

DOI 10.15507/2079-6900.28.202601.79-95

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.6:681.5.017

Метод автоматического контроля оптимальности распределенного дискретного фильтра Калмана

А. В. Цыганов¹, Ю. В. Цыганова^{1,2}

¹ Ульяновский государственный педагогический университет
имени И. Н. Ульянова (ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И. Н. Ульянова»)
(г. Ульяновск, Российская Федерация)

² Университет Иннополис (АНО ВО «Университет Иннополис»)
(г. Иннополис, Российская Федерация)

Аннотация. В работе рассмотрена задача автоматического контроля оптимальности распределенного дискретного информационного фильтра Калмана в мультисенсорных сетях. Целью исследования является разработка нового метода обнаружения потери оптимальности распределенного дискретного фильтра, вызванной резким изменением параметров динамической системы с распределенной сетью сенсоров. Рассматривается сеть с полностью связной топологией. Предложен новый подход, основанный на анализе градиента отрицательной логарифмической функции правдоподобия, вычисляемого в терминах распределенного информационного фильтра. Метод использует уравнения чувствительности, позволяющие децентрализованно рассчитывать значения критерия оптимальности и его градиента в каждом узле сети, что обеспечивает масштабируемость и отказоустойчивость мультисенсорной системы. Основным теоретическим результатом являются выражения для вычисления критерия оптимальности в форме отрицательной логарифмической функции правдоподобия и его градиента в терминах распределенного дискретного фильтра. Результаты компьютерного моделирования, проведенного на языке MATLAB, иллюстрируют работоспособность предложенного подхода. Разработанный метод может быть использован в системах мониторинга, управления движением и слежения с использованием распределенных сенсорных сетей. Полученные результаты показывают, что предложенный подход позволяет обеспечить контроль оптимальности дискретного фильтра и, следовательно, может быть интегрирован в адаптивные алгоритмы для автоматической перенастройки параметров модели динамической системы с распределенной сетью сенсоров.

Ключевые слова: автоматический контроль оптимальности, дискретная линейная стохастическая система, распределенные измерения, распределенный фильтр Калмана, градиент критерия оптимальности

Для цитирования: Цыганов А. В., Цыганова Ю. В. Метод автоматического контроля оптимальности распределенного дискретного фильтра Калмана // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2026. Т. 28, № 1. С. 79–95. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202601.79-95



Об авторах:

Цыганов Андрей Владимирович, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный педагогический университет имени И. Н. Ульянова» (432071, Россия, г. Ульяновск, площадь Ленина, д. 4/5), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4173-5199>, andrew.tsyganov@gmail.com

Цыганова Юлия Владимировна, доктор физико-математических наук, профессор, Институт анализа данных и искусственного интеллекта, АНО ВО «Университет Иннополис» (420500, Россия, г. Иннополис, ул. Университетская, д. 1), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8812-6035>, tsyganovajv@gmail.com

Original article

MSC2020 93E10, 93E11

Automatic optimality control method for the distributed discrete-time Kalman filter

A. V. Tsyganov¹, J. V. Tsyganova^{1,2}

¹ *Ulyanovsk State Pedagogical University (Ulyanovsk, Russian Federation)*

² *Innopolis University (Innopolis, Russian Federation)*

Abstract. The paper considers the problem of automatic optimality control of a distributed discrete information Kalman filter in multisensory networks. The aim of the study is to develop a new method for detecting the loss of optimality of a distributed discrete filter caused by an abrupt change in the parameters of a dynamic system with a distributed network of sensors. A network with a fully connected topology is considered. A new approach is proposed based on the analysis of the gradient of the negative log likelihood function calculated in terms of a distributed information filter. The method uses sensitivity equations that allow decentralized calculation of the optimality criterion and its gradient in each node of the network, which ensures scalability and fault tolerance of the multisensory system. The main theoretical result is expressions for calculating the optimality criterion in the form of a negative logarithmic likelihood function and its gradient in terms of a distributed discrete filter. The results of computer modeling conducted in MATLAB validate the proposed approach. The developed method can be used in monitoring, motion control and tracking systems using distributed sensor networks. The results obtained show that the proposed approach makes it possible to control the optimality of a discrete filter and, therefore, can be integrated into adaptive algorithms for automatically reconfiguring the parameters of a dynamic system model with a distributed network of sensors.

Keywords: automatic optimality control, discrete-time linear stochastic system, distributed measurements, distributed Kalman filter, gradient of optimality criterion

For citation: A. V. Tsyganov, J. V. Tsyganova. Automatic optimality control method for the distributed discrete-time Kalman filter. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 28:1(2026), 79–95. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202601.79-95

About the authors:

Andrey V. Tsyganov, Ph.D. (Phys. and Math.), Professor, Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Pedagogical University (4/5 Lenin Square, Ulyanovsk, 432071, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4173-5199>, andrew.tsyganov@gmail.com

Julia V. Tsyganova, D.Sci. (Phys. and Math.), Professor, Institute of Data Science and Artificial intelligence, Innopolis University (1 Universitetskaya Str., Innopolis, 420500, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-8812-6035>, tsyganovajv@gmail.com

1. Введение

Фильтр Калмана является стандартным инструментом оценки состояния линейных стохастических систем [1]. Его оптимальность гарантируется при выполнении ряда предпосылок: корректности модели динамики, гауссовости шумов и точного знания их ковариационных матриц. Однако в реальных условиях эти предположения часто нарушаются из-за неучтенных возмущений, отказов датчиков или изменений параметров системы. Это приводит к потере эффективности фильтра, занижению апостериорной дисперсии и возможному выходу системы из-под контроля.

В настоящее время коммуникационные сети, состоящие из недорогих, но технически совершенных сенсоров, широко используются в системах сопровождения целей, наблюдения и охраны, мониторинга окружающей среды, управления воздушным движением и др. Использование множества сенсоров, позволяющих наряду с измерениями выполнять обработку и передачу данных с использованием различных коммуникационных схем, позволяет повысить качество управления сложными системами.

Одной из эффективных реализаций является распределенная мультисенсорная сеть с децентрализованной обработкой данных, которая обладает свойствами отказоустойчивости и масштабируемости. Выход из строя одного из сенсоров не приводит к потере работоспособности алгоритма оценивания, поскольку в каждый дискретный момент времени каждый узел имеет свою «копию» глобальной оценки.

Для подобных систем разработаны многочисленные алгоритмы распределенной калмановской фильтрации [2]. Такие алгоритмы работают эффективно, если в них для вычисления оценок вектора состояния используется модель данных, которая адекватно описывает саму динамическую систему. В случае непредвиденного изменения параметров системы в процессе ее функционирования алгоритм распределенной дискретной фильтрации может потерять свойство оптимальности, и качество вычисляемых оценок перестанет удовлетворять заданным требованиям. В связи с этим актуальной является задача автоматического контроля оптимальности распределенного фильтра, заключающаяся в своевременном обнаружении таких нарушений и, при необходимости, адаптации модели.

Цель данной работы состоит в построении нового метода автоматического контроля оптимальности распределенного дискретного фильтра Калмана.

2. Постановка задачи

Рассмотрим класс дискретных линейных стохастических мультисенсорных систем \mathcal{S} , моделируемых в пространстве состояний с помощью уравнений следующего

вида

$$x_k = F_{k-1}(\theta)x_{k-1} + D_k(\theta)u_k + G_k(\theta)w_k, \quad (2.1)$$

$$z_{i,k} = H_{i,k}(\theta)x_k + v_{i,k}, \quad k = \overline{1, K}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (2.2)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{x}_0(\theta) &\triangleq \mathbb{E}\{x_0\}, \quad \Pi_0(\theta) \triangleq \mathbb{E}\{[x_0 - \bar{x}_0(\theta)][x_0 - \bar{x}_0(\theta)]^T\}; \\ \mathbb{E}\{w_k\} &= 0, \quad \mathbb{E}\{w_k w_k^T\} = Q_k(\theta) > 0; \quad \mathbb{E}\{v_{i,k}\} = 0, \quad \mathbb{E}\{v_{i,k} v_{i,k}^T\} = R_{i,k}(\theta) > 0; \\ \mathbb{E}\{v_{i,k} w_k^T\} &= 0, \quad \mathbb{E}\{x_0 w_k^T\} = 0, \quad \mathbb{E}\{x_0 v_{i,k}^T\} = 0, \quad \mathbb{E}\{v_{i,k} v_{j,k}^T\} = 0 \quad \forall i \neq j. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Рассмотрим сеть сенсоров с полносвязной топологией, состоящую из N узлов, в которой каждый узел i имеет возможность вычислять собственные оценки $\hat{x}_{i,k}$ вектора состояния x_k . Измерения и оценки, получаемые в узлах, называют локальными [3]. Предположим, что модель динамики исследуемого процесса (2.1) одинаковая в каждом узле, локальные измерения описываются уравнением (2.2), причем шумы измерений $v_{i,k}$ и $v_{j,k}$ в узлах i и j ($i, j = \overline{1, N}$) некоррелированы. Кроме того, модель (2.1)–(2.2) параметризована по $\theta \in \mathbb{R}^p$, где θ – модельный параметр, характеризующий режим функционирования исследуемой динамической системы \mathcal{S} .

Предположим, что $\theta \in \mathcal{D}(\theta)$, где \mathcal{D} – компакт в \mathbb{R}^p . Далее считаем, что динамическая система \mathcal{S} , представленная моделью (2.1)–(2.2), функционирует в квазистационарном режиме и ее «нормальному» режиму работы соответствует конкретное значение модельного параметра $\theta = \theta^*$. Рассмотрим задачу автоматического контроля возможных внезапных нарушений нормального режима функционирования динамической системы \mathcal{S} .

Задача дискретной фильтрации заключается в вычислении оценок \hat{x}_k вектора состояния x_k по данным измерений z_k в каждый дискретный момент времени k [1]. Для дискретных линейных стохастических систем с гауссовскими шумами оптимальным алгоритмом оценивания является дискретный фильтр Калмана. Если структура модели (2.1)–(2.2) известна, но ее матрицы зависят от модельного параметра θ , то алгоритм оценивания строят в форме адаптивного фильтра Калмана, в котором матрицы-параметры фильтра также зависят от настраиваемого параметра θ . Пусть в адаптивном фильтре $\theta = \theta^*$. При нормальном режиме работы системы \mathcal{S} такой адаптивный фильтр будет оптимальным. В случае непредвиденного изменения значения параметра θ нормальный режим работы динамической системы нарушается, и алгоритм фильтрации теряет свойство оптимальности. Таким образом, возникает задача контроля оптимальности адаптивного фильтра, решением которой является построение специального решающего правила, которое должно быть включено в алгоритм адаптивной фильтрации.

Существует множество различных подходов к решению задачи контроля [4–6] и др. Основные методы решения тесно связаны с хорошо известной задачей о разладке [7]. Основой для диагностики в этом случае служит невязка измерений:

$$\nu_k = z_k - H_k \hat{x}_{k|k-1},$$

которая при корректной модели является независимой гауссовой последовательностью с нулевым средним и ковариацией $B_k = H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k$. Любое отклонение от этих свойств сигнализирует о «разладке» – то есть о том, что распределение невязки измерений изменилось после некоторого момента τ , называемого моментом разладки. Это

делает задачу контроля оптимальности частным случаем последовательного обнаружения разладки, как показано в [5], [8].

Математические методы контроля на основе аналитической избыточности изложены в [9]. Их удобно применять для контроля оптимальности рекуррентных алгоритмов обработки информации, каким и является дискретный фильтр Калмана. В [10] предложен метод автоматического контроля номинального режима функционирования динамической системы, основанный на сочетании метода вспомогательного функционала качества [6], который позволяет контролировать оптимальность адаптивного дискретного фильтра по критерию близости к нулю градиента вспомогательного функционала качества, и численно эффективной модификации адаптивного фильтра, основанной на применении модифицированной взвешенной ортогонализации Грама-Шмидта, позволяющей организовать численно устойчивые к ошибкам машинного округления вычисления в адаптивном фильтре.

В мультисенсорных сетях контроль усложняется отсутствием единого центра и зависимостью между узлами, а для решения задачи автоматического контроля оптимальности необходимо применять так называемые распределенные или децентрализованные алгоритмы дискретной фильтрации (Consensus KF, CI-KF и др.) [2]. Контроль оптимальности фильтра в этом случае может выполняться как локально, так и на глобальном уровне. Подходы к диагностике в таких системах развивались в контексте задачи обнаружения и локализации нарушений [11–12].

В децентрализованных системах оптимальность фильтра зависит от строгого соблюдения предположений о полноте информации и независимости данных. При наличии неопределенности происхождения измерений или неполного знания глобальной модели, стандартный распределенный фильтр Калмана становится несостоятельным: его апостериорная ковариация занижает истинную дисперсию ошибки, что эквивалентно потере оптимальности. Для решения этой проблемы были разработаны специализированные алгоритмы, которые активно поддерживают согласованность оценок, например:

1. Double Debaised Distributed Kalman Filter (DЗKF) [13] – метод устраняет смещение оценки состояния и ее ковариационной матрицы за счет введения двух поправочных матриц. Он особенно эффективен в сценариях с неопределенностью данных, где традиционные методы дают смещенные результаты. DЗKF позволяет восстановить состояние, делая его пригодным для надежного контроля оптимальности через метрики типа NEES (Normalized Estimation Error Squared).
2. Hypothesizing Distributed Kalman Filter (HKF) [14] – подход снимает требование полного знания глобальной модели. Вместо этого каждый узел формулирует гипотезу о структуре измерений. Алгоритм остается оптимальным, если гипотеза верна, и обеспечивает согласованные оценки даже при ограниченной коммуникации. HKF можно рассматривать как механизм самонастройки, поддерживающий оптимальность в условиях неполной информации.

Таким образом, современные подходы к контролю оптимальности в распределенных системах переходят от внешнего мониторинга к встроенным механизмам самодиагностики и коррекции.

В данной работе для контроля оптимальности распределенного дискретного фильтра Калмана предлагается использовать градиент критерия оптимальности, который строится на основе отрицательной логарифмической функции правдоподобия. Значения критерия децентрализованно вычисляются всеми узлами сети на основе величин,

получаемых с помощью распределенного дискретного информационного фильтра Калмана [3]. Новым результатом является алгоритм децентрализованного вычисления градиента критерия оптимальности.

3. Распределенный дискретный информационный фильтр

Идея распределенной обработки измерительных данных состоит в возможности выражения глобальных обновлений информационного вектора и информационной матрицы через локальные [15]. Локальные обновления вычисляются в каждом узле и передаются всем остальным узлам. Распределенный дискретный информационный фильтр Калмана представим алгоритмом 1, в предположении, что все матрицы могут зависеть от модельного параметра θ , то есть $F_k = F_k(\theta)$, $D_k = D_k(\theta)$, $G_k = G_k(\theta)$ и т. д. Также предполагаем, что матрицы $F_k(\theta)$ являются неособенными для $\theta \in \mathcal{D}(\theta)$, где $\mathcal{D}(\theta)$ – область определения параметра θ .

Алгоритм 1. Распределенный информационный фильтр Калмана.

For $k = \overline{1, K}$

I. Локальное обновление по времени

$$A_k = F_k^{-T} \hat{Y}_{k-1} F_k^{-1}, \quad (3.1)$$

$$C_k = G_k^T A_k G_k + Q_k^{-1}, \quad (3.2)$$

$$L_k = A_k G_k C_k^{-1}, \quad (3.3)$$

$$\tilde{y}_k = [I - L_k G_k^T] F_k^{-T} (\hat{y}_{k-1} + \hat{Y}_{k-1} F_k^{-1} D_k u_k), \quad (3.4)$$

$$\tilde{Y}_k = [I - L_k G_k^T] A_k. \quad (3.5)$$

II. Локальное обновление по измерениям

$$\Delta y_{i,k} = H_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} z_{i,k}, \quad (3.6)$$

$$\Delta Y_{i,k} = H_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} H_{i,k}^T. \quad (3.7)$$

III. Коммуникация и ассимиляция

$$\hat{Y}_{i,k} = \tilde{Y}_{i,k} + \sum_{j=1}^N \Delta Y_{j,k}, \quad (3.8)$$

$$\hat{y}_{i,k} = \tilde{y}_{i,k} + \sum_{j=1}^N \Delta y_{j,k}. \quad (3.9)$$

Здесь $i = \overline{1, N}$. В любой момент времени k в каждом из N узлов мультисенсорной сети доступна оценка вектора состояния $\hat{x}_{i,k} = \hat{Y}_{i,k}^{-1} \hat{y}_{i,k}$.

End For

Как показано в [3], децентрализованный фильтр (3.1)–(3.9) эквивалентен централизованному (стандартному) алгоритму Калмана.

Для построения метода автоматического контроля оптимальности нам необходимо записать так называемые уравнения чувствительности, которые получаются в результате дифференцирования уравнений алгоритма фильтрации [16].

Применяя правила матричного-векторного дифференцирования, запишем уравнения чувствительности распределенного дискретного информационного фильтра. Предположим, что элементы всех матриц и векторов являются дифференцируемыми функциями по параметру $\theta \in \mathcal{D}(\theta)$. Для простоты изложения считаем, что θ – скаляр.

Алгоритм 2. Уравнения чувствительности распределенного информационного фильтра.

For $k = \overline{1, K}$

I. Локальное обновление по времени

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} A_k &= \left(\frac{\partial}{\partial \theta} F_k^{-T} \right) \hat{Y}_{k-1} F_k^{-1} + F_k^{-T} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \hat{Y}_{k-1} \right) F_k^{-1} + F_k^{-T} \hat{Y}_{k-1} \frac{\partial}{\partial \theta} F_k^{-1}, \\ \frac{\partial}{\partial \theta} F_k^{-1} &= -F_k^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} F_k \right) F_k^{-1}, \\ \frac{\partial}{\partial \theta} C_k &= \left(\frac{\partial}{\partial \theta} G_k^T \right) A_k G_k + G_k^T \left(\frac{\partial}{\partial \theta} A_k \right) G_k + G_k^T A_k \frac{\partial}{\partial \theta} G_k - Q_k^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} Q_k \right) Q_k^{-1}, \\ \frac{\partial}{\partial \theta} L_k &= \left(\frac{\partial}{\partial \theta} A_k \right) G_k C_k^{-1} + A_k \left(\frac{\partial}{\partial \theta} G_k \right) C_k^{-1} - A_k G_k C_k^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} C_k \right) C_k^{-1}, \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \tilde{y}_k &= - \left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} L_k \right) G_k^T + L_k \frac{\partial}{\partial \theta} G_k^T \right] F_k^{-T} (\hat{y}_{k-1} + \hat{Y}_{k-1} F_k^{-1} D_k u_k) + \\ &\quad + [I - L_k G_k^T] \left(\frac{\partial}{\partial \theta} F_k^{-T} \right) (\hat{y}_{k-1} + \hat{Y}_{k-1} F_k^{-1} D_k u_k) + \\ &\quad + [I - L_k G_k^T] F_k^{-T} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \hat{y}_{k-1} + \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \hat{Y}_{k-1} \right) F_k^{-1} D_k u_k + \right. \\ &\quad \left. + \hat{Y}_{k-1} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} F_k^{-1} \right) D_k u_k + \hat{Y}_{k-1} F_k^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} D_k \right) u_k \right), \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \tilde{Y}_k &= - \left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} L_k \right) G_k^T + L_k \frac{\partial}{\partial \theta} G_k^T \right] A_k + [I - L_k G_k^T] \frac{\partial}{\partial \theta} A_k. \end{aligned}$$

II. Локальное обновление по измерениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \Delta y_{i,k} &= \left(\frac{\partial}{\partial \theta} H_{i,k}^T \right) R_{i,k}^{-1} z_{i,k} - H_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} R_{i,k} \right) R_{i,k}^{-1} z_{i,k}, \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \Delta Y_{i,k} &= \left(\frac{\partial}{\partial \theta} H_{i,k}^T \right) R_{i,k}^{-1} H_{i,k}^T - H_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} R_{i,k} \right) R_{i,k}^{-1} H_{i,k}^T + H_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} \frac{\partial}{\partial \theta} H_{i,k}^T. \end{aligned}$$

III. Коммуникация и ассимиляция

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{Y}_{i,k} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \tilde{Y}_{i,k} + \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial \theta} \Delta Y_{j,k}, \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{y}_{i,k} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \tilde{y}_{i,k} + \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial \theta} \Delta y_{j,k}. \end{aligned}$$

Здесь $i = \overline{1, N}$.

End For

4. Новый метод автоматического контроля оптимальности

В качестве критерия оптимальности выберем отрицательную логарифмическую функцию правдоподобия [16]

$$\mathcal{J}(\theta, Z_1^K) = \frac{Km}{2} \ln(2\pi) + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^K \left[\ln \det B_k + \|\nu_k\|_{B_k^{-1}}^2 \right], \quad (4.1)$$

где m – общий размер векторов измерений; ν_k – невязка измерений; B_k – ковариационная матрица невязки измерений в стандартном алгоритме Калмана.

Обычно критерий (4.1) применяют для решения задачи идентификации параметров дискретных линейных стохастических систем. Минимизация данного критерия позволяет получить оптимальные оценки параметра θ по данным измерений $Z_1^K = [z_1, \dots, z_K]^T$. Главная идея данной работы заключается в том, что критерий (4.1) позволяет использовать его не только в качестве инструмента идентификации параметров модели динамической системы, но и для автоматического контроля оптимальности дискретного фильтра. Условие близости к нулю градиента $\mathcal{J}(\theta, Z_1^K)$ должно выполняться в точке, соответствующей оптимальному значению параметра θ^* алгоритма калмановской фильтрации.

В случае дискретных линейных стохастических систем с обычной моделью измерений предложенный подход является очевидным. Однако, в случае стохастической системы с мультисенсорной моделью измерений для решения задачи контроля необходимо разработать метод вычисления значений критерия (4.1) и его градиента в терминах распределенного дискретного фильтра Калмана. Для этого в каждом узле сети должна быть доступна информация из всех других узлов, чтобы можно было вычислить полное значение критерия оптимальности и его градиента [17]. Это позволит автоматически контролировать оптимальность алгоритма фильтрации в каждом узле и скорейшим образом принять меры при нарушении «нормального» режима.

Предположим, что в текущий дискретный момент времени k значение параметра $\theta = \theta^*$. Тогда значение градиента критерия оптимальности теоретически равно нулю. Если затем в некоторый момент времени k_1 значение модельного параметра θ , соответствующее текущему режиму функционирования динамической системы, изменится, а в алгоритме распределенного дискретного фильтра значение модельного параметра θ останется равным θ^* , то значение градиента критерия (4.1) будет отлично от нуля с некоторым пороговым значением $\varepsilon > 0$, что свидетельствует о потере алгоритмом распределенной дискретной фильтрации свойства оптимальности. Изложенная идея была впервые представлена в [10] в отношении критерия вспомогательного функционала качества и дискретной линейной стохастической системы со стандартной моделью измерений.

Таким образом, критерий автоматического контроля оптимальности распределенного дискретного фильтра Калмана будет иметь вид:

$$\|\nabla_{\theta} \mathcal{J}(\theta, Z_1^K)\| < \varepsilon, \quad (4.2)$$

где K – текущий отсчет времени. Следует отметить, что задача нахождения теоретической оценки порога ε в решающем правиле (4.2) выходит за рамки данной работы и будет рассмотрена в дальнейших исследованиях.

Для практической реализации метода автоматического контроля оптимальности разработаем алгоритм вычисления градиента критерия (4.1) в терминах алгоритмов 1 и 2.

Сформулируем основной теоретический результат работы.

Предложение 4.1. *Значения критерия оптимальности (4.1) и его градиента в терминах распределенного дискретного информационного фильтра Калмана можно вычислить согласно выражениям*

$$\mathcal{J}(\theta, Z_1^K) = \frac{Km}{2} \ln(2\pi) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \left[\ln \det \tilde{Y}_k - \ln \det \hat{Y}_k + \sum_{i=1}^N \ln \det R_{i,k} + \|\tilde{y}_k\|_{\tilde{Y}_k}^2 - \|\hat{y}_k\|_{\hat{Y}_k}^2 + \sum_{i=1}^N z_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} z_{i,k} \right] \quad (4.3)$$

и

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \mathcal{J}(\theta, Z_1^K) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln \det \tilde{Y}_k - \frac{\partial}{\partial \theta} \ln \det \hat{Y}_k + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial \theta} \ln \det R_{i,k} + \frac{\partial}{\partial \theta} \|\tilde{y}_k\|_{\tilde{Y}_k}^2 - \frac{\partial}{\partial \theta} \|\hat{y}_k\|_{\hat{Y}_k}^2 + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial \theta} \left(z_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} z_{i,k} \right) \right]. \quad (4.4)$$

Доказательство. Докажем, что выражения (4.1) и (4.3) алгебраически эквивалентны. Сначала покажем, что

$$\ln \det B_k = \ln \det R_k + \ln \det \tilde{Y}_k - \ln \det \hat{Y}_k \quad (4.5)$$

и

$$\ln \det R_k = \sum_{i=1}^N \ln \det R_{i,k}. \quad (4.6)$$

Пусть \tilde{S}_k и \hat{S}_k – квадратные корни Холецкого в разложении информационных матриц \tilde{Y}_k и \hat{Y}_k , то есть $\tilde{Y}_k = \tilde{S}_k^T \tilde{S}_k$ и $\hat{Y}_k = \hat{S}_k^T \hat{S}_k$. Верхняя треугольная матрица $R_k^{1/2}$ – квадратный корень Холецкого в разложении ковариационной матрицы R_k . Используя уравнения квадратно-корневой модификации фильтра Калмана [18], нетрудно показать, что

$$\det B_k = \left(\frac{\det R_k^{1/2} \det \tilde{S}_k}{\det \hat{S}_k} \right)^2 = \frac{\det R_k^{1/2} \cdot \det R_k^{1/2} \cdot \det \tilde{S}_k \cdot \det \tilde{S}_k}{\det \hat{S}_k \cdot \det \hat{S}_k} = \frac{\det R_k \cdot \det \tilde{Y}_k}{\det \hat{Y}_k},$$

откуда по свойствам логарифма произведения и частного получаем (4.5).

В силу (2.3) ковариационная матрица $R_k = \text{diag}[R_{1,k}, \dots, R_{N,k}]$ – блочно-диагональная. Следовательно,

$$\det R_k = \sum_{i=1}^N \det R_{i,k},$$

откуда из свойств логарифма произведения следует выражение (4.6).

Теперь покажем, что

$$\|\nu_k\|_{B_k^{-1}}^2 = \|\tilde{y}_k\|_{\tilde{Y}_k^{-1}}^2 - \|\hat{y}_k\|_{\hat{Y}_k^{-1}}^2 + \|R_k^{-1/2} z_k\|^2. \quad (4.7)$$

Учитывая связь между стандартным и квадратно-корневым информационными фильтрами, можно показать [17], что

$$\|\nu_k\|_{B_k^{-1}}^2 = \|\tilde{s}_k\|^2 - \|\hat{s}_k\|^2 + \|R_k^{-1/2} z_k\|^2, \quad (4.8)$$

где

$$\tilde{y}_k = \tilde{Y}_k \tilde{x}_k = \tilde{S}_k^T \tilde{S}_k \tilde{x}_k, \quad \tilde{y}_k = \tilde{S}_k^T \tilde{s}_k, \quad \tilde{S}_k^{-T} \tilde{y}_k = \tilde{s}_k$$

и

$$\hat{y}_k = \hat{Y}_k \hat{x}_k = \hat{S}_k^T \hat{S}_k \hat{x}_k, \quad \hat{y}_k = \hat{S}_k^T \hat{s}_k, \quad \hat{S}_k^{-T} \hat{y}_k = \hat{s}_k.$$

Тогда

$$\|\tilde{s}_k\|^2 = \|\tilde{S}_k^{-T} \tilde{y}_k\|^2 = \tilde{y}_k^T \tilde{S}_k^{-1} \tilde{S}_k^{-T} \tilde{y}_k = \tilde{y}_k^T \tilde{Y}_k^{-1} \tilde{y}_k = \|\tilde{y}_k\|_{\tilde{Y}_k^{-1}}^2 \quad (4.9)$$

Аналогично,

$$\|\hat{s}_k\|^2 = \|\hat{y}_k\|_{\hat{Y}_k^{-1}}^2. \quad (4.10)$$

Подставив (4.9) и (4.10) в (4.8), получаем (4.7). Таким образом, эквивалентность выражений (4.1) и (4.3) доказана.

Выражение (4.4) получается прямым дифференцированием выражения (4.3).

Доказательство завершено.

Уточним некоторые детали реализации градиента критерия оптимальности (4.2).

1. Если параметр $\theta \in \mathbb{R}^p$ является векторным, то

$$\nabla_{\theta} \mathcal{J}(\theta, Z_1^K) = \left[\frac{\partial}{\partial \theta_1} \mathcal{J}(\theta, Z_1^K), \dots, \frac{\partial}{\partial \theta_p} \mathcal{J}(\theta, Z_1^K) \right]^T,$$

где каждый элемент вектора-градиента определяется выражением (4.4).

2. Пусть $A \equiv A(\theta)$ – параметризованная по θ квадратная невырожденная матрица. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln \det A = \frac{1}{\det A} \frac{\partial}{\partial \theta} \det A = \text{tr} \left(A^{-1} \frac{\partial}{\partial \theta} A \right),$$

где $\text{tr}(A)$ – след матрицы A .

3. Пусть $x \equiv x(\theta)$ – вектор в \mathbb{R}^n , параметризованный по θ , $A \equiv A(\theta)$ – параметризованная по θ квадратная невырожденная матрица размера $n \times n$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \|x\|_{A^{-1}}^2 &= \frac{\partial}{\partial \theta} (x^T A^{-1} x) = \left(\frac{\partial}{\partial \theta} x^T \right) A^{-1} x - x^T A^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} A \right) A^{-1} x + x^T A^{-1} \frac{\partial}{\partial \theta} x \\ &= 2 \left(\frac{\partial}{\partial \theta} x^T \right) A^{-1} x - x^T A^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} A \right) A^{-1} x. \end{aligned}$$

5. Результаты вычислительных экспериментов и их обсуждение

Рассмотрим модель кругового движения объекта на плоскости, описываемую векторно-матричным уравнением [19]:

$$x_k = Fx_{k-1} + D^R u_k + Gw_k, \quad (5.1)$$

где

$$F = \begin{bmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & \Phi \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} \cos \omega\tau & \omega^{-1} \sin \omega\tau \\ -\omega \sin \omega\tau & \cos \omega\tau \end{bmatrix},$$

$$D^R = \begin{bmatrix} (x_{1,0} + \omega^{-1}x_{4,0})(1 - \cos \omega\tau) \\ (\omega x_{1,0} + x_{4,0}) \sin \omega\tau \\ (x_{3,0} - \omega^{-1}x_{2,0})(1 - \cos \omega\tau) \\ (\omega x_{3,0} - x_{2,0}) \sin \omega\tau \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

k – дискретный отсчет времени, $x_k = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]_k^T$ – вектор состояния, τ – шаг дискретизации, $\omega = \frac{|v_0|}{r} > 0$, r – радиус поворота, $v_0 = \begin{bmatrix} x_{2,0} \\ x_{4,0} \end{bmatrix}$ – вектор скорости в начальной точке с координатами $(x_{1,0}, x_{3,0})$, $u_{k-1} \equiv 1$, $w_k \sim \mathcal{N}(0, Q)$.

Модель (5.1) описывает движение объекта по часовой стрелке (поворот направо) из заданной начальной точки с постоянной скоростью.

Рассмотрим модель измерений с двумя сенсорами, измеряющими, соответственно, координаты x и y объекта:

$$z_{i,k} = H_{i,k}x_k + v_{i,k}, \quad i = 1, 2,$$

$$H_{1,k} = [1 \ 0 \ 0 \ 0], \quad R_{1,k} = 0.1; \quad H_{2,k} = [0 \ 0 \ 1 \ 0], \quad R_{2,k} = 0.1.$$

Моделирование движения объекта и процесса контроля оптимальности будем проводить в системе MATLAB. Пусть $\tau = 0.1$, $w_k \sim \mathcal{N}(0, 0.001I_2)$, $x_0 = [0 \ 2 \ 0 \ 2]^T$, $\theta = r$ и истинное значение параметра $\theta^* = 4$. Таким образом, подконтрольным параметром модели, значение которого может меняться, является радиус поворота. На рис. 5.1 приведен график траектории движения объекта и зашумленных измерений для $K = 50$, а на рис. 5.2 – соответствующие графики критерия оптимальности и его градиента, полученные по результатам 50 измерений для $\theta \in [1; 7]$.

Из приведенных на рис. 5.2 графиков видно, что вычисление критерия оптимальности и его градиента в обоих сенсорах происходит одинаково. Критерий оптимальности имеет минимум в точке θ^* , соответствующей оптимальному значению, а градиент критерия оптимальности при этом значении равен нулю.

Для настройки параметра θ могут быть использованы встроенные процедуры оптимизации MATLAB, например, `fminunc` для безусловной минимизации и `fmincon` для условной, причем предложенный в работе метод вычисления градиента критерия оптимальности позволяет использовать градиентные версии указанных функций. Для этого в настройках оптимизаторов нужно установить опцию `'SpecifyObjectiveGradient' = true` и запрограммировать целевую функцию для вычисления значений критерия идентификации и его градиента по выражениям (4.3) и (4.4).

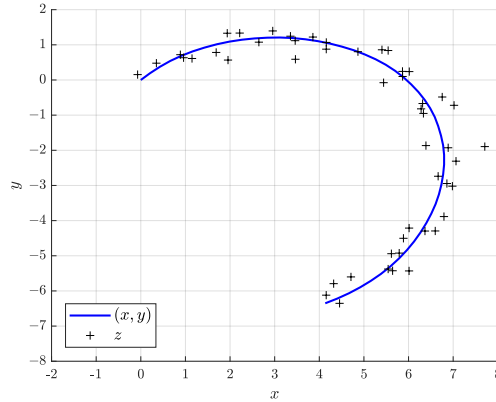


Рис. 5.1. Траектория объекта и измерения

Fig. 5.1. Object trajectory and measurements

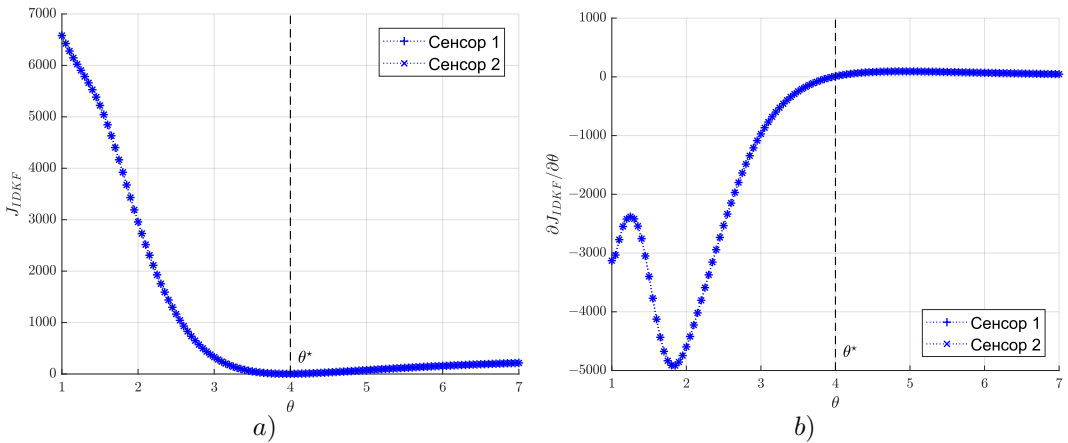


Рис. 5.2. а) Критерий оптимальности, б) градиент критерия оптимальности
Fig. 5.2. а) The optimality criterion, б) the gradient of the optimality criterion

В табл. 5.1 приведены усредненные результаты идентификации значения параметра θ обеими функциями для серии из 500 экспериментов. В качестве области поиска для функции `fmincon` использовался отрезок $[1; 7]$, а в качестве начального приближения для обеих функций в каждом эксперименте выбиралось случайное значение из данного отрезка. Из таблицы видно, что результаты идентификации значения параметра функциями `fmincon` и `fminunc` совпадают.

Теперь добавим к траектории объекта, изображенной на рис. 5.1, участок с поворотом против часовой стрелки длиной 20 тактов с тем же радиусом (рис. 5.3а). Модель кругового движения против часовой стрелки (поворот налево) отличается от мо-

Таблица 5.1. Результаты идентификации

Table 5.1. Identification results

Функция/Function	Среднее/Mean	RMSE	MAPE
fminunc	4.005086	0.059714	1.197523
fmincon	4.005086	0.059714	1.197523

дели (5.1) только матрицей управления:

$$D^L = \begin{bmatrix} (x_{1,0} - \omega^{-1}x_{4,0})(1 - \cos \omega\tau) \\ (\omega x_{1,0} - x_{4,0}) \sin \omega\tau \\ (x_{3,0} + \omega^{-1}x_{2,0})(1 - \cos \omega\tau) \\ (\omega x_{3,0} + x_{2,0}) \sin \omega\tau \end{bmatrix}.$$

Пусть истинное значение параметра $\theta^* = 4$ известно. На участке траектории, соответствующем повороту направо, значение градиента будет оставаться близким к нулю и удовлетворять условию $|\partial J/\partial \theta| < \varepsilon$, где ε – некоторый заданный порог, так как модель (5.1) с данным значением параметра будет являться оптимальной для распределенного фильтра. При смене режима движения значение модуля градиента начинает расти (рис. 5.3б), что говорит о необходимости повторной идентификации режима движения и перенастройки модельного параметра θ .

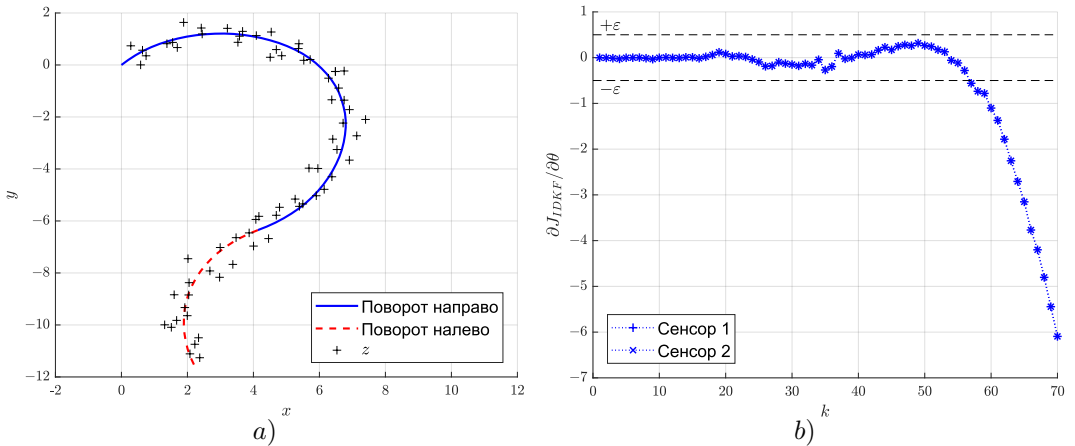


Рис. 5.3. а) Траектория объекта и измерения со сменой режима движения, б) градиент критерия оптимальности

Fig. 5.3. a) Object trajectory and measurements with changing motion mode, b) the gradient of the optimality criterion

6. Заключение

В работе предложен новый метод автоматического контроля оптимальности распределенного дискретного фильтра Калмана, основанный на уравнениях чувствительности алгоритма распределенной дискретной фильтрации и равенстве нулю градиента

критерия оптимальности по модельному векторному параметру θ . Достоинства предложенного решения заключаются в следующем:

1. Выбор структуры адаптивного фильтра в виде распределенного дискретного информационного фильтра Калмана, дополненного возможностью вычисления функций чувствительности по модельному векторному параметру θ , позволяет вычислять градиент критерия оптимальности на каждом шаге работы алгоритма.
2. Выбор критерия оптимальности в форме квадратичного функционала позволяет автоматически контролировать оптимальность адаптивного дискретного распределенного фильтра по условию близости к нулю градиента критерия в точке минимума, что соответствует оптимальному значению θ^* модельного параметра θ .
3. Алгоритм вычисления градиента критерия оптимальности в адаптивном распределенном дискретном фильтре Калмана представлен в удобной рекуррентной форме и позволяет вычислить значение градиента критерия в каждом узле мультисенсорной сети.

Основным теоретическим результатом работы является Предложение 4.1, включающее все аспекты представленного вычислительного метода автоматического контроля оптимальности распределенного дискретного информационного фильтра Калмана.

Результаты работы могут найти применение при решении задач совместного контроля и идентификации параметров в классе дискретных линейных стохастических систем с мультисенсорной моделью измерений.

Благодарности. Работа выполнена в рамках Дополнительного соглашения № 073-03-2025-066/1 от 19.03.2025 г. к Соглашению о предоставлении субсидии из федерального бюджета на финансовое обеспечение выполнения государственного задания на оказание государственных услуг (выполнения работ) № 073-03-2025-066 от 16.01.2025 г., заключенного между ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И. Н. Ульянова» и Министерством просвещения Российской Федерации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Grewal M. S., Andrews A. P. Kalman filtering : Theory and practice using MATLAB. New Jersey: Prentice Hall, 2001. 401 p.
2. Mahmoud M., Khalid H. Distributed Kalman filtering: A bibliographic review. *IET Control Theory and Applications*. 2013. Vol. 7, no. 4. P. 483–501. DOI: 10.1049/iet-cta.2012.0467
3. Rao B. S., Durrant-Whyte H. F. Fully decentralised algorithm for multisensor Kalman filtering. *IEE Proceedings D (Control Theory and Applications)*. 1991. Vol. 138, no. 5. P. 413–420. DOI: 10.1049/ip-d.1991.0057
4. Обнаружение изменения свойств сигналов и динамических систем / под ред. М. Бассвиль, А. Банвениста; пер. с англ. И. Б. Вильховченко и др. М.: Мир, 1989. 280 с.

5. Lai T. L. Sequential Analysis: Some Classical Problems and New Challenges. *Statistica Sinica*. 2001. Vol. 11. P. 303–408.
6. Адаптивные системы фильтрации, управления и обнаружения : коллективная монография / И. В. Семушин, Ю. В. Цыганова, М. В. Куликова и др. Ульяновск : УлГУ, 2011. 298 с. ISBN 978-5-88866-399-8.
7. Ширяев А. Н. Вероятностно-статистические методы в теории принятия решений. 2-е изд., новое. М. : МЦНМО, 2014. 144 с.
8. Basseville M., Nikiforov I. V. Detection of Abrupt Changes: Theory and Applications. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1993. 528 p.
9. Голован А. А., Мироновский Л. А. Алгоритмический контроль фильтра Калмана // *Автомат. и телемех.* 1993. № 7. С. 173–185.
10. Семушин И. В., Цыганова Ю. В., Цыганов А. В. Применение вспомогательного функционала качества для автоматического контроля оптимальности дискретного фильтра Калмана // *Вычислительные технологии*. 2020. Т. 25, № 3. С. 77–87. DOI: 10.25743/ICT.2020.25.3.009
11. Lai T. L. Sequential multiple testing and effective fault detection-isolation in stochastic systems. *IEEE Trans. Information Theory*. 2000. Vol. 46. P. 595–608. DOI: 10.1109/18.825826
12. Zhang Q., Basseville M., Benveniste A. Early Warning of Slight Changes in Systems and Plants with Application to Condition Based Maintenance. *Automatica*. 1994. Vol. 30, no. 1. P. 95–114.
13. Govaers F., Charlish A., Koch W. Covariance debiasing for the Distributed Kalman Filter. *Proceedings of the 16th International Conference on Information Fusion (FUSION)*. Istanbul, Turkey, 2013. P. 61–67.
14. Reinhardt M., Noack B., Hanebeck U. D. The Hypothesizing Distributed Kalman Filter. *2012 IEEE International Conference on Multisensor Fusion and Integration for Intelligent Systems (MFI)*. Hamburg, Germany, 2012. P. 305–312. DOI: 10.1109/MFI.2012.6343017
15. Hidayat Z., Babuška R., De Schutter B., Núñez A. Decentralized Kalman filter comparison for distributed-parameter systems: A case study for a 1D heat conduction process. *Proceedings of the 2011 IEEE International Conference on Emerging Technologies and Factory Automation (ETFA)*. Toulouse, France, 2011. P. 1–8. DOI: 10.1109/ETFA.2011.6059054
16. Gibbs B. P., Andrews A. P. Advanced Kalman filtering, least-squares and modeling : a practical handbook. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2011. 632 p.
17. Tsyganov A. V., Tsyganova Y. V. Parameter identification of discrete-time linear stochastic systems based on decentralized square-root information filtering. *Cybernetics and Physics*. 2025. Vol. 14, no. 2. P. 191–199.

18. Цыганова Ю. В., Куликова М. В. О современных ортогонализированных алгоритмах оптимальной дискретной фильтрации. // *Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование»*. 2018. Т. 11, № 4. С. 5–30. DOI: 10.14529/mmp180401
19. Семушин И. В., Цыганов А. В., Цыганова Ю. В., Голубков А. В., Винокуров С. Д. Моделирование и оценивание траектории движущегося объекта // *Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование»*. 2017. Т. 10, № 3. С. 108–119. DOI: 10.14529/mmp170309

*Поступила 03.11.2025; доработана после рецензирования 12.02.2026;
принята к публикации 25.02.2026*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. M. S. Grewal, A. P. Andrews, *Kalman filtering: Theory and practice using MATLAB*, Prentice Hall, New Jersey, 2001, 401 p.
2. M. Mahmoud, H. Khalid, “Distributed Kalman filtering: A bibliographic review”, *IET Control Theory and Applications*, **7**:4 (2013), 483–501. DOI: 10.1049/iet-cta.2012.0467
3. B. S. Rao, H. F. Durrant-Whyte, “Fully decentralised algorithm for multisensor Kalman filtering”, *IEE Proceedings D (Control Theory and Applications)*, **138**:5 (1991), 413–420. DOI: 10.1049/ip-d.1991.0057
4. M. Basseville, A. Benveniste (Eds.), *Detection of Abrupt Changes in Signals and Dynamical Systems*, Mir, Moscow, 1989, 280 p.
5. T. L. Lai, “Sequential analysis: some classical problems and new challenges”, *Statistica Sinica*, **11** (2001), 303–408.
6. I. V. Semushin, Yu. V. Tsyganova, M. V. Kulikova et al., *Adaptive Systems of Filtering, Control and Fault Detection*, USU, Ulyanovsk, 2011 (In Russ.), 298 p.
7. A. N. Shiryaev, *Veroyatnostno-statisticheskie metody v teorii prinjatija reshenij [Probabilistic-Statistical Methods in Decision Making Theory]*, 2nd ed., new, MCNMO, M., 2014 (In Russ.), 144 p.
8. M. Basseville, I. V. Nikiforov, *Detection of abrupt changes: theory and applications*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1993, 528 p.
9. A. A. Golovan, L. A. Mironovskii, “Algorithmic control of a Kalman filter”, *Autom. Remote Control*, **54**:7 (1993), 1183–1194.
10. I. V. Semushin, Yu. V. Tsyganova, A. V. Tsyganov, “Application of an auxiliary quality functional for automatic control of the optimality of a discrete Kalman filter”, *Vychislitel’nye Tekhnologii [Computational Technologies]*, **25**:3 (2020), 77–87 (In Russ.). DOI: 10.25743/ICT.2020.25.3.009

11. T. L. Lai, “Sequential multiple testing and effective fault detection-isolation in stochastic systems”, *IEEE Transactions on Information Theory*, **46** (2000), 595–608. DOI: 10.1109/18.825826
12. Q. Zhang, M. Basseville, A. Benveniste, “Early Warning of Slight Changes in Systems and Plants with Application to Condition Based Maintenance”, *Automatica*, **30**:1 (1994), 95–114.
13. F. Govaers, A. Charlish, W. Koch, “Covariance debiasing for the Distributed Kalman Filter”, *Proceedings of the 16th International Conference on Information Fusion (FUSION)* (Istanbul, Turkey, 2013), IEEE, 2013, 61–67.
14. M. Reinhardt, B. Noack, U.D. Hanebeck, “The Hypothesizing Distributed Kalman Filter”, *2012 IEEE International Conference on Multisensor Fusion and Integration for Intelligent Systems (MFI)* (Hamburg, Germany, 2012), IEEE, 2012, 305–312 DOI: 10.1109/MFI.2012.6343017.
15. Z. Hidayat, R. Babuška, B. De Schutter, A. Núñez, “Decentralized Kalman filter comparison for distributed-parameter systems: A case study for a 1D heat conduction process”, *Proceedings of the 2011 IEEE International Conference on Emerging Technologies and Factory Automation (ETFA)* (Toulouse, France, 2011), IEEE, 2011, 1–8 DOI: 10.1109/ETFA.2011.6059054.
16. B. P. Gibbs, *Advanced Kalman filtering, least-squares and modeling : a practical handbook*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2011, 632 p.
17. A. V. Tsyganov, Yu. V. Tsyganova, “Parameter identification of discrete-time linear stochastic systems based on decentralized square-root information filtering”, *Cybernetics and Physics*, **14**:2 (2025), 191–199.
18. Yu. V. Tsyganova, M. V. Kulikova, “On modern array algorithms for optimal discrete filtering”, *Vestnik YuUrGU. Ser. Mat. Model. Progr.*, **11**:4 (2018), 5–30 (In Russ.). DOI: 10.14529/mmp180401
19. I. V. Semushin, A. V. Tsyganov, Yu. V. Tsyganova, A. V. Golubkov, S. D. Vinokurov, “Modelling and estimation of a moving object trajectory”, *Bull. South Ural State Univ. Ser. Math. Model. Progr. Comput. Softw.*, **10**:3 (2017), 108–119. DOI: 10.14529/mmp170309

Submitted 03.11.2025; Revised 12.02.2026; Accepted 25.02.2026

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.