Математика

DOI 10.15507/2079-6900.28.202602.11-27
Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.968

Нетеровость и вычисление индекса двумерных сингулярных интегральных операторов в ограниченной области

Д. М. Одинабеков

Филиал Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе

Аннотация. Работа посвящена исследованию двумерных сингулярных интегральных операторов с непрерывными коэффициентами, заданных на ограниченных областях комплексной плоскости и имеющих важное значение для решения широкого круга задач математической физики, теории краевых задач и функционального анализа. Актуальность исследования обусловлена необходимостью разработки эффективных методов анализа свойств таких операторов, включая вопросы их разрешимости и получения формул для вычисления их индексов. Основы общей теории многомерных сингулярных интегральных операторов на неограниченных областях были заложены в работах С.Г. Михлина. Для двумерных операторов с ненулевым символом существенную роль играет аппарат теории Фредгольма. В случае, когда сингулярные интегральные операторы рассматриваются на ограниченных областях, разрешимость возникающих уравнений существенно зависит от геометрических и аналитических характеристик границы области. Поэтому в данной работе исследуются двумерные сингулярные интегральные операторы, заданные на ограниченных областях. Для изучения рассматриваемого класса операторов используется схема исследования, предложенная Р. Дудучавой, позволяющая свести исходную задачу к анализу соответствующей краевой задачи Римана. При исследовании полученной задачи Римана применяется метод Б. Боярского, основанный на построении специальной матричной функции и разбиении множества полиномиальных матриц на гомотопические классы. Такой подход обеспечивает возможность детального изучения структуры операторов и их спектральных характеристик. В работе для рассматриваемого класса операторов в пространствах Лебега установлены эффективные критерии нетеровости, выраженные через явные условия на коэффициенты операторов. Кроме того, получены формулы для вычисления индексов, что позволяет определять основные фредгольмовы свойства операторов и исследовать условия существования и единственности решений соответствующих интегральных уравнений.

Ключевые слова: сингулярный интегральный оператор, индекс оператора, символ оператора, нетеровость оператора

Для цитирования: Одинабеков Д. М. Нетеровость и вычисление индекса двумерных сингулярных интегральных операторов в ограниченной области // *Журнал Средневолжского математического общества.* 2026. Т. 28, № 2. С. 11–27. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202602.11-27

Об авторе:
Одинабеков Джасур Музофирович, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой математики и естественных наук филиала МГУ им. М.В. Ломоносова в городе Душанбе (734003, Таджикистан, Душанбе, ул. Бохтар, 35/1), ORCID: http://orcid.org/0000-0003-3002-281X, jasur_79@inbox.ru

Original article

MSC2020 57N10

Noethericity and computation of the index of two-dimensional singular integral operators in a bounded domain

J. M. Odinabekov

Lomonosov Moscow State University in Dushanbe (Dushanbe, Tajikistan)

Abstract. This work is devoted to study of two-dimensional singular integral operators with continuous coefficients defined on bounded domains of the complex plane. Such operators play an important role in solving a wide range of problems in mathematical physics, boundary value theory, and functional analysis. The relevance of the research is determined by need to develop effective methods for analyzing the properties of these operators, including questions of their solvability and the derivation of formulas for calculating their indices. The fundamentals of the general theory of multidimensional singular integral operators on unbounded domains were established in the works of S. G. Mikhlin. For two-dimensional operators with a non–zero symbol, the Fredholm theory plays a crucial role. When singular integral operators are considered on bounded domains, the solvability of the corresponding equations depends essentially on the geometric and analytic properties of the boundary. That's why this work investigates two-dimensional singular integral operators defined on bounded domains. To study this class of operators, the scheme proposed by R. Duduchava is used, which reduces the original problem to the analysis of an associated Riemann boundary value problem. The resulting Riemann problem is studied using the method developed by B. Bojarski. This approach is based on the construction of a special matrix function and on the splitting of set of polynomial matrices into homotopy classes. This approach makes it possible to investigate in detail the structure of the operators and their spectral characteristics. For the class of operators considered in Lebesgue spaces, effective criteria for their noethericity are established in the form of explicit conditions imposed on the operator coefficients. In addition, computational formulas for indices are obtained, making it possible to determine the main Fredholm properties of the operators and to investigate the conditions for existence and uniqueness of solutions to the corresponding integral equations.

Keywords: singular integral operator, operator index, operator symbol, Noethericity of operator

For citation: *J. M. Odinabekov.* Noethericity and computation of the index of two-dimensional singular integral operators in a bounded domain. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 28:2(2026), 11–27. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202602.11-27

About the author:
Jasur M. Odinabekov, Ph.D. (Phys. and Math.), Head of Department of Mathematics and Natural Sciences, Lomonosov Moscow State University in Dushanbe (Tajikistan, Dushanbe, st. Bokhtar, 35/1), ORCID: http://orcid.org/0000-0003-3002-281X, jasur_79@inbox.ru

1. Введение

Формирование теории сингулярных интегральных уравнений происходило параллельно становлению фредгольмовской теории и связано с классическими работами Д. Гильберта [1] и А. Пуанкаре [2]. Однако на последующих этапах развитие данного направления носило фрагментарный характер и лишь в 1920-е годы получило существенный импульс.

Существенный вклад в этот период был внесён Ф. Нетером [3] и Т. Карлеманом [4]. Ф. Нетером были исследованы сингулярные интегральные уравнения с одной независимой переменной, в которых интегрирование осуществляется по замкнутому контуру. Для таких уравнений установлены результаты, близкие по своей структуре к теоремам Фредгольма, однако обладающие рядом принципиальных отличий. В частности, показано, что в общем случае размерности пространств решений сопряжённых однородных уравнений могут не совпадать, а также предложен эффективный способ вычисления разности этих размерностей. Работы Т. Карлемана посвящены анализу уравнений с интегралом по незамкнутой кривой. Используя редукцию к краевой задаче Римана (или, в терминологии Н. И. Мусхелишвили, к задаче Гильберта), Карлеман показал возможность сведения рассматриваемого сингулярного уравнения к эквивалентному уравнению Фредгольма. Несмотря на то, что им был рассмотрен частный случай, предложенный метод оказался применимым после соответствующих модификаций к существенно более широкому классу задач. В работах Ж. Жиро [5] представлено обобщение фредгольмовских результатов на системы сингулярных интегральных уравнений с одной независимой переменной, что послужило существенным вкладом в развитие тематики. Дальнейшее развитие связано с работами С. Г. Михлина, в которых была доказана теорема эквивалентности [6]. Начиная с 1940-х годов значительный вклад в теорию сингулярных интегральных уравнений внесли Н. И. Мусхелишвили и его ученики, последовательно применявшие карлемановский подход сведения сингулярных уравнений к задачам Римана. Основные результаты этих исследований систематически изложены в монографии [7]. Сингулярные интегральные уравнения с несколькими независимыми переменными рассматривались в работах Ф. Трикоми [8], Ж. Жиро [9], С. Г. Михлина [10]. Ф. Трикоми получил формулу перестановки двойных сингулярных интегралов и исследовал отдельные классы уравнений, содержащих такие операторы. Ж. Жиро установил, что многомерный сингулярный интеграл сохраняет липшицев класс функций. С. Г. Михлиным доказано, что соответствующий сингулярный оператор является ограниченным в гильбертовом пространстве квадратично суммируемых функций и допускает разложение в ряд по степеням унитарных операторов. Сингулярные интегральные уравнения и их комбинации естественным образом возникают в различных разделах математического анализа. В их число входят квазиконформные отображения, описанные Л. Альфорсом [12] и М. Шиффером [13], разделы теории дифференциальных уравнений с частными производными, приведенные в статьях Б. Боярского [14], А. Д. Джураева [15], В. Н. Монахова [16], обобщённые аналитические функции, теория которых представлена в работах И. Н. Векуа [11].

Отдельный интерес представляют простейшие двумерные сингулярные интегральные уравнения вида

$$(Af)(z) = a(z)f(z) + b(z)(S\overline{f})(z) = g(z), \quad (Sf)(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{D} \frac{f(\zeta)ds_\zeta}{(\zeta - z)^2}. \tag{1.1}$$

Исследование уравнений вида (1.1) начато работой И.Н. Векуа [11]. В ней установлено, что при условии $|a(z)| > |b(z)|$, $z \in \overline{D}$, уравнение (1.1) однозначно разрешимо в $L^p(D)$ при близких к двум значениях p. В доказательстве использован принцип сжатых отображений. Дальнейший анализ проведен А. Д. Джураевым [15]. Им показана достаточность условий $|a(z)| \neq |b(z)|$, $z \in \overline{D}$, $a(t) \neq 0$ на границе Γ области D для нетеровости уравнения (1.1) в $L^p(2)$, $p > 2$ при гладкости коэффициентов. Индекс данного оператора при этом равен удвоенному индексу функции $a(t)$, $t \in \Gamma$. Анализ выполнен с использованием редукции краевой задачи сопряжения для обобщённых аналитических функций. Среди первых работ, посвященных данным уравнениям также можно выделить статью Н.Н. Комяка [17]. Для широкого класса интегральных уравнений это проделано в работах Г. Джангибекова и К.Х. Бойматова [18–22] . Развитие этих исследований продолжено в рамках L_p-теории для $1 < p < \infty$, многомерных сингулярных интегральных уравнений на многообразиях с краем, разработанной Р. В. Дудучавой [23]. Данный подход позволяет свести анализ нетеровых свойств уравнений к вопросам факторизации соответствующих рациональных матричных функций и определению их частных индексов в случае, если уравнения содержат различные комбинации сингулярных операторов.

Таким образом, актуальной является задача установления критерия нетеровости двумерных сингулярных уравнений как явных условий относительно их коэффициентов.

В настоящей работе исследуется двумерный сингулярный интегральный оператор с непрерывными коэффициентами, действующий в пространстве $\mathbf{L}^{\mathbf{p}}_{\beta-\mathbf{2/p}}(\mathbf{D})$. Ранее опубликованные работы были посвящены изучению соответствующих объектов в данном пространстве, где были установлены и подробно исследованы их основные свойства. Раздел 2 настоящей работы, носящий вспомогательный характер, содержит необходимые определения и формулировки основных результатов со ссылкой на исходную публикацию. Это сделано с целью обеспечения целостности изложения и исключения необходимости обращения читателя к дополнительным источникам. Следует отметить, что в работе [25] сумма в рассматриваемом операторе содержит слагаемые с индексами от 1 до 2, вследствие чего соответствующая задача Римана сводится к исследованию многочлена второй степени, что приводит лишь к двум возможным случаям. В отличие от этого, в настоящей работе анализируется принципиально иной оператор, в котором суммирование осуществляется по индексам от –3 до 3. Это приводит к задаче Римана, связанной с многочленом шестой степени, и, как следствие, к априорному возникновению семи различных случаев, каждый из которых требует самостоятельного рассмотрения. Лемма, доказанная в работе [25], сохраняет свою силу и для оператора, рассматриваемого в настоящем исследовании. Однако структура соответствующих характеристических многочленов существенно усложняется. В частности, если в работе [25] многочлены $P(z,t)$ и $Q(z,t)$ имели по два корня, то в настоящей работе число корней каждого из них равно шести. Вследствие этого полученные результаты принципиально отличаются от ранее установленных, несмотря на сохранение общей методологической схемы доказательства.

2. Понятийный аппарат и система обозначений

Введем обозначения. X – банахово пространство, $A: X \to X$ – действующий в нём ограниченный линейный оператор. Пусть A^* – сопряжённый к A оператор, определенный на двойственном пространстве X^*. Рассмотрим множество всех элементов $x \in X$, для которых выполняется

$$Ax = 0. \qquad (2.1)$$

Множество X будет ядром оператора A. Обозначим его $KerA$. Заметим, что ядро является подпространством множества X. Количество линейно независимых решений уравнения (2.1), будем обозначать $\alpha_A = dim\, KerA$. Это является размерностью подпространства $KerA$. Аналогично можно определить ядро сопряжённого оператора A^*. Оно состоит из всех функционалов $f \in X^*$, удовлетворяющих

$$A^* f = 0. \qquad (2.2)$$

Обозначим подпространство функционалов $f \in X^*$, обладающих свойством (2.2) как $KerA^*$, его размерность в этом случае равна $\beta_A = \alpha_{A^*} = KerA^*$. Числа α_A, β_A будем называть дефектными числами оператора A. Если хотя бы одно из дефектных чисел конечно, то индекс оператора A определяет их разность

$$Ind\, A = \alpha_A - \beta_A. \qquad (2.3)$$

Очевидно, что $Ind\, A$ конечен тогда и только тогда, когда обе размерности α_A и β_A конечны.

Для того чтобы уравнение

$$Ax = y, \quad y \in X, \qquad (2.4)$$

имело хотя бы одно решение, необходимо, чтобы свободный член y был ортогонален к $KerA^*$ (иначе говоря, чтобы элемент y аннулировался любым функционалом $u` \in\ KerA^*$). Действительно, если уравнение (2.4) имеет решение x, а $u \in KerA^*$, то

$$(y, u) = (Ax, u) = (x, A^* u) = (x, 0) = 0. \qquad (2.5)$$

Здесь круглыми скобками обозначено значение функционала на соответствующем элементе. Вышеизложенное означает, что оператор A – нормально разрешим, если условие ортогональности (2.5) достаточно для разрешимости уравнения (2.4). Таким образом, можно записать следующие предложения.

Предложение 2.1. *Оператор A называется нормально разрешимым в смысле Хаусдорфа, если неоднородное уравнение* (2.4) *разрешимо тогда и только тогда, когда его правая часть y ортогональна всем решениям сопряженного однородного уравнения* (2.2).

Предложение 2.2. *Оператор A называется нетеровым в X, если он нормально разрешим и числа α_A, β_A конечны.*

Предложение 2.3. *Индексом нетерова оператора A называется целое число* $IndA = \alpha_A - \beta_A$.

Предложение 2.4. *Нетеров оператор, индекс которого равен нулю, называется фредгольмовым.*

Введем следующие обозначения: D – конечная односвязная область комплексной плоскости, ограниченная простой замкнутой кривой Ляпунова Γ и содержащая внутри точку $z = 0$.

Предложение 2.5. *Множество комплекснозначных функций $f(z)$, измеримых на D, для которых функция $F(z)=|z|^{\beta-2/p}f(z)$ суммируема в p-й степени, где $1<p<\infty$, $0<\beta<2$, называется пространством* $\mathbf{L}^{\mathbf{p}}_{\beta-\mathbf{2/p}}(\mathbf{D})$.

Введем норму в $L^p_{\beta-2/p}(D)$ следующим образом

$$||f(z)||_{L^p_{\beta-2/p}}=\left(\iint\limits_D |F(z)|^p ds_z\right)^{1/p}=||F||_{L^p}.$$

Пространство $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}$ изометрично L^p, а потому является банаховым пространством.

Положим

$$f_k(r)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(z)e^{-ik\varphi}d\varphi,\ \ k=0,\pm1,\pm2,....,$$

где $z=re^{i\varphi}$.

Будем говорить, что функция $f(z)$ принадлежит пространству $\tilde{\mathrm{L}}^p_{\beta-\frac{2}{p}}$, если функция

$$F(z)=|z|^{\beta-\frac{2}{p}}f(z)\in L^p.$$

Иными словами $f(z)\in\tilde{\mathrm{L}}^p_{\beta-\frac{2}{p}}$, если $f(z)\in L^p_{\beta-\frac{2}{p}}$ и норма в этом пространстве вводится следующим образом:

$$||f||=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_0^1 r|F_k(r)|^p dr\right)^{1/p}.$$

Очевидно, что все аксиомы нормы выполняются.

Лемма 2.1. *Пространство $\tilde{L}^p_{\beta-\frac{2}{p}}$ является полным, т.е. банаховым.*

Доказательство. Пусть $|z|\le 1$ и $\{f^{(m)}(z)\}$ – фундаментальная последовательность функций из $\tilde{\mathrm{L}}^p_{\beta-\frac{2}{p}}$, т.е. для любого $\varepsilon>0$ существует такой номер N, что

$$||f^{(m)}(z)-f^{(n)}(z)||=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_0^1 r|F_k^{(m)}(r)-F_k^{(n)}(r)|^p dr\right)^{1/p}<\varepsilon,$$

как только $m,n>N$. Покажем, что для любого фиксированного k последовательность $\{f_k^{(m)}(r)\}$ сходится по норме $L^p_{\beta-\frac{1}{p}}$ на отрезке [0,1]. В самом деле, для любого $\varepsilon>0$

$$||f_k^{(m)}(r)-f_k^{(n)}(r)||_{L^p_{\beta-\frac{1}{p}}(0,1)}=\left(\int\limits_0^1 r|F_k^{(m)}(r)-F_k^{(n)}(r)|^p dr\right)^{1/p}\le$$

$$\le\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_0^1 r|F_k^{(m)}(r)-F_k^{(n)}(r)|^p dr\right)^{1/p}<\varepsilon$$

как только $m, n > N$, т.е. последовательность $\{f_k^{(m)}(r)\} \in L^p_{\beta-\frac{1}{p}}(0,1)$ является фундаментальной последовательностью. Поскольку пространство $L^p_{\beta-\frac{1}{p}}(0,1)$ полно, то $\{f_k^{(m)}(r)\} \to f_k(r)$ в $L^p_{\beta-\frac{1}{p}}(0,1)$.

Покажем, что функция

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k(r) e^{ik\varphi}, \quad z = re^{i\varphi},$$

принадлежит пространству $\tilde{\mathrm{L}}^p_{\beta-\frac{2}{p}}$. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что как только $n, m \geq N$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\int_0^1 r |F_k^{(m)}(r)|^p dr \right)^{1/p} \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\int_0^1 r |F_k^{(m)}(r) - F_k^{(n)}(r)|^p dr \right)^{1/p} +$$

$$+ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\int_0^1 r |F_k^{(n)}(r)|^p dr \right)^{1/p} \leq \varepsilon + A.$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$, получим

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} ||f_k||_{L^p_{\beta-\frac{1}{p}}(0,1)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\int_0^1 r |F_k(r)|^p dr \right)^{1/p} \leq \varepsilon + A.$$

Следовательно $f(z) \in \tilde{\mathrm{L}}^p_{\beta-\frac{2}{p}}$ при $|z| \leq 1$.

Докажем теперь, что последовательность $\{f^{(m)}(z)\} \to f(z)$ по норме $\tilde{\mathrm{L}}^p_{\beta-\frac{2}{p}}$. Из

$$||f^{(m)}(z) - f^{(n)}(z)|| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\int_0^1 r |F_k^{(m)}(r) - F_k^{(n)}(r)|^p dr \right)^{1/p} < \varepsilon,$$

следует, что для любого M существует такой номер N, что

$$\sum_{k=-M}^{M} \left(\int_0^1 r |F_k^{(m)}(r) - F_k^{(n)}(r)|^p dr \right)^{1/p} \leq \varepsilon,$$

как только $n, m \geq N$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$ имеем

$$\sum_{k=-M}^{M} \left(\int_0^1 r |F_k^{(m)}(r) - F_k(r)|^p dr \right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon,$$

при любых M, $m \geq N$. Переходя здесь к пределу при $M \to \infty$ получим, что

$$\{f^{(m)}(z)\} \to f(z)$$

по норме $\tilde{\mathrm{L}}^p_{\beta-\frac{2}{p}}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

3. Постановка задачи. Основные результаты

Пусть D – конечная односвязная область комплексной плоскости, ограниченная замкнутой кривой Γ.

В пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D)$ $(1 < p < \infty,\ 0 < \beta < 2)$:

$$L^p_{\beta-2/p} = \{f(z) : |z|^{\beta-2/p} f(z) = F(z) \in L^p(D), ||f||_{L^p_{\beta-2/p}} = ||F||_{L^p}\}$$

рассмотрим следующий двумерный сингулярный интегральный оператор

$$A \equiv a_0(z)I + b_0(z)K + \sum_{n=-3}^{3}{}' \left(a_n(z)I + b_n(z)K\right) S_n, \tag{3.1}$$

штрих означает, что член при $n = 0$ исключен из суммы; I – тождественный оператор, $a_0(z), b_0(z), a_n(z), b_n(z), n \in \overline{-3;3}$, – непрерывные в $\overline{D} = D \cup \Gamma$ комплекснозначные функции, а операторы K и S_n действуют по формулам

$$(Kf)(z) = \overline{f(z)}, \quad (S_n f)(z) = \frac{(-1)^{|n|}|n|}{\pi} \iint_D \frac{e^{-2in\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta)\, ds_\zeta,$$

$$\overline{S}_n = KS_nK, \quad \theta = \arg(\zeta - z), \quad z \in \overline{D}.$$

Здесь черта – операция комплексного сопряжения, m – некоторое целое число, ds_ζ – элемент плоской меры Лебега, интегрирование понимается как интегрирование по Коши [10]. Отметим, что функции из вещественного пространства $L^p_{\beta-2/p}(D)$, комплекснозначны, т.е. будем рассматривать его как линейное множество под полем вещественных чисел. В этом случае оператор A – обычный линейный ограниченный в $L^p_{\beta-2/p}(D)$ [24].

В работах [25–27] рассмотрены частные случаи оператора A. В этих статьях приведены необходимые и достаточные условия нетеровости в $L^p_{\beta-2/p}(D)$, а также формулы для вычисления индекса оператора.

Применив выкладки из работы [23], получим, что оператор A является нетеровым тогда и только тогда, когда нетеровым является оператор

$$U = \begin{pmatrix} a_0(z)I + \sum\limits_{n=-3}^{3} a_n(z)S_n & b_0(z) + \sum\limits_{n=-3}^{3} b_n(z)S_{-n}K \\ \overline{b_0(z)}I + \sum\limits_{n=-3}^{3} \overline{b_n(z)}S_n & \overline{a_0(z)}I + \sum\limits_{n=-3}^{3} \overline{a_n(z)}S_{-n}K \end{pmatrix}$$

в $L^p_{\beta-2/p}(D), (1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$.

Лемма 3.1. *Нетеровость оператора $A : L^p_{\beta-2/p}(D) \longrightarrow L^p_{\beta-2/p}(D)$ эквивалентна нетеровости оператора $U : L^{2,p}_{\beta-2/p}(D) \longrightarrow L^{2,p}_{\beta-2/p}(D)$.*

Доказательство. Вектор $F = (f, \overline{f})$ будет решением системы $UF = Q$ из $L^{2,p}_{\beta-2/p}(D)$, где $Q = (g, \overline{g})$, если функция $f(z)$ является решением уравнения $(Af)(z) = g(z)$ из $L^p_{\beta-2/p}(D)$. Справедливо и обратное: вектор $(\overline{f}_2, \overline{f}_1)$ будет решением системы $UF = q$ из $L^{2,p}_{\beta-2/p}(D)$, если вектор $F = (f_1, f_2)$ – решение системы

$UF = q$ из $L^{2,p}_{\beta-2/p}(D)$. В этом случае решением системы $UF = Q$ из $L^{2,p}_{\beta-2/p}(D)$ является вектор $\left(\dfrac{f_1+\overline{f}_2}{2}, \dfrac{f_2+\overline{f}_1}{2}\right)$, из чего следует, что функция $\dfrac{f_1+\overline{f}_2}{2}$ будет решением уравнения (1.1) из $L^{p}_{\beta-2/p}(D)$.

Предположим, что k – число линейно-независимых решений однородного уравнения $(Af)(z) = 0$ над полем вещественных чисел, а l – число линейно независимых решений однородной системы $UF = 0$ над полем комплексных чисел. Покажем, что $k = l$. Пусть $\{f_i(z)\},\ i = \overline{1,k}$, – фундаментальная система решений однородного уравнения. В этом случае векторы $F_i = (f_i, \overline{f}_i)$ $(i = \overline{1,k})$ – линейно-независимые решения уравнения $UF = 0$. Очевидно, что если $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i F_i = 0$, то $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i f_j = 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n} c_j \overline{f}_i = 0$ или $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i f_i = 0$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \overline{c}_i f_i = 0$. Из этого следует, что $\sum\limits_{i=1}^{n} (c_i + \overline{c}_i) f_i = 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n} (c_i - \overline{c}_i) f_i = 0$, откуда, $c_i + \overline{c}_i = 0$, $c_i - \overline{c}_i = 0$, т.е. $c_i = 0$. Таким образом, $k \le l$. Обратное неравенство $k \ge l$ доказывается аналогично работе [11] (стр. 276).

Тот факт, что уравнение $Af = g$ и соответствующая система $UF = Q$ нормально разрешимы лишь одновременно следует из доказанного соответствия между решениями неоднородного уравнения $Af = g$ и неоднородной системы $UF = Q$.
Доказательство завершено.

Поскольку символ оператора S_n (см.[10]) равен $\left(\dfrac{\overline{\sigma}}{\sigma}\right)^n \equiv t^n$ $(\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2 \ne 0)$, то, согласно [23], для нетеровости операторной матрицы U необходимо, чтобы $\det G_A(z,t) \ne 0$ для всех $z \in \overline{D}$, $|t| = 1$, где $G_A(z,t)$ символ оператора A :

$$G_A(z,t) = \begin{pmatrix} P_6(z,t) & Q_6(z,t) \\ \overline{Q_6(z,t)} & \overline{P_6(z,t)} \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

где

$$P_6(z,t) = \overline{t}^3 \sum_{n=-3}^{3} a_n(z) t^{3+n},\ Q_6(z,t) = \overline{t}^3 \sum_{n=-3}^{3} b_n(z) t^{3-n}, \tag{3.3}$$

и для нетеровости оператора A в $L^{p}_{\beta-2/p}(D)$ необходимо, чтобы

$$\det G_A(z,t) = |P_6(z,t)|^2 - |Q_6(z,t)|^2 \ne 0 \ \ \forall z \in \overline{D}. \tag{3.4}$$

Множества комплексных матриц второго порядка, состоящих из полиномов степени шесть, удовлетворяющих условию (3.2), будем обозначать через $\mathcal{F}^2$. Два полинома $G_1(t)$ и $G_1(t)$ из $\mathcal{F}^2$ назовем гомотопными (пишется $G_1(t) \sim G_2(t)$), если существует семейство $G(t,\tau)$ матричных полиномов из $\mathcal{F}^2$, непрерывно зависящих от действительного параметра τ, $0 \le \tau \le 1$, такое, что

$$G(t,0) \equiv G_1(t), \quad G(t,1) \equiv G_2(t).$$

Согласно неравенству (3.4) возможны два случая:

а) $\det G_A(z,t) > 0$ т.е. $|P_6(z,t)| > |Q_6(z,t)|$ для всех $z \in \overline{D}$, $|t| = 1$;

б) $\det G_A(z,t) < 0$ т.е. $|P_6(z,t)| < |Q_6(z,t)|$ для всех $z \in \overline{D}$, $|t| = 1$.

Множества матричных полиномов, удовлетворяющих условию (3.4) а) и б) будем обозначать соответственно через $\mathcal{F}^2_+$ и $\mathcal{F}^2_-$. Если $G_1(t) \sim G_1(t)$, то $G_1(t)$ и $G_1(t)$

принадлежат одному и тому же из этих множеств. В дальнейшем будем рассматривать только $\mathcal{F}_+^2$.

Таким образом, для (3.2) приходим к задаче Римана для единичного круга $|t| < 1$:

$$\begin{cases} \Phi_1^-(t) = P_6(\tau,t)\Phi_1^+(t) + Q_6(\tau,t)\Phi_2^+(t), \\ \Phi_2^-(t) = \overline{Q_6(\tau,t)}\Phi_1^+(t) + \overline{P_6(\tau,t)}\Phi_2^+(t); \end{cases} \tag{3.5}$$

здесь $\Phi_1^+(t), \Phi_2^+(t), \Phi_1^-(t), \Phi_2^-(t)$ – неизвестные функции точек окружности $|t| = 1$, аналитически продолжимые по t соответственно внутри и вне единичного круга.

Полином $P_6(z,t) = \overline{t}^3 \sum\limits_{n=-3}^{3} a_n(z)t^{3+n}$ – комплексный невырождающийся полином степени шесть, как следует из формулы (3.3). Введем обозначения $q_k(z)$ $(k = \overline{1,6})$ – комплексные корни уравнения $P_6(z,t) = 0$. Корни не лежат на окружности $|t| = 1$, в силу справедливости формулы (3.4). Т.е. верно $|q_k(z)| \neq 1$, либо $|q_k(z)| < 1$, либо $|q_k(z)| > 1$, откуда следует

$$\det G_A(z,t) > 0, \text{ то есть } |P_6(z,t)| > |Q_6(z,t)| \ \forall z \in \overline{D}. \tag{3.6}$$

Эти корни не лежат на окружности $|t| = 1$, т.е. $|q_k| \neq 1$.

Возможно, априори семь случаев:

$$j_0) \ |q_k| > 1, \ k = \overline{1,6}, \text{ т.е. все корни лежат вне круга } |t| = 1; \tag{3.7}$$
$$j_\nu) \ |q_k| < 1, \ k = \overline{1,\nu}, \text{ т.е. внутри круга } |t| = 1 \text{ лежат } \nu \ (\nu = \overline{1,6}) \text{ корней.}$$

Будем решать задачу Римана (3.5) для случая j_0), т.е. в условиях отсутствия корней многочлена $P_6(\tau,t)$ внутри круга $|t| < 1$.

Отметим, что в равенстве (3.5) для $\Phi_1^-(t)$ левая часть является функцией, аналитически продолжимой вне единичного круга. При этом правая часть аналитически продолжима внутри единичного круга за исключением точки $t = 0$. В этой точке функция имеет полюс шестого порядка, значит, по теореме Лиувилля можно записать

$$P_6(t)\Phi_1^+(t) + Q_6(t)\Phi_2^+(t) = c_1 + \sum_{i=1}^{6} \frac{c_{i+1}}{t^i}, \quad \Phi_1^-(t) = c_1 + \sum_{i=1}^{6} \frac{c_{i+1}}{t^i}.$$

Найдя функцию $\Phi_1^+(t)$, получим:

$$\Phi_1^+(t) = \frac{c_1 + \sum\limits_{i=1}^{6} \frac{c_{i+1}}{t^i}}{P_6(t)} - \frac{Q_6(t)}{P_6(t)}\Phi_2^+(t). \tag{3.8}$$

С учетом факторизации $\det G_A(z,t) \equiv |P_6(z,t)|^2 - |Q_6(z,t)|^2$ в форме $\dfrac{F^+(t)}{F^-(t)}$, где $F^+(t) \neq 0$, $F^-(t) \neq 0$ – аналитически продолжимые соответственно внутри и вне единичного круга функции, подставив (3.8) во второе равенство системы (3.5), получим:

$$\Phi_2^-(t) = \frac{\overline{Q_6(t)}}{P_6(t)} \left(c_1 + \sum_{i=1}^{6} \frac{c_{i+1}}{t^i} \right) + \frac{F^+(t)}{F^-(t)P_6(t)}\Phi_2^+(t).$$

Следовательно,

$$F^-(t)\left[\Phi_2^-(t)-\frac{\overline{Q_6(t)}}{P_6(t)}\left(c_1+\sum_{i=1}^{6}\frac{c_{i+1}}{t^i}\right)\right]=\frac{F^+(t)}{P_6(t)}\Phi_2^+(t).$$

В левой части равенства стоит аналитически продолжимая вне единичного круга функция, в правой – функция, продолжимая внутри единичного круга за исключением точки $\tau_i=\dfrac{1}{q_{in}}$. В этой точке она имеет простой полюс. В этом случае по теореме Лиувилля можно записать:

$$F^-(t)\Big[\Phi_2^-(t)-\frac{\overline{Q_6(t)}}{P_6(t)}\left(c_1+\sum_{i=1}^{6}\frac{c_{i+1}}{t^i}\right)\Big]=\frac{F^+(t)}{P_6(t)}\Phi_2^+(t)=c_{n+2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{c_{n+2+i}}{\frac{1}{t}-q_{in}},$$

т.е.

$$\Phi_2^-(t)=\frac{\overline{Q_6(t)}}{P_6(t)}\left(c_1+\sum_{i=1}^{6}\frac{c_{i+1}}{t^i}\right)+\frac{1}{F^-(t)}\Big[c_{n+2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{c_{n+2+i}}{\frac{1}{t}-q_{in}}\Big].$$

Подставив выражение для $\Phi_2^+(t)$ в (3.8), получим

$$\Phi_1^+(t)=\frac{c_1+\sum\limits_{i=1}^{6}\frac{c_{i+1}}{t^i}}{P_6(t)}-\frac{Q_6(t)}{F^+(t)}\left(c_{n+2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{c_{n+2+i}}{\frac{1}{t}-q_{in}}\right). \tag{3.9}$$

Далее необходимо устранить полюс функции $\Phi_2^-(t)$ в точках $t_1=-\dfrac{1}{q_1}$, $t_2=-\dfrac{1}{q_2}$, $t_3=-\dfrac{1}{q_3}$. С этой целью запишем

$$\left(q+\frac{1}{t_1}\right)\left(q+\frac{1}{t_2}\right)\left(q+\frac{1}{t_3}\right)=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{t}-q_{in}\right).$$

Будем требовать, чтобы при $t=\dfrac{1}{q_{in}}$ данное выражение обращалось в нуль, т.е. чтобы константы c_1, c_{n+1}, c_{n+2+i} $(i=\overline{1,n})$, удовлетворяли n требованиям:

$$c_{n+2+i}=-\frac{Q_6(t)(c_1+c_{n+1}q_{in})}{\prod\limits_{k\neq i}(g_{in}-g_{kn})F^+(q_{in}^m)},$$

где c_1, c_{n+1} свободные константы, $c_2=0$, $c_3=0$, ..., $c_n=0$, а на границе Γ области D предполагается, что выполнено неравенство

$$\prod_{k=1}^{\nu}Q_6(\tau,q_k(\tau))\neq 0 \text{ при } z\in\overline{D} \text{ и } \tau\in\Gamma.$$

Итак, для функций $\Phi_1^+(t),\Phi_2^+(t),\Phi_1^-(t),\Phi_2^-(t)$ получили следующие выражения:

$$\Phi_1^-(t)=c_1+\frac{c_{n+1}}{t^n},$$

$$\Phi_2^-(t) = \frac{\overline{Q_6(t)}}{P_6(t)}\left(c_1 + \frac{c_{n+1}}{t^n}\right) + \frac{1}{F^-(t)}\left[c_{n+2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{c_{n+2+i}}{\frac{1}{t} - q_{in}}\right],$$

$$\Phi_1^+(t) = \frac{c_1 + \frac{c_{n+1}}{t^n}}{P_6(t)} - \frac{Q_6(t)}{F^+(t)}\left(c_{n+2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{c_{n+2+i}}{\frac{1}{t} - q_{in}}\right),$$

$$\Phi_2^+(t) = \frac{P_6(t)}{F^+(t)}\left[c_{n+2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{c_{n+2+i}}{\frac{1}{t} - q_{in}}\right].$$

Сначала подставим $c_1 = 0$ и $c_{n+1} = 1$, а затем $c_1 = 1$ и $c_{n+1} = 0$, найдем элементы матрицы $\Phi^-(t)$ и $\Phi^+(t)$

$$\Phi^-(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{t^n} & 1 \\ \dfrac{\overline{Q_6(t)}\dfrac{1}{t^n}}{P_6(t)} + \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{c^1_{n+2+i}}{\frac{1}{t} - q_{in}}}{F^-(t)} & \dfrac{\overline{Q_6(t)}\frac{1}{t^m}}{P_6(t)} + \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{c^2_{n+2+i}}{\frac{1}{t} - q_{in}}}{F^-(t)} \end{pmatrix},$$

$$\Phi^+(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{\frac{1}{t^n}}{P_6(t)} - \dfrac{Q_6(t)}{F^+(t)} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{c^1_{n+2+i}}{\frac{1}{t} - q_{in}} & \dfrac{1}{P_6(t)} - \dfrac{Q_6(t)}{F^+(t)} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{c^2_{n+2+i}}{\frac{1}{t} - q_{in}} \\ \dfrac{P_6(t)}{F^+(t)} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{c^1_{n+2+i}}{\frac{1}{t} - q_{in}} & \dfrac{P_6(t)}{F^+(t)} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{c^2_{n+2+i}}{\frac{1}{t} - q_{in}} \end{pmatrix},$$

При этом

$$\det \Phi^-(t) = \frac{Q_6(t)}{\prod\limits_{k\neq i}(g_{in} - g_{kn})F^+(q^m_{in})F^-(t)} \neq 0.$$

$$\det \Phi^+(t) = \frac{Q_6(t)}{\prod\limits_{k\neq i}(g_{in} - g_{kn})F^+(q^m_{in})F^+(t)} \neq 0.$$

Таким образом, при выполнении условия

$$\prod_{k=1}^{\nu} Q_6(\tau, q_k(\tau)) \neq 0 \text{ при } z \in \overline{D} \text{ и } \tau \in \Gamma \tag{3.10}$$

мы имеем

$$\Phi^-(t) = \Omega_A^+(t)\Phi^+(t)$$

или

$$\Omega_A^+(t) = \Phi^-(t)\left(\Phi^+(t)\right)^{-1}. \tag{3.11}$$

Аналогично, доказывается, что при условии (3.10) имеет место представление

$$\Omega_A^-(t) = \Phi_*^-(t)\left(\Phi_*^+(t)\right)^{-1}. \tag{3.12}$$

В разложении матрицы $\Omega_A^{\pm}(t)$ аналитическое продолжение за пределы единичного круга допустимо для первых множителей, как следует из формул (3.11) и (3.12). Вторые множители же могут иметь аналитическое продолжение во внутреннюю область круга. Определители данных множителей не равны нулю на всей области. Это следует из нулевых индексов матрицы $\Omega_A^{\pm}(t)$. Таким образом, оператор является нетеровым при справедливости граничного условия (3.10).

Будем обозначать через $\mathcal{M}_{j_\nu}$, $\nu = \overline{0,6}$ класс матричных полиномов из $\mathcal{F}_+^2$, для которых справедливо одно из выражений (3.7). Индекс полинома совпадает с индексом в выражении (3.7). Условия факторизации матрицы $G_A(\tau, t)$, $\tau \in \Gamma$, $|t| = 1$ с нулевыми частными индексами ищутся в зависимости от номера класса полинома $\mathcal{M}_{j_\nu}$. В этом случае оператор A нетеров в пространствах $L^p_{\beta-2/p}(D)$, $1 < p < \infty$, $0 < \beta < 2$ [9].

Следует отметить, что при рассмотрении других случаев задача Римана оказывается безусловно разрешимой, т.е. дополнительных условий разрешимости не возникает.

Введем обозначения

$$\Delta_\nu = |a_\nu|^2 - |b_\nu|^2, \quad \lambda_{\nu n} = \overline{a}_\nu a_n - b_\nu \overline{b}_n, \quad \mu_{\nu n} = \overline{a}_\nu b_n - b_\nu \overline{a}_n,$$

$$M = max_{|t|=1} Re\left(\sum_{j=1}^{6} \lambda_j t^j\right), \ \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ n = \pm 1, \pm 2, \pm 3,$$

где функции λ_j явно выражаются через коэффициенты оператора A.

Теорема 3.1. *Для нетеровости оператора A в лебеговых пространствах $L^p_{\beta-2/p}(D)$, $1 < p < \infty$, $0 < \beta < 2$ необходимо и достаточно выполнение одного из следующих (исключающих друг друга) условий*

$$\Delta_0(z) > M(z) + \left(M^2(z) + \sum_{n=-3}^{3} \left(|\mu_{on}(z)|^2 - |\lambda_{on}(z)|^2\right)\right)^{1/2}, \ \textit{при} \ \forall z \in \overline{D}, \tag{3.13}$$

$$\Delta_\nu(z) > M(z) + \left(M^2(z) + \sum_{n=-3}^{3} \left(|\mu_{\nu n}(z)|^2 - |\lambda_{\nu n}(z)|^2\right)\right)^{1/2}, \ \nu = \pm 1, \pm 2,$$

$$\prod_{k=1}^{\nu} Q_6(\tau, q_k(\tau)) \neq 0, \quad \textit{при} \ \ \forall\, z \in \overline{D} \quad \textit{и} \quad \tau \in \Gamma, \tag{3.14}$$

где $q_k(\tau)$ – корни уравнения $P_6(\tau, t) = 0$, $\tau \in \Gamma$, $|t| = 1$, такие, что $|q_k(\tau)| < 1$ для $\forall \tau \in \Gamma$. При этом, если выполнено (3.13)*, то индекс оператора A равен нулю; если выполнено* (3.14)*, то*

$$\varkappa = 2 \sum_{k=1}^{\nu} Ind_\Gamma \, Q_6(\tau, q_k(\tau)).$$

4. Заключение

Представленная в статье форма оператора позволила редуцировать исходную задачу к решению соответствующей задачи Римана, связанной с многочленом шестой степени. Полученные ранее автором леммы для операторов с суммированием по индексам от 1 до 2 были обобщены на более широкий класс операторов с суммированием по индексам от –3 до 3, что потребовало учёта существенно усложнившейся структуры характеристических многочленов. Проведённое исследование данного класса операторов создаёт предпосылки для дальнейшего построения теории Нетера двумерных сингулярных операторов, заданных на ограниченных областях.

Список литературы

1. Hilbert D. Uber eine Anwendung der Integralgleichungen auf ein Problem der Functionentheorie. Verhandlungen des 3. Internationalen Mathematiker-Kongresses : in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904. Leipzig: Teubner, 1905. P. 233–240. DOI: 10.11588/heidok.00016038
2. Poincare H. Lecons de mecanigue celeste. Tome I–III. Paris. 1905.
3. Noether F. Uber eine klass singilarer Integralgleichungen. *Math. Ann.*. 1920. Vol 82. P. 42–63. DOI: 10.1007/BF01457974
4. Carleman T. Uber das Neumann - Poincaresche Problem fur ein Gebiet mit Ecken. Uppsala: Aimqvist and Wiksell, 1916. 193 p.
5. Giraud G. Sur une classe d'eguation integrales on figurent des valeurs pricipales d'integrales sinpeles. *Ann. Sc. de I'Ecole Norm. Sup. 3-e Serie.* 1939. Vol. 56. P. 119–172. DOI: 10.24033/asens.877
6. Михлин С. Г. Проблема эквивалентности в теории сингулярных интегральных уравнений // *Мат. сбор.* 1938. Т. 3, № 1. С. 121–140.
7. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Гостехиздат, 1946. 448 с.
8. Tricomi F. Formula d' inversione dell' ordine di due integrazioni doppie "con asterisco". Ren - diconti d. R. Accademia Naz. d. Lincei. III. ser. 6a. fasc. 9. 1926. P. 535–539.
9. Giraud G. Sur une classe generale d'eguation a integrales pricipales. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences.* 1936. Vol. 202, no. 26. P. 2124– 2127.
10. Михлин С. Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962. 487 с.
11. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959. 227 с.
12. Альфорс Л. Лекции по квазиконформным отображениям. М.: Мир, 1969. 134 с.
13. Шиффер М. Экстремальные проблемы и вариационные методы в конформном отображении. В кн.: Международный математический конгресс в Эдинберге (обзорные доклады). М.: Физматгиз, 1962. С. 193–218.
14. Боярский Б. В. Исследования по уравнениям эллиптического типа на плоскости и граничным задачам теории функций : 01.00.00 : дисс. ... д-ра физ.-мат. наук. Москва. 1960. 326 с.

15. Джураев А. Д. Метод сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1997. 415 с.

16. Монахов В. Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск: Наука, 1977. 424 с.

17. Комяк И. И. О разрешимости одного класса двумерных сингулярных интегральных уравнений // *Докл. АН СССР.* 1980. Т. 250, № 6. С. 1307–1310.

18. Джангибеков Г. О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторах // *Матем. заметки.* 1989. Т. 46, № 5. С. 91–93.

19. Джангибеков Г. Нетеровость и индекс одного класса двумерных сингулярных интегральных операторов // *ДАН СССР.* 1990. Т. 313, № 3. С. 541–545.

20. Джангибеков Г. Об одном классе сингулярных интегральных операторов // *ДАН СССР.* 1990. 314, № 5. С. 1055–1059.

21. Джангибеков Г. О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторах со сдвигом // *Математические заметки.* 1991. Т. 49, вып. 4. С. 150–152.

22. Бойматов К. Х., Джангибеков Г. Об одном сингулярном интегральном операторе // *Успехи математических наук.* 1988. Т. 43, вып. 8. С. 171–172.

23. Duduchava R. J. On multidimensional singular integral operators. *Journal of operators theory.* 1984. Vol. 11, no. 1. P. 41–76.

24. Stein E. M. Note on singular integrals // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1957. Vol. 8. P. 250–254.

25. Джангибеков Г., Одинабеков Д. М., Худжаназарова Г. Х. Об условиях нетеровости и индексе одного класса сингулярных интегральных операторов по ограниченной односвязной области // *Вестник МГУ им. М.В. Ломоносова. Серия 1. Математика. Механика.* 2019. № 2 С. 9–14. DOI: 10.3103/S0027132219020025

26. Одинабеков Д. М. О нетеровости и индексе двумерных сингулярных интегральных операторов по ограниченной области // *Вестник российских университетов. Математика.* 2022. Т. 27, вып. 138. С. 164–174. DOI: 10.20310/2686-9667-2022-27-138-164-174

27. Одинабеков Д. М. О разрешимости некоторых классов двумерных сингулярных интегральных операторов по ограниченной области // *Известия АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. наук.* 2019. № 1. С. 42–49.

Поступила 27.04.2025; доработана после рецензирования 27.04.2025; принята к публикации 27.04.2025

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

References

1. D. Hilbert, "Uber eine Anwendung der Integralgleichungen auf ein Problem der Functionentheorie", *Verhandlungen des III Internation. Mathem. Kong., Heidelberg*, 1905, 233–240. DOI: 10.11588/heidok.00016038
2. H. Poincare, *Lecons de mecanigue celeste*, **I–III**, Paris, 1905.
3. F. Noether, "Uber eine klass singilarer Integralgleichungen", *Math. Ann. Bd.*, **82** (1920), 42–63. DOI: 10.1007/BF01457974
4. T. Carleman, *Uber das Neumann - Poincaresche Problem fur ein Gebiet mit Ecken*, Aimqvist and Wiksell, Uppsala, 1916, 193 p.
5. G. Giraud, "Sur une classe d'eguation integrales on figurent des valeurs pricipales d'integrales sinpeles", *Ann. Sc. de I'Ecole Norm. Sup.*, **56** (1939), 119–172. DOI: 10.24033/asens.877
6. S. G. Mikhlin, *The problem of equivalence in the theory of singular integral equations*, **3**, Mat. collection, 1938 (In Russ.).
7. N. I. Muskhelishvili, *Singular integral equations*, Moscow, 1946 (In Russ.), 448 c.
8. F. Tricomi, "Formula d' inversione dell' ordine di due integrazioni doppie "con asterisco", *Ren - diconti d. R. Accademia Naz. d. Lincei, III, 6a, fasc. 9*, 1926, 535–539.
9. G. Giraud, "Sur une classe generale d'eguation a integrales pricipales", *Comptes Rendus de l'Acad?mie des Sciences*, **26** (1936), 2124–2127.
10. S. G. Mikhlin, *Multidimensional singular integrals and integral equations*, Fizmatgiz, Moscow, 1962 (In Russ.), 487 p.
11. I. N. Vekua, *Generalized analyti- cal functions*, Fizmatgiz, Moscow, 1959 (In Russ.), 227 p.
12. L. Al'fors, *Lectures on quasiconformal mappings*, Mir, Moscow, 1969 (In Russ.), 134 p.
13. M. Shiffer, "Extremal problems and variational methods in conformal mapping", *In the book: International Mathematical Congress in Edinberg (review papers)*, 1962, 193–218 (In Russ.).
14. B. V. Boyarskiy, "Research on elliptic equations on the plane and boundary value problems of function theory", *Diss. doc. physic-mathematical sciences*, 1960 (In Russ.), 326 p.
15. A. D. Dzhurayev, *Method of singular integral equations*, Nauka, Moscow, 1997 (In Russ.), 415 p.
16. V. N. Monakhov, *Boundary value problems with free boundaries for elliptic systems of equations*, Nauka, Novosibirsk, 1977 (In Russ.), 424 p.
17. I. I. Komyak, "On the solvability of one class of two-dimensional singular integral equations", *Reports of the academy of sciences USSR*, **250** (1980), 1307–1310 (In Russ.).

18. G. Dzhangibekov, “On some two-dimensional singular integral operators”, *Mat. Notes*, **46** (1989), 91–93 (In Russ.).

19. G. Dzhangibekov, “Noethericity property and index of one class of two-dimensional singular integral operators”, *Reports of the academy of sciences USSR*, **313** (1990), 541–545 (In Russ.).

20. G. Dzhangibekov, “On one class of singular integral operators”, *Reports of the academy of sciences USSR*, **314** (1990), 1055–1059 (In Russ.).

21. G. Dzhangibekov, “On some two-dimensional singular integral operators with shift”, *Mathematical notes*, **49** (1991), 150–152 (In Russ.).

22. K. Kh. Boymatov, G. Dzhangibekov, “On one singular integral operator”, *Advances in Mathematical Sciences*, **43** (1988), 171–172 (In Russ.).

23. R. J. Duduchava, “On multidimensional singular integral operators”, *Journal of operators theory*, **11** (1984), 41–76.

24. E. M. Stein, “Note on singular integrals”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **8** (1957), 250–254.

25. G. Dzhangibekov, J. M. Odinabekov, G. Kh. Khudzhanazarova, “On Noethericity conditions and the index of one class of singular integral operators over a bounded simply connected domain”, *Moscow University Mathematics Bulletin*, **74** (2019), 49–54 (In Russ.). DOI: 10.3103/S0027132219020025

26. J. M. Odinabekov, “On the Noetherian property and index of two-dimensional singular integral operators over a bounded domain”, *Reports of the academy of sciences RT*, **27** (2022), 164-174 (In Russ.). DOI: 10.20310/2686-9667-2022-27-138-164-174

27. J. M. Odinabekov, “On the solvability of some classes of two-dimensional singular integral operators over a bounded domain”, *News of the Academy of Sciences of the RT, Dept. of Phys.-Math., Chem., Geol. and Engineering Sciences*, 2019, 42–49 (In Russ.).

Submitted 27.04.2025; Revised 27.04.2025; Accepted 27.04.2025

The authors have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.