.
4. Яремко О. Э., Яремко Н. Н. Обобщенное двойное преобразование Лапласа и его применения для решения уравнений в частных производных // *Прикладная математика и физика*. Т. 52, № 4. 2020. С. 239–245.
5. Иванов В. И. Ограниченный оператор сдвига для $(k, 1)$ -обобщенного преобразования Фурье // *Чебышевский сборник*. 2020. Т. 21, № 4 (76). С. 85–96. DOI: 10.22405/2226-8383-2018-21-4-85-96
6. Панюшкин С. В. Обобщенное преобразование Фурье и его применения // *Матем. заметки*. 2006. Т. 79, № 4. С. 581–596. DOI: 10.4213/mzm2728
7. Нижников А. И., Яремко О. Э., Яремко Н. Н. Обобщенное преобразование Лапласа на основе оператора дифференцирования с кусочно-постоянными коэффициентами // *Чебышевский сборник*. 2021. Т. 22. № 5. С. 172–184. DOI: 10.22405/2226-8383-2021-22-5-172-184
8. Дильмухаметова А. М., Напалков В. В. Операторы обобщенного дифференцирования с переменными коэффициентами // *Доклады Академии Наук*. 2009. Т. 424, № 5. С. 591–593.
9. Дильмухаметова А. М., Напалков В. В. Фундаментальный принцип Эйлера для одного класса дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами // *Доклады Академии Наук*. 2012. Т. 443, № 3. С. 293–295.
10. Дильмухаметова А. М., Напалков В. В., Муллабаева А. У. Обобщение пространства Фока // *Уфимский Математический Журнал*. 2010. Т. 2, № 1. С. 52–58.
11. Леонтьев А. Ф. Целые функции. Ряды экспонент. М.: Наука. 1983. 176 с.
12. Маергойз Л. С. К вопросу о связях между различными определениями порядков целых функций многих переменных // *Сибирский математический журнал*. 1966. Т. 7, № 6. С. 1268–1292.
13. Ронкин Л. И. Введение в теорию целых функций многих переменных. М.: Наука. 1971. 430 с.
14. Scheidemann V. Introduction to Complex Analysis in Several Variables. Cham: Birkhäuser. 2023. 229 p.

15. Köthe G. Dualität in der Funktionentheorie. *J. Reine Angew. Math.* 1953. Vol. 1953, no. 191. P. 30–39.
16. Хорьякова Ю. А., Шлапунов А. А. О двойственности гротендиковского типа для пространств голоморфных функций нескольких переменных // *Математический сборник*. 2024. Т. 215, № 8. С. 120–140. DOI: 10.4213/sm9956

*Поступила 18.07.2026; доработана после рецензирования 18.08.2026;
принята к публикации 25.08.2026*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. R. A. Bashmakov, K. P. Isaev, A. A. Makhota, “Exponential series in normed spaces of analytic functions”, *Ufa Mathematical Journal*, **13**:3 (2021), 27–35 (In Russ.). DOI: 10.13108/2021-13-3-27
2. I. Kh. Musin, “On the Fourier–Laplace transform of a class of generalized functions”, *Ufa Mathematical Journal*, **12**:4 (2020), 78–89 (In Russ.). DOI: 10.13108/2020-12-4-78
3. Yu. F. Korobeinik, S. N. Melikhov, *Complex Analysis and Mathematical Physics*, Krasnoyarsk, 1988 (In Russ.).
4. O. E. Yaremko, N. N. Yaremko, “Generalized double Laplace transform and its applications to solving partial differential equations”, *Applied Mathematics and Physics*, **52**:4 (2020), 239–245 (In Russ.).
5. V. I. Ivanov, “Bounded shift operator for $(k, 1)$ -generalized Fourier transform”, *Chebyshevskii Sbornik*, **21**:4 (76) (2020), 85–96 (In Russ.). DOI: 10.22405/2226-8383-2018-21-4-85-96
6. S. V. Panyushkin, “Generalized Fourier transform and its applications”, *Mathematical Notes*, **79**:4 (2006), 537–550 (In Russ.). DOI: 10.1007/s11006-006-0060-4
7. A. I. Nizhnikov, O. E. Yaremko, N. N. Yaremko, “Generalized Laplace transform based on the differentiation operator with piecewise constant coefficients”, *Chebyshevskii Sbornik*, **22**:5 (2021), 172–184 (In Russ.). DOI: 10.22405/2226-8383-2021-22-5-172-184
8. A. M. Dilmukhametova, V. V. Napalkov, “Operators of generalized differentiation with variable coefficients”, *Doklady Akademii Nauk*, **424**:5 (2009), 591–593 (In Russ.).
9. A. M. Dilmukhametova, V. V. Napalkov, “Euler’s fundamental principle for a class of partial differential equations with variable coefficients”, *Doklady Akademii Nauk*, **443**:3 (2012), 293–295 (In Russ.).
10. A. M. Dilmukhametova, V. V. Napalkov, A. U. Mullabaeva, “Generalization of the Fock space”, *Ufa Mathematical Journal*, **2**:1 (2010), 52–58 (In Russ.).

11. A. F. Leontiev, *Entire functions. Exponential series*, Nauka, Moscow, 1983 (In Russ.), 176 p.
12. L. S. Maergoiz, “On the relationship between different definitions of orders of entire functions of several variables”, *Siberian Mathematical Journal*, **7**:6 (1966), 1268–1292 (In Russ.).
13. L. I. Ronkin, *Introduction to the theory of entire functions of several variables*, Nauka, Moscow, 1971 (In Russ.), 430 p.
14. V. Scheidemann, *Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, Birkhäuser, Cham, 2023, 229 p.
15. G. Köthe, “Dualität in der Funktionentheorie”, *J. Reine Angew. Math.*, **1953**:191 (1953), 30–39.
16. Yu. A. Khoryakova, A. A. Shlapunov, “On Grothendieck-type duality for spaces of holomorphic functions of several variables”, *Sbornik: Mathematics*, **215**:8 (2024), 1114–1133. DOI: 10.4213/sm9956e

Submitted 18.07.2026; Revised 18.08.2026; Accepted 25.08.2026

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.