

МАТЕМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.28.202603.179-192

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.518

Об уравнениях Романовского с обобщенным частно-интегральным оператором в анизотропных пространствах Лебега

А. И. Иноземцев

ФГБОУ ВО «РГАУ-МСХА имени К. А. Тимирязева» (г. Москва, Российская Федерация)

Аннотация. Работа содержит достаточные условия существования и единственности решения уравнения Романовского с обобщенным частно-интегральным оператором в анизотропных пространствах Лебега. Полученное решение методом последовательных приближений представлено в виде операторного ряда Неймана. Указаны условия его сходимости. Приведены условия ограниченности частно-интегральных операторов, их итераций и оценки их норм в соответствующих анизотропных пространствах Лебега. Установлена формула итерированных ядер обобщенных частно-интегральных операторов Романовского и их связи с итерациями частно-интегральных операторов. Показана ограниченность нормы итерированного ядра в анизотропных пространствах Лебега и зависимость оценки его нормы от нормы ядра обобщенного частно-интегрального оператора Романовского. Указана необходимость рассмотрения обобщенных частно-интегральных операторов Романовского и их итерированных ядер в пространствах существенно ограниченных функций. Установлена формула резольвенты обобщенного частно-интегрального уравнения Романовского и ее принадлежность пространству существенно ограниченных по части переменных функций. Полученные условия существования и единственности решения уравнения с обобщенным частно-интегральным оператором Романовского в анизотропных пространствах Лебега применяются к исследованию линейных обобщенных частно-интегральных уравнений типа Романовского, к которым приводится задача n -связных цепей Маркова.

Ключевые слова: частно-интегральный оператор, оператор Романовского, уравнение типа Романовского, анизотропные пространства, итерации операторов, резольвента

Для цитирования: Иноземцев А. И. Об уравнениях Романовского с обобщенным частно-интегральным оператором в анизотропных пространствах Лебега // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2026. Т. 28, № 3. С. 179–192. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202603.179-192

Об авторах:

Иноземцев Алексей Иванович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «РГАУ-МСХА им. К. А. Тимирязева» (127434, Россия, г. Москва, ул. Тимирязевская, 49), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-7662-8991>, a.inozemcev@rgau-msha.ru



MSC2020 57N10

On Romanovsky equations with a generalized partial integral operator in anisotropic Lebesgue spaces

A. I. Inozemtsev*Russian State Agrarian University – Moscow Timiryazev Agricultural Academy
(Moscow, Russian Federation)*

Abstract. The paper contains sufficient conditions for existence and uniqueness of a solution to the Romanovsky equation with a generalized partial integral operator in anisotropic Lebesgue spaces. The solution obtained by the method of successive approximations is represented in the form of a Neumann operator series. Conditions for its convergence are indicated. Also conditions for boundedness of partial integral operators, their iterations, and estimates of their norms in the corresponding anisotropic Lebesgue spaces are presented. A formula is established for the iterated kernels of the generalized Romanovsky partial integral operators, and their relationships with the iterations of partial integral operators are obtained, too. For the norm of the iterated kernel, its boundedness is proven, and dependence of this norm on the norm of the kernel of the generalized Romanovsky partial integral operator is shown. The necessity of considering generalized Romanovsky partial integral operators and their iterated kernels in spaces of essentially bounded functions is indicated. A formula for the resolvent of the generalized Romanovsky partial integral equation and its belonging to the space of functions essentially bounded with respect to some of their variables is established. The obtained conditions for the existence and uniqueness of a solution to an equation with a generalized partial integral Romanovsky operator in anisotropic Lebesgue spaces are applied to the study of linear generalized partial integral equations of the Romanovsky type, to which the problem of n -connected Markov chains is reduced.

Keywords: partial integral operator, Romanovsky operator, Romanovsky-type equation, anisotropic spaces, operator iterations, resolvent

For citation: *A. I. Inozemtsev. On Romanovsky equations with a generalized partial integral operator in anisotropic Lebesgue spaces. Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva. 28:3(2026), 179–192. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202603.179-192*

About the authors:

Aleksey I. Inozemtsev, Ph.D. (Phys. and Math.), Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Russian State Agrarian University – Moscow Timiryazev Agricultural Academy (49, Timiryazevskay St., Moscow 127434, Russian Federation), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-7662-8991>, a.inozemcev@rgau-msha.ru

1. Введение

Выражения содержащие частные интегралы изучались еще в середине XX-го века. В работах профессора А.С. Калитвина и его учеников [1, 2] приведена подробная теория линейных операторов и уравнений с частными интегралами, содержащая их

свойства в некоторых функциональных пространствах. В работе [3] исследованы некоторые свойства многомерных частно-интегральных операторов и уравнений, условий их обратимости в пространстве непрерывных функций. Свойства многомерных операторов с частными интегралами и частно-интегральных уравнений Фредгольма второго рода, а также условия существования и единственности их решений в анизотропных пространствах Лебега содержатся в работах [4–6]. Критерии действия операторов типа Романовского с частными интегралами в пространстве непрерывных функций были получены в [7] в случае $\mathbb{R}^2$, в многомерном случае и при произвольной перестановке переменных функции u достаточные условия действия обобщенных и линейных обобщенных частно-интегральных операторов Романовского получены в работе [8]. В связи с тем, что явное решение таких уравнений удается найти лишь в редких случаях, используются различные приближенные методы. В работе [9] содержатся теоремы о разрешимости частно-интегральных уравнений Романовского, результаты о численных методах их решения.

В работе рассматривается уравнение Романовского

$$u(x) = \lambda(R_{\alpha\beta}u)(x) + f(x), \quad (1.1)$$

с обобщенным частно-интегральным оператором Романовского

$$(R_{\alpha\beta}u)(x) = (K_{\alpha}\Pi_{\beta}u)(x),$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, Π_{β} – оператор перестановки переменных функции $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, т.е. $(\Pi_{\beta}u)(x_1, x_2, \dots, x_n) = u(x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \dots, x_{\beta_n})$, а β – некоторая перестановка элементов множества $\{1, 2, \dots, n\}$, которую кратко будем обозначать в виде мультииндекса $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$,

$$(K_{\alpha}u)(x) = \int_{D_{\alpha}} k_{\alpha}(x; t_{\alpha}) u(x_{\bar{\alpha}}, t_{\alpha}) dt_{\alpha} \quad (1.2)$$

– многомерный частно-интегральный оператор, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ – мультииндекс, который отвечает за набор переменных интегрирования и принимает значения подмножеств множества $\{1, 2, \dots, n\}$, $\bar{\alpha} = (\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \dots, \alpha_n)$ – дополняющий мультииндекс такой, что $\alpha \cup \bar{\alpha} = \{1, 2, \dots, n\}$, $D_{\alpha} = (a_{\alpha_1}, b_{\alpha_1}) \times \dots \times (a_{\alpha_m}, b_{\alpha_m})$, $k_{\alpha}(x; t_{\alpha})$ – измеримые функции, интегралы понимаются в смысле Лебега.

К уравнению

$$\begin{aligned} \lambda u(x_1, x_2, \dots, x_n) = & \int_{[a,b]^m} \varphi(t_1, t_2, \dots, t_m, x_1, x_2, \dots, x_{n-m}, \mathbf{x}_{n-m+1}, \dots, \mathbf{x}_n) \cdot \\ & \cdot u(t_1, t_2, \dots, t_m, x_1, x_2, \dots, x_{n-m}) dt_1 dt_2 \dots dt_m, \end{aligned}$$

содержащему обобщенный оператор типа Романовского приводит задача n -связных цепей Маркова. Само уравнение называется обобщенным уравнением типа Романовского.

Задача двусвязных цепей Маркова была поставлена В.И. Романовским в работе [10], где приведено исследование уравнения

$$\lambda u(x, y) = \int_a^b \varphi(t, x, y) u(t, x) dt + f(x, y).$$

Заметим, что так как функция $u(t_1, t_2, \dots, t_m, x_1, x_2, \dots, x_{n-m})$ интегрируется лишь по части переменных, то оператор R – не интегральный и не компактный, а теория таких уравнений существенно отличается от теории интегральных уравнений Фредгольма.

2. Обобщенные частно-интегральные операторы типа Романовского в анизотропных пространствах Лебега

Определим оператор

$$\Pi_\beta u(x_1, x_2, \dots, x_n) = u(x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \dots, x_{\beta_n}), \quad (2.1)$$

где $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ – мультииндекс перестановки переменных функции u . Далее в работе используется k -кратный оператор перестановки функции u , т.е. $\Pi_\beta^k u = \Pi_\beta^{k-1}(\Pi_\beta u)$. Количество всех перестановок переменных функции $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ конечно и не превосходит $n!$.

Композицию многомерного частно-интегрального оператора (1.2) и (2.1) будем называть обобщенным частно-интегральным оператором типа Романовского: $R_{\alpha\beta} = K_\alpha \circ \Pi_\beta$, т.е.

$$(R_{\alpha\beta} u)(x) = (K_\alpha \Pi_\beta u)(x) = \int_{D_\alpha} k_{\alpha\beta}(x; t_\alpha) \Pi_\beta u(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha) dt_\alpha. \quad (2.2)$$

Пусть $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, $p_i \geq 1$, а $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ – сопряженный для $\mathbf{p}$ мультииндекс, такой что $\frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i} = 1$. Анизотропное пространство Лебега $L_{\mathbf{p}}(D)$ определяется нормой

$$\|f\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} = \left(\int_{a_n}^{b_n} \left(\dots \left(\int_{a_1}^{b_1} |f(t)|^{p_1} dt_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \dots \right)^{\frac{p_n}{p_{n-1}}} dt_n \right)^{\frac{1}{p_n}},$$

где $D = (a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)$ – параллелепипед в $\mathbb{R}^n$, $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$.

Исследования свойств операторов и уравнений с частными интегралами в анизотропных пространствах Лебега содержатся в работах [11, 12].

В работе [12] показана ограниченность норм функции $K_\alpha u$ в анизотропном пространстве Лебега $L_{\mathbf{p}}(D)$, причем из $k_\alpha \in L_{(\mathbf{q}_\alpha; \mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_{\bar{\alpha}} \mathbf{q}_{\bar{\alpha}})}(D_\alpha \times D) = L_{\mathbf{p}_{\bar{\alpha}} \mathbf{q}_{\bar{\alpha}}}(D_{\bar{\alpha}}; L_{(\mathbf{q}_\alpha, \mathbf{p}_\alpha)}(D_{\alpha, \alpha}))$, $u \in L_{(\mathbf{p}_\alpha; \mathbf{p}_{\bar{\alpha}}^2)}(D_\alpha \times D_{\bar{\alpha}}) = L_{\mathbf{p}_{\bar{\alpha}}^2}(D_{\bar{\alpha}}; L_{\mathbf{p}_\alpha}(D_\alpha))$ следует $K_\alpha u \in L_{\mathbf{p}}(D)$ и выполняется неравенство

$$\|K_\alpha u\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} \leq \|k_\alpha\|_{L_{\mathbf{p}_{\bar{\alpha}} \mathbf{q}_{\bar{\alpha}}}(D_{\bar{\alpha}}; L_{(\mathbf{q}_\alpha, \mathbf{p}_\alpha)}(D_{\alpha, \alpha}))} \|u\|_{L_{\mathbf{p}_{\bar{\alpha}}^2}(D_{\bar{\alpha}}; L_{\mathbf{p}_\alpha}(D_\alpha))}. \quad (2.3)$$

Обозначим через $U_m(D_\alpha \times D_{\bar{\alpha}})$ пространство определенных на $D_\alpha \times D_{\bar{\alpha}}$ функций, принадлежащих пространству $L_{(\mathbf{p}_\alpha; \mathbf{p}_{\bar{\alpha}}^2)}(D_\alpha \times D_{\bar{\alpha}})$, для которых существует и конечна норма $\|u\|_{U_m} = \max_k \left\{ \|\Pi_\beta^k u\|_{L_{(\mathbf{p}_\alpha; \mathbf{p}_{\bar{\alpha}}^2)}(D_\alpha \times D_{\bar{\alpha}})} \right\}$. Заметим, что при $n > m$, $L_{(\mathbf{p}_\alpha; \mathbf{p}_{\bar{\alpha}}^2)}(D_\alpha \times D_{\bar{\alpha}}) \subset L_{(\mathbf{p}_\alpha; \mathbf{p}_{\bar{\alpha}}^m)}(D_\alpha \times D_{\bar{\alpha}})$, а следовательно $U_n(D_\alpha \times D_{\bar{\alpha}}) \subset U_m(D_\alpha \times D_{\bar{\alpha}})$.

В работе [13] показано, что если $u(x) \in U_2(D_\alpha \times D_{\bar{\alpha}})$, а ядро $k_{\alpha\beta}(x; t_\alpha) \in L_{(\mathbf{q}_\alpha; \mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_{\bar{\alpha}} \mathbf{q}_{\bar{\alpha}})}(D_\alpha \times D)$, то из неравенства (2.3) следует непрерывность оператора $R_{\alpha\beta}$

из $U_2(D_\alpha \times D_{\bar{\alpha}})$ в $L_{\mathbf{p}}(D)$ причем существует такое число $A < \infty$, что выполняется неравенство

$$\|R_{\alpha\beta}u\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} \leq A\|k_{\alpha\beta}\|_{L_{(\mathbf{q}_\alpha; \mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_{\bar{\alpha}}\mathbf{q}_{\bar{\alpha}})}(D_\alpha \times D)}\|u\|_{U_2(D_\alpha \times D_{\bar{\alpha}})}. \quad (2.4)$$

3. Итерации оператора $R_{\alpha\beta}$ и его ядра $k_{\alpha\beta}$

Итерацией порядка r частного интеграла $R_{\alpha\beta}$ называется оператор $R_{\alpha\beta}^r$.

Связь параметров $(p_1, p_2, \dots, p_n) = \mathbf{p}$ анизотропного пространства Лебега $L_{\mathbf{p}}(D)$ со степенью r дается в следующей лемме.

Теорема 3.1. Пусть $\frac{1}{p_j} + \frac{1}{q_j} = 1$, $j = \overline{1, n}$ и r – произвольное натуральное число. Если

$$k_{\alpha\beta}(x; t_\alpha) \in L_{\mathbf{p}_{\bar{\alpha}}\mathbf{q}_{\bar{\alpha}}}^r(D_{\bar{\alpha}}; L_{(\mathbf{q}_\alpha, \mathbf{p}_\alpha)}(D_{\alpha, \alpha})), \quad f(x) \in U_{r+1}(D_\alpha \times D_{\bar{\alpha}}),$$

то

$$(R_{\alpha\beta}^r f)(x) \in L_{\mathbf{p}}(D),$$

причем существуют конечные числа $A_1, A_2, \dots, A_r$, что справедливо неравенство

$$\|R_{\alpha\beta}^r f\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} \leq \prod_{i=1}^r A_i \|\Pi_\beta^{i-1} k_{\alpha\beta}\|_{L_{\mathbf{p}_{\bar{\alpha}}\mathbf{q}_{\bar{\alpha}}}^i(D_{\bar{\alpha}}; L_{(\mathbf{q}_\alpha, \mathbf{p}_\alpha)}(D_{\alpha, \alpha}))} \|f\|_{U_{r+1}(D_\alpha \times D_{\bar{\alpha}})}. \quad (3.1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поочередно применяя неравенство (2.4) получим

$$\begin{aligned} \|R_{\alpha\beta}^r f\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} &\leq A_1 \|k_{\alpha\beta}\|_{L_{\mathbf{p}_{\bar{\alpha}}\mathbf{q}_{\bar{\alpha}}}^1(D_{\bar{\alpha}}; L_{(\mathbf{q}_\alpha, \mathbf{p}_\alpha)}(D_{\alpha, \alpha}))} \|R_{\alpha\beta}^{r-1} f\|_{U_2(D_\alpha \times D_{\bar{\alpha}})} \leq \\ &\leq A_1 \|k_{\alpha\beta}\|_{L_{\mathbf{p}_{\bar{\alpha}}\mathbf{q}_{\bar{\alpha}}}^1(D_{\bar{\alpha}}; L_{(\mathbf{q}_\alpha, \mathbf{p}_\alpha)}(D_{\alpha, \alpha}))} A_2 \|\Pi_\beta k_{\alpha\beta}\|_{L_{\mathbf{p}_{\bar{\alpha}}\mathbf{q}_{\bar{\alpha}}}^2(D_{\bar{\alpha}}; L_{(\mathbf{q}_\alpha, \mathbf{p}_\alpha)}(D_{\alpha, \alpha}))} \|R_{\alpha\beta}^{r-2} f\|_{U_3(D_\alpha \times D_{\bar{\alpha}})} \leq \\ &\leq \dots \leq \prod_{i=1}^r A_i \|\Pi_\beta^{i-1} k_{\alpha\beta}\|_{L_{\mathbf{p}_{\bar{\alpha}}\mathbf{q}_{\bar{\alpha}}}^i(D_{\bar{\alpha}}; L_{(\mathbf{q}_\alpha, \mathbf{p}_\alpha)}(D_{\alpha, \alpha}))} \|f\|_{U_{r+1}(D_\alpha \times D_{\bar{\alpha}})}. \end{aligned}$$

Тем самым, подтверждена справедливость неравенства (3.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

Ядро отвечающее оператору $R_{\alpha\beta}^j$ обозначим $k_{\alpha\beta}^{(j)}(x; t_\alpha)$ и определим последовательностью частно-интегральных операций

$$k_{\alpha\beta}^{(j)}(x; t_\alpha) = \int_{D_\alpha} k_{\alpha\beta}(x; \tau_\alpha) \Pi_\beta k_{\alpha\beta}^{(j-1)}(\tau_\alpha, x_{\bar{\alpha}}; t_\alpha) d\tau_\alpha,$$

с итерациями

$$k_{\alpha\beta}^{(1)}(x; t_\alpha) = k_{\alpha\beta}(x; t_\alpha),$$

$$\begin{aligned} k_{\alpha\beta}^{(j)}(x; t_\alpha) &= \int_{D_\alpha} \int_{D_\alpha} \dots \int_{D_\alpha} k_{\alpha\beta}(x; \mu_\alpha) \Pi_\beta k_{\alpha\beta}(\mu_\alpha, x_{\bar{\alpha}}; \nu_\alpha) \dots \Pi_\beta^{j-1} k_{\alpha\beta}(\tau_\alpha, x_{\bar{\alpha}}; t_\alpha) d\tau_\alpha \dots d\mu_\alpha = \\ &= \int_{D_\alpha} k_{\alpha\beta}(x; \tau_\alpha) \Pi_\beta k_{\alpha\beta}^{(j-1)}(\tau_\alpha, x_{\bar{\alpha}}; t_\alpha) d\tau_\alpha, \quad j = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Теорема 3.2. Для j -ой итерации оператора $R_{\alpha\beta}$ и j -итерированного ядра справедливо равенство

$$(R_{\alpha\beta}^j u)(x) = \int_{D_\alpha} k_{\alpha\beta}^{(j)}(x; t_\alpha) \Pi_\beta^j u(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha) dt_\alpha. \quad (3.2)$$

Доказательство. Применив теорему Фубини об изменении порядка интегрирования, имеем

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta}^j u(x) &= R_{\alpha\beta} \left(R_{\alpha\beta}^{(j-1)} u(x) \right) = \\ &= \int_{D_\alpha} k_{\alpha\beta}(x; \tau_\alpha) \Pi_\beta \left(\int_{D_\alpha} k_{\alpha\beta}^{(j-1)}(\tau_\alpha, x_{\bar{\alpha}}; t_\alpha) \Pi_\beta^{j-1} u(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha) dt_\alpha \right) d\tau_\alpha = \\ &= \int_{D_\alpha} \left(\int_{D_\alpha} k_{\alpha\beta}(x; \tau_\alpha) \Pi_\beta k_{\alpha\beta}^{(j-1)}(\tau_\alpha, x_{\bar{\alpha}}; t_\alpha) d\tau_\alpha \right) \Pi_\beta^j u(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha) dt_\alpha = \\ &= \int_{D_\alpha} k_{\alpha\beta}^{(j)}(x; t_\alpha) \Pi_\beta^j u(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha) dt_\alpha. \end{aligned}$$

Таким образом, j -кратная итерация обобщенного частно-интегрального оператора Романовского снова представляет собой оператор того же вида с ядром $k_{\alpha\beta}^{(j)}$.

Доказательство завершено.

Из Теоремы 3.2 и из равенства $\|\Pi_\beta^{j-1} u\|_{U_2(D_\alpha \times D_{\bar{\alpha}})} = \|u\|_{U_2(D_\alpha \times D_{\bar{\alpha}})}$ следует, что для итерации $R_{\alpha\beta}^j$, как и для любого обобщенного частно-интегрального оператора Романовского, справедливо неравенство (2.4), т.е.

$$\|R_{\alpha\beta}^j u\|_{L_{\mathbf{P}}(D)} \leq A \|k_{\alpha\beta}^{(j)}\|_{L_{\mathbf{P}\bar{\alpha}\mathbf{q}\bar{\alpha}}(D_{\bar{\alpha}}; L_{(\mathbf{q}_\alpha, \mathbf{p}_\alpha)}(D_{\alpha, \alpha}))} \|u\|_{U_2(D_\alpha \times D_{\bar{\alpha}})}. \quad (3.3)$$

Отсюда возникает интерес к норме j -итерированного ядра $k_{\alpha\beta}^{(j)}(x; t_\alpha)$ в пространстве $L_{\mathbf{P}\bar{\alpha}\mathbf{q}\bar{\alpha}}(D_{\bar{\alpha}}; L_{(\mathbf{q}_\alpha, \mathbf{p}_\alpha)}(D_{\alpha, \alpha}))$.

Теорема 3.3 (о норме j -итерированного ядра $k_{\alpha\beta}$). В пространстве $L_{\mathbf{P}\bar{\alpha}\mathbf{q}\bar{\alpha}}(D_{\bar{\alpha}}; L_{(\mathbf{q}_\alpha, \mathbf{p}_\alpha)}(D_{\alpha, \alpha}))$ норма итерированного ядра $k_{\alpha\beta}^{(j)}(x; t_\alpha)$ оператора $R_{\alpha\beta}^j$ удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} \|k_{\alpha\beta}^{(j)}\|_{L_{\mathbf{P}\bar{\alpha}\mathbf{q}\bar{\alpha}}(D_{\bar{\alpha}}; L_{(\mathbf{q}_\alpha, \mathbf{p}_\alpha)}(D_{\alpha, \alpha}))} &\leq \|k_{\alpha\beta}\|_{L_{\mathbf{P}\bar{\alpha}\mathbf{q}\bar{\alpha}}^1(D_{\bar{\alpha}}; L_{(\mathbf{q}_\alpha, \mathbf{p}_\alpha)}(D_{\alpha, \alpha}))} \times \\ &\times \prod_{i=1}^{j-1} \|\Pi_\beta^{j-1} k_{\alpha\beta}\|_{L_{\mathbf{P}\bar{\alpha}\mathbf{q}\bar{\alpha}}^1(D_{\bar{\alpha}}; L_{(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{q}_\alpha)}(D_{\alpha, \alpha}))}. \quad (3.4) \end{aligned}$$

Доказательство. Доказательство теоремы приведем для ядра частного интеграла $R_{(1;2,1)}$ при $n = 2$.

Левую часть неравенства (3.4) представим в виде нормы от интеграла от произведения итерированного и неитерированного ядер

$$\|k_1^{(j)}\|_{L_{p_2 q_2}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))} =$$

$$= \left\| \int_{D_1} k_1(x_1, x_2; \tau_{j-1}) \Pi_{\beta} k_1^{(j-1)}(\tau_{j-1}, x_2; t_1) d\tau_{j-1} \right\|_{L_{p_2 q_2}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))}.$$

По переменной τ_{j-1} воспользуемся неравенством Гельдера с показателями p_1 и q_1 . Имеем

$$\begin{aligned} \|k_1^{(j)}\|_{L_{p_2 q_2}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))} &\leq \left\| \left(\int_{D_1} |k_1(x_1, x_2; \tau_{j-1})|^{q_1} d\tau_{j-1} \right)^{\frac{1}{q_1}} \times \right. \\ &\times \left. \left(\int_{D_1} |\Pi_{\beta} k_1^{(j-1)}(\tau_{j-1}, x_2; t_1)|^{p_1} d\tau_{j-1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \right\|_{L_{p_2 q_2}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))} = \\ &= \left\{ \int_{D_2} \left[\int_{D_1} \left(\int_{D_1} |k_1(x_1, x_2; \tau_{j-1})|^{q_1} d\tau_{j-1} \right)^{\frac{q_1}{q_1}} \times \right. \right. \\ &\times \left. \left. \left(\int_{D_1} |\Pi_{\beta} k_1^{(j-1)}(\tau_{j-1}, x_2; t_1)|^{p_1} d\tau_{j-1} \right)^{\frac{q_1}{p_1}} dt_1 \right)^{\frac{p_1}{q_1}} dx_1 \right]^{\frac{p_2 q_2}{p_1}} dx_2 \right\}^{\frac{1}{p_2 q_2}}. \end{aligned}$$

Функция $\left(\int_{D_1} |k_1(x_1, x_2; \tau_{j-1})|^{q_1} d\tau_{j-1} \right)$ не зависит от переменной t_1 поэтому

$$\begin{aligned} \|k_1^{(j)}\|_{L_{p_2 q_2}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))} &\leq \left\{ \int_{D_2} \left[\int_{D_1} \left(\int_{D_1} |k_1(x_1, x_2; \tau_{j-1})|^{q_1} d\tau_{j-1} \right)^{\frac{p_1}{q_1}} \times \right. \right. \\ &\times \left. \left. \left(\int_{D_1} |\Pi_{\beta} k_1^{(j-1)}(\tau_{j-1}, x_2; t_1)|^{p_1} d\tau_{j-1} \right)^{\frac{q_1}{p_1}} dt_1 \right)^{\frac{p_1}{q_1}} dx_1 \right]^{\frac{p_2 q_2}{p_1}} dx_2 \right\}^{\frac{1}{p_2 q_2}}. \end{aligned}$$

Функция $\left(\int_{D_1} \left(\int_{D_1} |\Pi_{\beta} k_1^{(j-1)}(\tau_{j-1}, x_2; t_1)|^{p_1} d\tau_{j-1} \right)^{\frac{q_1}{p_1}} dt_1 \right)^{\frac{p_1}{q_1}}$ не зависит от x_1 , поэтому

$$\begin{aligned} \|k_1^{(j)}\|_{L_{p_2 q_2}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))} &\leq \left\{ \int_{D_2} \left[\int_{D_1} \left(\int_{D_1} |k_1(x_1, x_2; \tau_{j-1})|^{q_1} d\tau_{j-1} \right)^{\frac{p_1}{q_1}} dx_1 \right]^{\frac{p_2 q_2}{p_1}} \times \right. \\ &\times \left. \left[\int_{D_1} \left(\int_{D_1} |\Pi_{\beta} k_1^{(j-1)}(\tau_{j-1}, x_2; t_1)|^{p_1} d\tau_{j-1} \right)^{\frac{q_1}{p_1}} dt_1 \right]^{\frac{p_2 q_2}{q_1}} dx_2 \right\}^{\frac{1}{p_2 q_2}}. \end{aligned}$$

Еще раз воспользуемся неравенством Гельдера по переменной x_2 с показателями p_2 и q_2 , получим неравенство

$$\begin{aligned} \|k_1^{(j)}\|_{L_{p_2 q_2}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))} &\leq \left\{ \int_{D_2} \left[\int_{D_1} \left(\int_{D_1} |k_1(x_1, x_2; \tau_{j-1})|^{q_1} d\tau_{j-1} \right)^{\frac{p_1}{q_1}} dx_1 \right]^{\frac{p_2 q_2^2}{p_1}} dx_2 \right\}^{\frac{1}{p_2 q_2}} \times \\ &\times \left\{ \int_{D_2} \left[\int_{D_1} \left(\int_{D_1} |\Pi_{\beta} k_1^{(j-1)}(\tau_{j-1}, x_2; t_1)|^{p_1} d\tau_{j-1} \right)^{\frac{q_1}{p_1}} dx_1 \right]^{\frac{p_2^2 q_2}{q_1}} dx_2 \right\}^{\frac{1}{p_2^2 q_2}} = \end{aligned}$$

$$= \|k_1\|_{L_{p_2 q_2^2}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))} \|\Pi_\beta k_1^{(j-1)}\|_{L_{p_2^2 q_2}(D_2; L_{(p_1, q_1)}(D_{1,1}))}.$$

Т.е. норма j -итерированного ядра оценена через $(j-1)$ -итерированное ядро. Рассуждая аналогично, получим оценку нормы $(j-1)$ -итерированного ядра $k_1^{(j-1)}(x_1, x_2; \tau_{j-1})$ в пространстве $L_{p_2 q_2^2}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))$:

$$\|k_1^{(j-1)}\|_{L_{p_2 q_2^2}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))} \leq \|k_1\|_{L_{p_2 q_2^2}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))} \|\Pi_\beta k_1^{(j-2)}\|_{L_{p_2^2 q_2}(D_2; L_{(p_1, q_1)}(D_{1,1}))}.$$

Последнее действие в процессе доказательства теоремы – это получить оценку нормы дважды итерированного ядра $k_1^{(2)}(x_1, x_2; \tau_2)$ в пространстве $L_{p_2 q_2^{j-1}}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))$. Здесь применяем описанный выше подход, получим необходимое неравенство:

$$\|k_1^{(2)}\|_{L_{p_2 q_2^{j-1}}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))} \leq \|k_1\|_{L_{p_2 q_2^j}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))} \|\Pi_\beta k_1^{(1)}\|_{L_{p_2^2 q_2^{j-1}}(D_2; L_{(p_1, q_1)}(D_{1,1}))}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

Для решения обобщенного частно-интегрального уравнения Романовского методом последовательных приближений возникает необходимость в бесконечных итерациях. В полученных оценках норм оператора $R_{\alpha\beta}^j$ (3.3) и его ядер $k_{\alpha\beta}^{(j)}$ (3.4) при $j = 1, 2, \dots$ некоторые параметры анизотропных лебеговых классов функций очевидно стремятся к бесконечности при $j \rightarrow \infty$. Это приводит к необходимости рассмотрения нового класса $\mathcal{K}_\infty$ ядер $k_{\alpha\beta}$ обобщенного частно-интегрального оператора Романовского $R_{\alpha\beta}$, т.е. $k_{\alpha\beta}(x, t_\alpha) \in \mathcal{K}_\infty(D, D_\alpha)$, если существует и конечна норма $\|k_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{K}_\infty} = \max_j \left\{ \|k_{\alpha\beta}\|_{L_\infty(D_{\bar{\alpha}}; L_{(q_\alpha, p_\alpha)}(D_{\alpha, \alpha}))}; \|\Pi_\beta^j k_{\alpha\beta}\|_{L_\infty(D_{\bar{\alpha}}; L_{(p_\alpha, q_\alpha)}(D_{\alpha, \alpha}))} \right\}$.

Теорема 3.4. Если ядро $k_{\alpha\beta} \in \mathcal{K}_\infty$, то существует такое число $A_\alpha < \infty$ что

$$\|R_{\alpha\beta}^j u\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} \leq A_\alpha^j \|k_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{K}_\infty}^j \|u\|_{U_2}. \quad (3.5)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользовавшись неравенствами (3.3) и (3.4), получим

$$\begin{aligned} \|R_{\alpha\beta}^j u\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} &\leq \|k_{\alpha\beta}\|_{L_{\mathbf{p}_{\bar{\alpha}} q_{\bar{\alpha}}^j}(D_{\bar{\alpha}}; L_{(q_\alpha, p_\alpha)}(D_{\alpha, \alpha}))} \times \\ &\times \prod_{i=1}^{j-1} \|\Pi_\beta^{j-1} k_{\alpha\beta}\|_{L_{\mathbf{p}_{\bar{\alpha}}^2 q_{\bar{\alpha}}^i}(D_{\bar{\alpha}}; L_{(p_\alpha, q_\alpha)}(D_{\alpha, \alpha}))} \|u\|_{U_2(D_\alpha \times D_{\bar{\alpha}})}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Хорошо известно, что $L_p(D)$ вложено в $L_q(D)$ при $p > q$, если область D конечная. Это приводит к неравенствам

$$\|k_{\alpha\beta}\|_{L_{\mathbf{p}_{\bar{\alpha}} q_{\bar{\alpha}}^j}(D_{\bar{\alpha}}; L_{(q_\alpha, p_\alpha)}(D_{\alpha, \alpha}))} \leq A_\alpha \|k_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{K}_\infty},$$

$$\|k_{\alpha\beta}\|_{L_{\mathbf{p}_{\bar{\alpha}}^2 q_{\bar{\alpha}}^i}(D_{\bar{\alpha}}; L_{(p_\alpha, q_\alpha)}(D_{\alpha, \alpha}))} \leq A_\alpha \|k_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{K}_\infty},$$

где константа $A_\alpha < \infty$ зависит от области интегрирования. Из неравенства (3.6) следует неравенство (3.5).

Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

Заметим, что при выполнении условия $\lambda A_\alpha \|k_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{K}_\infty} < 1$ ряд $\sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \|k_{\alpha\beta}^{(j+1)}(x_{\bar{\alpha}})\|_{L_{(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{q}_\alpha)}(D_{\alpha, \alpha})}$ сходится абсолютно и равномерно к функции из $\mathcal{K}_\infty(D_{\bar{\alpha}})$. Тогда определяемая им функция

$$r_{\alpha\beta}(x; t_\alpha; \lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j k_{\alpha\beta}^{(j+1)}(x; t_\alpha) \in \mathcal{K}_\infty(D, D_\alpha) \quad (3.7)$$

называется резольвентой ядра $k_{\alpha\beta}(x; t_\alpha)$ обобщенного частно-интегрального оператора $R_{\alpha\beta}$. Эта же функция называется резольвентой обобщенного частно-интегрального уравнения Романовского (1.1).

4. Обобщенное частно-интегральное уравнение Романовского с частным интегралом $R_{\alpha\beta}$

Применяя классический метод последовательных приближений, решение уравнения (1.1) ищем в виде степенного ряда

$$\varphi(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi^{(j)}(x) \lambda^j. \quad (4.1)$$

Подставляем (4.1) в (1.1) получим равенство степенных рядов по λ . Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях λ , получим

$$\varphi^{(0)}(x) = f(x),$$

$$\varphi^{(j)}(x) = \int_{D_\alpha} k_{\alpha\beta}(x; t_\alpha) \Pi_\beta \varphi^{(j-1)}(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha) dt_\alpha, \quad (j = 1, 2, \dots).$$

Выражая $\varphi^{(j)}(x)$ через $f(x)$, имеем

$$\varphi^{(1)}(x) = \int_{D_\alpha} k_{\alpha\beta}(x; t_\alpha) \Pi_\beta f(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha) dt_\alpha = \int_{D_\alpha} k_{\alpha\beta}^{(1)}(x; t_\alpha) \Pi_\beta f(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha) dt_\alpha,$$

$$(j = 2, 3, \dots) \quad \varphi^{(j)}(x) = \int_{D_\alpha} k_{\alpha\beta}(x; \tau_\alpha) \Pi_\beta \left[\int_{D_\alpha} k_{\alpha\beta}^{(j-1)}(\tau_\alpha, x_{\bar{\alpha}}; t_\alpha) \Pi_\beta^{j-1} f(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha) dt_\alpha \right] d\tau_\alpha =$$

$$\int_{D_\alpha} \left[\int_{D_\alpha} k_{\alpha\beta}(x; \tau_\alpha) \Pi_\beta k_{\alpha\beta}^{(j-1)}(\tau_\alpha, x_{\bar{\alpha}}; t_\alpha) d\tau_\alpha \right] \Pi_\beta^j f(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha) dt_\alpha = \int_{D_\alpha} k_{\alpha\beta}^{(j)}(x; t_\alpha) \Pi_\beta^j f(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha) dt_\alpha.$$

Согласно формуле (3.2) имеем

$$\varphi^{(j)}(x) = (R_{\alpha\beta}^j f)(x) \quad (j = 0, 1, 2, \dots).$$

Таким образом, предполагаемое решение (4.1) примет вид следующего ряда Неймана

$$\varphi(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j (R_{\alpha\beta}^j f)(x). \quad (4.2)$$

Теорема 4.1. Пусть ядро $k_{\alpha\beta} \in \mathcal{K}_\infty$, $f \in U_\infty$ и пусть $|\lambda| A_\alpha \|k_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{K}_\infty} < 1$, тогда существует и единственное решение обобщенного частно-интегрального уравнения Романовского (1.1) в виде операторного ряда Неймана

$$\varphi(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j R_{\alpha\beta}^j f, \quad \text{причем} \quad \|\varphi\|_{L_{\mathbf{p}}} \leq \frac{\|f\|_{U_\infty}}{1 - |\lambda| A_\alpha \|k_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{K}_\infty}}.$$

Доказательство. Ряд (4.1) определяет функцию из пространства $L_{\mathbf{p}}(D)$, так как последовательность

$$\varphi^{(r)}(x) = \sum_{j=0}^r \lambda^j \left(R_{\alpha\beta}^j f \right)(x)$$

фундаментальная в этом пространстве. Действительно, пусть ℓ – произвольное натуральное число. Тогда

$$\|\varphi^{(r+\ell)} - \varphi^{(r)}\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} = \left\| \sum_{j=r+1}^{r+\ell} \lambda^j \left(R_{\alpha\beta}^j f \right)(x) \right\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} \leq \sum_{j=r+1}^{r+\ell} |\lambda|^j \left\| \left(R_{\alpha\beta}^j f \right)(x) \right\|_{L_{\mathbf{p}}(D)}.$$

Воспользуемся неравенством (3.6). В результате

$$\begin{aligned} \|\varphi^{(r+\ell)} - \varphi^{(r)}\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} &\leq \sum_{j=r+1}^{r+\ell} |\lambda|^j A_\alpha^j \|k_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{K}_\infty}^j \|f\|_{U_2} = \\ &= \|f\|_{U_2} (|\lambda| A_\alpha \|k_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{K}_\infty})^r \sum_{j=1}^{\ell} |\lambda|^j A_\alpha^j \|k_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{K}_\infty}^j \leq \\ &\leq \|f\|_{U_2} (|\lambda| A_\alpha \|k_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{K}_\infty})^r \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda|^j A_\alpha^j \|k_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{K}_\infty}^j. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|\varphi^{(r+\ell)} - \varphi^{(r)}\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} \leq \|f\|_{U_2} (|\lambda| A_\alpha \|k_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{K}_\infty})^r \frac{1}{1 - |\lambda| A_\alpha \|k_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{K}_\infty}}. \quad (4.3)$$

Поскольку $|\lambda| A_\alpha \|k_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{K}_\infty} < 1$, то величина $(|\lambda| A_\alpha \|k_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{K}_\infty})^r$ стремится к нулю с ростом r . Таким образом, последовательность $\varphi^{(r)}$ фундаментальная в анизотропном пространстве Лебега $L_{\mathbf{p}}(D)$. Итак, мы убедились в существовании функции $\varphi \in L_{\mathbf{p}}(D)$, определенной рядом (4.2) и, следовательно, (4.1). Покажем, что эта функция есть решение уравнения (1.1).

Введем оператор

$$\Phi_r f = \varphi^{(r)}(x) = \sum_{i=0}^r \lambda^i R_{\alpha\beta}^i f(x). \quad (4.4)$$

Положим $\Phi_\infty = \Phi$:

$$\Phi f(x) = \varphi(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j R_{\alpha\beta}^j f. \quad (4.5)$$

Из (4.4), (4.5) и (3.1) следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \|\Phi_r f - \Phi f\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \sum_{i=r+1}^{\infty} \lambda^i R_{\alpha\beta}^i f \right\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} = \lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \lambda^{r+1} R_{\alpha\beta}^{r+1} \sum_{i=0}^{\infty} R_{\alpha\beta}^i f \right\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} = \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \lambda^{r+1} R_{\alpha\beta}^{r+1} \varphi \right\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} \leq \lim_{r \rightarrow \infty} (|\lambda| A_{\alpha} \|k_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{K}_{\infty}})^{r+1} \|\varphi\|_{U_{r+2}} = 0. \end{aligned}$$

Здесь первый сомножитель стремится к нулю за счет выбора λ , а второй ограничен значением $\|\varphi\|_{U_{\infty}}$. Следовательно

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|\Phi_r f - \Phi f\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} = 0,$$

т.е. существует сильный предел функциональной последовательности $\Phi_r f$, который обозначим $s\text{-}\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi_r f = \Phi f$ при каждом фиксированном f . Тогда Φ – тоже ограниченный линейный оператор, отображающий U_{∞} в $L_{\mathbf{p}}$, причем

$$\|\Phi\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \|\Phi_r\|_{L_{\mathbf{p}}(D)}$$

и из равенства (4.4) следует

$$\|\Phi_r f\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} = \|\varphi^{(r)}\|_{L_{\mathbf{p}}} \leq \frac{\|f\|_{U_{\infty}}}{1 - |\lambda| A_{\alpha} \|k_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{K}_{\infty}}}.$$

Отсюда вытекает, что множество $\|\Phi_r\|_{L_{\mathbf{p}}(D)}$ ограничено.

Нетрудно проверить, что определенная нами функция (4.2) является решением уравнения (1.1). Действительно, подставляя $\varphi(x)$ в правую часть уравнения (1.1) получим левую часть этого уравнения:

$$\lambda R_{\alpha\beta} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j (R_{\alpha\beta}^j f)(x) \right) + f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^j (R_{\alpha\beta}^j f)(x) + f = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j (R_{\alpha\beta}^j f)(x) = \varphi(x).$$

Как мы уже показали

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|\Phi_r f\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} = \lim_{r \rightarrow \infty} \|\varphi^{(r)}\|_{L_{\mathbf{p}}} \leq \frac{\|f\|_{U_{\infty}}}{1 - |\lambda| A_{\alpha} \|k_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{K}_{\infty}}},$$

то есть множество $\|\Phi_r f\|_{L_{\mathbf{p}}(D)}$ ограничено, и существует предел

$$\varphi(x) = \lim_{r \rightarrow \infty} \Phi_r f(x) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^r \lambda^i R_{\alpha\beta}^i \right) f(x) = \Phi f(x).$$

Таким образом, получим ограниченность $\|\Phi\|$, причем из существования сильного предела $\Phi f(x)$ последовательности $\Phi_r f(x)$ имеем

$$\|\Phi\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \|\Phi_r\|_{L_{\mathbf{p}}(D)}$$

и существует обращающий оператор $\Phi = \lim_{r \rightarrow \infty} \Phi_r$, отображающий U_{∞} в $L_{\mathbf{p}}(D)$.

Функция

$$\varphi = \lim_{r \rightarrow \infty} \varphi^{(r)} = \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^r \lambda^j R_{\alpha\beta}^j f = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j R_{\alpha\beta}^j f$$

является решением уравнения (1.1) в пространстве $L_{\mathbf{p}}(D)$, которое можно представить в виде

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{D_{\alpha}} r_{\alpha\beta}(x; t_{\alpha}; \lambda) \Pi_{\beta} f(x_{\bar{\alpha}}, t_{\alpha}) dt_{\alpha},$$

где $r(x; t_{\alpha}; \lambda)$ – резольвента (3.7) ядра $k_{\alpha\beta}$ оператора $R_{\alpha\beta}$.

Полученное решение единственно, поскольку решение однородного уравнения равно нулю.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

5. Заключение

Представленный результат исследования достаточных условий существования и единственности решения уравнения Романовского в анизотропных пространствах Лебега обобщает ранее полученные результаты в пространствах непрерывных функций двух переменных. Полученное решение представлено в виде операторного ряда Неймана и указаны условия его сходимости. Построены итерации частно-интегральных операторов Романовского и их ядер. Приведены условия их ограниченности и оценки норм. Показана необходимость исследования таких уравнений в пространстве существенно ограниченных функций. Приведенные условия могут применяться для решения задачи n -связных цепей Маркова, которая сводится к исследованию частно-интегральных уравнений типа Романовского. Проведенное исследование данного класса уравнений создает предпосылки для исследования линейного частно-интегрального уравнения Романовского, включающего в себя сумму частно-интегральных операторов Романовского, функции в которых интегрируются по различным наборам переменных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Appell J. M., Kalitvin A. S., Zabrejko P. P. Partial Integral Operators and Integro - Differential Equations. New York-Basel: Marcel Dekker, 2000.
2. Kalitvin A. S., Kalitvin V. A. Linear Operators and Equations with Partial Integrals. *Journal Of Mathematical Sciences*. 2022. Vol. 265, no. 2. P. 196–235. DOI: 10.1007/s10958-022-06052-y
3. Kalitvin A. S., Inozemtsev A. I., Kalitvin V. A. About integral equations with multidimensional partial integrals. *Journal Of Mathematical Sciences*. 2020. Vol. 249, no. 6. P. 954–966. DOI: 10.1007/s10958-020-04987-8
4. Lyakhov L. N., Inozemtsev A. I., Trusova N. I. About Fredgholm equations for partial integral in $\mathbb{R}_2$. *Journal of Mathematical Sciences*. 2020. Vol. 251. № 6. P. 839–849. DOI: 10.1007/s10958-020-05132-1

5. Lyakhov L. N., Inozemtsev A. I. Fredholm Equations with Multi-Dimensional Partial Integrals in Anisotropic Lebesgue Spaces. *Journal Of Mathematical Sciences*. 2021. Vol. 255, no. 6. P. 715–725. DOI: 10.1007/s10958-021-05408-0
6. Inozemtsev A. I., Barysheva I. V. Linear Fredholm and Volterra Partial Integral Equations in Anisotropic Lebesgue Spaces. *Journal Of Mathematical Sciences*. 2023. Vol. 270, no. 4. P. 556–561. DOI: 10.1007/s10958-023-06366-5
7. Калитвин А. С. Интегральные уравнения типа Романовского с частными интегралами. Липецк: ЛГПУ, 2007. 191 с.
8. Иноземцев А.И. Об обобщенных операторах Романовского с частными интегралами в пространстве непрерывных функций // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2025. Т. 27, № 3. С. 315–324. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202503.315-324
9. Kalitvin A. S., Kalitvin V. A. The Approximate and Numerical Solution of Romanovskij Linear Partial Integral Equations. *Journal Of Applied Engineering Science*. 2018. Vol. 16, № 3. P. 441–446. DOI: 10.5937/jaes16-18433
10. Romanovskij, V. Sur une classe d'équations intégrales linéaires. *Acta Math*. 1932. Vol. 59. P. 99–208. DOI: 10.1007/BF02546501.
11. Lyakhov L. N., Inozemtsev A. I. Partial integrals in anisotropic Lebesgue Spaces. I: Two Dimentional Case. *Journal Of Mathematical Sciences*. 2020. Vol. 247, no. 6. P. 888–892. DOI: 10.1007/s10958-020-04844-8
12. Lyakhov L. N., Inozemtsev A. I. Partial integrals in anisotropic Lebesgue Spaces. II: Multidimensional Case. *Journal Of Mathematical Sciences*. 2020. Vol. 247, no. 6. P. 893–899. DOI: 10.1007/s10958-020-04845-7
13. Иноземцев А. И. Об обобщенных частно-интегральных операторах Романовского в анизотропных пространствах Лебега // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2026. № 100. С. 19–27. DOI: 10.17223/19988621/100/2

Поступила 27.04.2026; доработана после рецензирования 10.08.2026;
принята к публикации 25.08.2026

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. J. M. Appell, A. S. Kalitvin, P. P. Zabrejko, *Partial Integral Operators and Integro - Differential Equations*, 2020, 560 p.
2. A. S. Kalitvin, V. A. Kalitvin, “Linear Operators and Equations with Partial Integrals”, *Journal Of Mathematical Sciences*, **265**:2 (2022), 196–235.

3. A. S. Kalitvin, A. I. Inozemtsev, V. A. Kalitvin, “About integral equations with multi-dimensional partial integrals”, *Journal Of Mathematical Sciences*, **249**:6 (2020), 954–966.
4. L. N. Lyakhov, A. I. Inozemtsev, N. I. Trusova, “About Fredgholm equations for partial integral in $\mathbb{R}_2$ ”, *Journal Of Mathematical Sciences*, **251**:6 (2020), 839–849.
5. L. N. Lyakhov, A. I. Inozemtsev, “Fredholm Equations with Multi-Dimensional Partial Integrals in Anisotropic Lebesgue Spaces”, *Journal Of Mathematical Sciences*, **255**:6 (2021), 715–725.
6. A. I. Inozemtsev, I. V. Barysheva, “Linear Fredholm and Volterra Partial Integral Equations in Anisotropic Lebesgue Spaces”, *Journal Of Mathematical Sciences*, **270**:4 (2023), 556–561.
7. A. S. Kalitvin, *Integralnye uravneniya tipa Romanovskogo s chastnymi integralami [Romanovsky integral equations with partial integrals]*, 2007 (In Russ.), 191 p.
8. A. I. Inozemtsev, “On generalized Romanovsky operators with partial integrals in the space of continuous functions”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **27**:3 (2025), 315–324 (In Russ.). DOI: 10.15507/2079-6900.27.202503.315-324
9. A. S. Kalitvin, V. A. Kalitvin, “The Approximate and Numerical Solution of Romanovskij Linear Partial Integral Equations”, *Journal Of Applied Engineering Science*, **16**:3 (2018), 441–446.
10. V. Romanovskij, “Sur une classe d’équations intégrales linéaires”, *Acta Math*, **59** (1932), 99–208 (In Fr.). DOI: 10.1007/BF02546501
11. L. N. Lyakhov, A. I. Inozemtsev, “Partial integrals in anisotropic Lebesgue Spaces. I: Two dimensional Case”, *Journal Of Mathematical Sciences*, **247**:6 (2020), 888–892.
12. L. N. Lyakhov, A. I. Inozemtsev, “Partial integrals in anisotropic Lebesgue Spaces. II: Multidimensional Case”, *Journal Of Mathematical Sciences*, **247**:6 (2020), 893–899.
13. A. I. Inozemtsev, “On generalized Romanovsky partial integral operators in anisotropic Lebesgye spaces”, *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, **100** (2026), 19–27 (In Russ.). DOI: 10.17223/19988621/100/2

Submitted 27.04.2026; Revised 10.08.2026; Accepted 25.08.2026

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.