DOI 10.15507/2079-6900.28.202601.48-66 ISSN 2079-6900 (Print)
Оригинальная статья ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.958

Задачи определения ядра интегро-дифференциального уравнения в ограниченной области

Ж. Ш. Сафаров[1,2]

[1] *Ташкентский университет информационных технологий имени Мухаммада аль-Хоразмий (г. Ташкент, Узбекистан)*
[2] *Институт Математики им. В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан (г. Ташкент, Узбекистан)*

Аннотация. В работе исследуются обратные задачи определения ядра, зависящего от временной переменной, в интегральном члене многомерного интегро-дифференциального уравнения гиперболического типа. Сначала рассматривается прямая задача при предположении, что ядро интегрального члена известно. С использованием метода Фурье прямая задача сводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода относительно решения. Для решения получены априорные оценки, а также оценки его производных второго порядка. Далее в работе исследуются две обратные задачи. Первая обратная задача связана с определением ядра памяти волнового процесса по интегральному условию переопределения. Во второй обратной задаче ядро интегрального члена определяется по известному значению решения прямой задачи в фиксированной точке. В обоих случаях обратные задачи сводятся к нелинейным интегральным уравнениям Вольтерра второго рода типа свертки. С помощью принципа сжимающих отображений доказывается существование и единственность решений обратных задач в пространстве непрерывных функций с весовой нормой, а также устанавливается оценка условной устойчивости решения.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, обратная задача, метод Фурье, ядро интеграла, спектральная задача, теорема Банаха, неравенство Гронуолла

Для цитирования: Сафаров Ж. Ш. Задачи определения ядра интегро-дифференциального уравнения в ограниченной области // *Журнал Средневолжского математического общества.* 2026. Т. 28, № 1. С. 48–66. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202601.48-66

Об авторах:
Сафаров Журабек Шакарович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики, Ташкентский университет информационных технологий им. Мухаммада аль-Хоразмий (100084, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Амира Тимура, д. 108), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-9249-835X, j.safarov65@mail.ru

Original article

MSC2020 35R30

Problems of Determining the Kernel of an Integro-Differential Equation in a Bounded Domain

J. Sh. Safarov[1,2]

[1] *Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khwarizmi (Tashkent, Uzbekistan)*
[2] *V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics AS of the Republic of Uzbekistan (Tashkent, Uzbekistan)*

Abstract. The paper studies the inverse problem of the depending on a time variable kernel of the integral term of a multidimensional hyperbolic-type integro-differential equation. First, a direct problem is investigated, assuming that the kernel of the integral term is known. The Fourier method reduces this problem to solving a Volterra-type integral equation of the second kind with respect to the unknown function. A priori estimates for the desired function and for its second-order derivatives are obtained. Next, two inverse problems are studied. The first is determining the memory kernel of a wave process with an integral overdetermination condition. In the second inverse problem, the kernel of the integral term is found from the known solution of the direct problem at some fixed point. In both cases, the inverse problem is reduced to a nonlinear convolution-type Volterra integral equation of the second kind. The method of contracting mappings is used to prove the unique solvability of the posed inverse problems in the space of continuous functions with weighted norms, and an estimate for the conditional stability of the solution is obtained.

Keywords: integro-differential equation, inverse problem, Fourier method, integral kernel, spectral problem, Banach theorem, Gronwall inequality

For citation: *J. Sh. Safarov.* Problems of Determining the Kernel of an Integro-Differential Equation in a Bounded Domain. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 28:1(2026), 48–66. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202601.48-66

About the authors:
Safarov J. Shakarovich, D. Sci. (Phys. and Math.), Professor, Department of Higher Mathematics, Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khwarizmi (108, Timur St., Tashkent 100084, Uzbekistan), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-9249-835X, j.safarov65@mail.ru

1. Введение и постановка задачи

Обратные задачи для интегро-дифференциальных уравнений возникают во многих областях прикладной науки, таких как электродинамика, акустика, квантовая теория рассеяния, геофизика, астрономия и другие. Состояние исследуемой среды, в которой распространяются упругие и электромагнитные волны, в момент времени проведения эксперимента существенно зависит от её состояния во все предшествующие моменты времени. Математически данный эффект учитывается за счёт добавления в правые части классических уравнений распространения волн интегральных членов типа свёртки, описывающих явление запаздывания. В результате возникает необходимость исследования интегро-дифференциальных уравнений.

К настоящему времени исследование обратных задач, посвящённых определению одномерного или многомерного ядра интегрального члена интегро-дифференциального уравнения, является объектом научных интересов многих авторов. С различными постановками обратных задач для уравнений в частных производных второго порядка можно ознакомиться в монографиях и обзорных работах [1, 2].

Следует отметить вклад итальянского математика А. Лоренции и его соавторов, которыми были получены первые фундаментальные результаты в теории обратных задач для интегро-дифференциальных уравнений [3, 4]. В работах [5–8] исследованы одномерные обратные задачи определения ядра, входящего в интегро-дифференциальное уравнение с дельта-функцией в правой части либо в граничном условии. Для указанных задач доказаны теоремы существования и единственности решений на основе принципа сжимающих отображений, а также получены оценки условной устойчивости. Подобные задачи с распределёнными источниками возмущений изучены в работах [9, 10], где доказаны теоремы глобальной однозначной разрешимости обратных задач.

Работы [11–14] посвящены исследованию обратных задач нахождения многомерного ядра интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа. В этих работах доказаны теоремы локальной однозначной разрешимости поставленных задач в классе аналитических по пространственным переменным и непрерывных по временной переменной функций.

В настоящей работе исследуются две обратные задачи, заключающиеся в нахождении одномерного ядра свёртки интегрального члена многомерного интегро-дифференциального уравнения с гиперболическим оператором общего вида в главной части. При исследовании первой обратной задачи используется интегральное условие переопределённости, во второй задаче в качестве дополнительного условия выступает след решения прямой задачи в фиксированной точке n-мерной области. Основными результатами работы являются теоремы глобальной однозначной разрешимости обратных задач и устойчивости их решений.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$– ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. В области $D := \Omega \times (0, T]$ рассматривается интегро-дифференциальное уравнение

$$u_{tt} - Lu - k \cdot u = g(x, t), \quad (x, t) \in D, \tag{1.1}$$

с начальными

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{1.2}$$

и граничным условиями

$$u(x, t) = 0, \qquad (x, t) \in \partial D, \tag{1.3}$$

где $\partial D = \partial\Omega \times [0, T]$, $L = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\dfrac{\partial}{\partial x_j}\right) - c(x)$ – равномерный эллиптический оператор ($n \geq 1$), коэффициенты которого удовлетворяют условиям $a_{ij} = a_{ji}$, $c(x) \geq 0$, $x \in \bar{\Omega}$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $g(x, t)$ – заданные функции и

$$k \cdot u = \int\limits_0^t k(t - \tau)u(x, \tau)\, d\tau.$$

Нахождение функции $u(x, t)$ из (1.1)-(1.3) при известной $k(t)$ называется прямой задачей.

Определение 1.1. *Решением прямой задачи* (1.1)-(1.3) *называется функция* $u(x,t)$ *из класса* $C^2(\overline{D})$, *удовлетворяющая всем условиям задачи* (1.1)-(1.3).

Обратная задача 1. Обратная задача заключается в определении неизвестного ядра $k(t)$, $t>0$, если относительно решения прямой задачи (1.1)-(1.3) известна дополнительная информация

$$\Lambda[u(\cdot,t)] = \int\limits_{\Omega} u(x,t)h(x)dx = f(t), t\in[0,T], \tag{1.4}$$

где $h(x), f(t)$ – заданные функции.

В дальнейшем мы покажем, что для разрешимости обратной задачи функция $h(x)$ не должна быть ортогональна функции $\varphi(x)$, т. е. $(h(x),\varphi(x))\neq 0$, где $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение в $L_2(\Omega)$.

Обратная задача 2. Требуется найти ядро $k(t)$ по имеющейся дополнительной информации о решении прямой задачи (1.1)-(1.3) в некоторой точке $x_0\in\Omega$,

$$u(x_0,t) = h(t), \qquad 0\leq t\leq T, \tag{1.5}$$

где $h(t)$ – заданная функция.

2. Исследование прямой задачи

Исследование прямой задачи начнем с рассмотрения следующей спектральной задачи

$$Lv + \lambda^2 v = 0, \;\; x\in\Omega, \tag{2.1}$$

$$v\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.2}$$

Задача (2.1)-(2.2) имеет полное в $L_2(\Omega)$ множество ортонормированных собственных функций $v_m(x)$, $m\geq 1$ и счетное множество положительных собственных значений λ_m [15].

Предположим, что решение задачи (1.1)-(1.3) представляется в виде ряда Фурье

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} W_m(t)v_m(x), \tag{2.3}$$

где $v_m(x)$ – собственные функции задачи (2.1)-(2.2), $W_m(t)$ – коэффициенты Фурье, определяемые формулой

$$W_m(t) = (u, v_m) = \int\limits_{\Omega} u(x,t)v_m(x)dx. \tag{2.4}$$

Подставляя ряд (2.3) в уравнения (1.1)-(1.2) относительно функции $W_m(t)$, получим следующую задачу

$$W_m''(t) + \lambda_m^2 W_m(t) - \int\limits_0^t k(t-\theta)W_m(\theta)\,d\theta = g_m(t), \tag{2.5}$$

$$W_m(0) = \varphi_m, \quad W'_m(0) = \psi_m. \tag{2.6}$$

где

$$\varphi_m = (\varphi, v_m), \quad \psi_m = (\psi, v_m), \quad g_m(t) = (g, v_m)(t),$$

коэффициенты Фурье функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(x,t)$

$$\varphi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m v_m(x), \;\; \psi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m v_m(x), \;\; g(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} g_m(t) v_m(x). \tag{2.7}$$

После переноса интегрального члена в правую часть уравнение (2.5) рассматривается как линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с заданной функцией $G_m(t)$. Решение задачи (2.5)-(2.6) будем искать в виде суммы

$$W_m(t) = W_m^{(0)}(t) + W_m^{(1)}(t),$$

где $W_m^{(0)}$ решения задачи

$$W_m^{(0)\prime\prime} + \lambda_m^2 W_m^{(0)} = 0, \quad W_m^{(0)}(0) = \varphi_m, \quad (W_m^{(0)})'(0) = \psi_m,$$

функция $W_m^{(1)}$ выбирается как решение уравнения (2.5) с нулевыми начальными данными:

$$W_m^{(1)\prime\prime} + \lambda_m^2 W_m^{(1)} = G_m(t), \qquad W_m^{(1)}(0) = 0, \quad (W_m^{(1)})'(0) = 0.$$

Решая эти задачи, получим следующее интегральное уравнение

$$W_m(t) = \varphi_m \cos \lambda_m t + \frac{1}{\lambda_m} \psi_m \sin \lambda_m t + \frac{1}{\lambda_m} \int_0^t \sin \lambda_m (t-s) G_m(s) ds, \tag{2.8}$$

где

$$G_m(t) := g_m(t) + \int_0^t k(t-\theta) W_m(\theta)\, d\theta. \tag{2.9}$$

Наличие искомой функции под знаком сверточного интеграла в (2.5) не препятствует применению метода функции Коши. Меняется лишь статус получаемого интегрального уравнения: оно становится не просто явной формулой, а интегральным уравнением Вольтерры второго рода относительно функции $W_m(t)$.

Из теории интегральных уравнений следует, что решение интегрального уравнения вольтерровского типа второго рода единственно и может быть получено методом последовательных приближений.

Легко можно получить оценки для $|W_m(t)|$ и $|W''_m(t)|$. Из формулы (2.8) следует, что

$$|W_m(t)| = \left| \varphi_m \cos \lambda_m t + \frac{1}{\lambda_m} \psi_m \sin \lambda_m t + \frac{1}{\lambda_m} \int_0^t \sin \lambda_m (t-s) G_m(s) ds \right| \leq$$

$$\leq |\varphi_m| + \frac{1}{\lambda_m} |\psi_m| + \frac{1}{\lambda_m} \left| \int_0^t \sin \lambda_m (t-s) \left[g_m(s) + \int_0^s k(s-\theta) W_m(\theta)\, d\theta \right] (s) ds \right| \leq$$

$$\leq |\varphi_m| + \frac{1}{\lambda_m}|\psi_m| + \frac{1}{\lambda_m}\|g_m\|T + \frac{\|k\|}{\lambda_m}\int\limits_0^t (t-\theta)|W_m(\theta)|d\theta. \quad (2.10)$$

Отсюда, используя лемму Гроноулла, получим оценку

$$|W_m(t)| \leq \left(|\varphi_m| + \frac{1}{\lambda_m}|\psi_m| + \frac{1}{\lambda_m}\|g_m\|T\right) e^{\|k\|T^2/2\lambda_m}, \quad (2.11)$$

где $\|g_m\| = \max\limits_{0\leq t\leq T}|g_m(t)|$, $\|k\| = \max\limits_{0\leq t\leq T}|k(t)|$.

Далее, продифференцировав уравнение (2.8) дважды по переменной t и используя оценку (2.11), получаем следующую оценку для $|W_m''(t)|$

$$|W_m''(t)| \leq \left(|\varphi_m| + \frac{1}{\lambda_m}|\psi_m| + \frac{1}{\lambda_m}\|g_m\|T\right)\left(\lambda_m^2 + \|k\|T\left(1+\frac{T}{2}\lambda_m\right)e^{\|k\|T^2/2\lambda_m}\right). \quad (2.12)$$

Для дальнейших исследований воспользуемся следующей леммой.

Лемма 2.1. *Пусть $W_m^{(1)}(t)$ и $W_m^{(2)}(t)$ – два решения уравнения* (2.8), *соответствующие функциям $k^{(1)}(t)$, $k^{(2)}(t)$. Тогда имеет место следующая оценка*

$$|W_m^{(1)}(t)-W_m^{(2)}(t)| \leq \frac{1}{\lambda_m}\left(|\varphi_m| + \frac{1}{\lambda_m}|\psi_m| + \frac{1}{\lambda_m}\|g_m\|T\right) e^{(\|k^{(2)}\|+\|k^{(1)}\|)T^2/2\lambda_1}\frac{T^2}{2}\|k^{(1)}-k^{(2)}\|. \quad (2.13)$$

Доказательство. По условию леммы $W_m^{(1)}(t)$, $W_m^{(2)}(t)$ – два решения уравнения (2.8). Рассмотрим модуль разности этих функций

$$|W_m^{(1)}(t) - W_m^{(2)}(t)| \leq$$
$$\leq \left|\frac{1}{\lambda_m}\int\limits_0^t \sin\lambda_m(t-\theta)\int\limits_0^\theta \left[k^{(1)}(\tau)W_m^{(1)}(\theta-\tau) - k^{(2)}(\tau)W_m^{2}(\theta-\tau)\right]d\tau\, d\theta\right|. \quad (2.14)$$

Воспользуемся очевидным неравенством

$$|\varphi_k^{(1)}\varphi_s^{(1)} - \varphi_k^{(2)}\varphi_s^{(2)}| \leq |\varphi_k^{(1)} - \varphi_k^{(2)}||\varphi_s^{(1)}| + |\varphi_k^{(2)}||\varphi_s^{(1)} - \varphi_s^{(2)}|. \quad (2.15)$$

Тогда получим

$$|W_m^{(1)}(t) - W_m^{(2)}(t)| \leq \frac{1}{\lambda_m}\int\limits_0^t|\sin\lambda_m(t-\theta)|\int\limits_0^\theta\left[\left|k^{(1)}(\tau)\right|\left|W_m^{(1)}(\theta-\tau) - W_m^{(2)}(\theta-\tau)\right| + \right.$$
$$\left. + \left|W_m^{(2)}(\theta-\tau)\right|\left|k^{(1)}(\tau)-k^{(2)}(\tau)\right|\right]d\tau\, d\theta \leq$$
$$\leq \frac{1}{\lambda_m}\int\limits_0^t|\sin\lambda_m(t-\theta)|\int\limits_0^\theta\left|W_m^{(2)}(\theta-\tau)\right|\left|k^{(1)}(\tau)-k^{(2)}(\tau)\right|d\tau\, d\theta +$$
$$+ \frac{1}{\lambda_m}\int\limits_0^t|\sin\lambda_m(t-\theta)|\int\limits_0^\theta\left|k^{(1)}(\tau)\right|\left|W_m^{(1)}(\theta-\tau) - W_m^{(2)}(\theta-\tau)\right|d\tau\, d\theta. \quad (2.16)$$

Каждое слагаемое в правой части (2.16) оценим отдельно. Для оценки первого слагаемого воспользуемся формулой (2.11)

$$\frac{1}{\lambda_m}\int\limits_0^t |\sin\lambda_m(t-\theta)|\int\limits_0^\theta \left|W_m^{(2)}(\theta-\tau)\right|\left|k^{(1)}(\tau)-k^{(2)}(\tau)\right| d\tau\, d\theta \le$$
$$\le \frac{1}{\lambda_m}\frac{T^2}{2}\left(|\varphi_m|+\frac{1}{\lambda_m}|\psi_m|+\frac{1}{\lambda_m}\|g_m\|T\right)e^{\|k\|T^2/2\lambda_m}\|k^{(1)}-k^{(2)}\|, \quad (2.17)$$

где $\|k^{(1)}-k^{(2)}\| = \max\limits_{0\le t\le T}|k^{(1)}(t)-k^{(2)}(t)|$. Для оценки второго слагаемого (2.13), изменив порядок интегрирования, получим

$$\frac{1}{\lambda_m}\int\limits_0^t |\sin\lambda_m(t-\theta)|\int\limits_0^\theta \left|k^{(1)}(\tau)\right|\left|W_m^{(1)}(\theta-\tau)-W_m^{(2)}(\theta-\tau)\right| d\tau\, d\theta \le$$
$$\le \frac{1}{\lambda_m}\int\limits_0^t \left|W_m^{(1)}(\tau)-W_m^{(2)}(\tau)\right|\int\limits_\tau^t \left|k^{(1)}(\theta-\tau)\right| d\theta\, d\tau =$$
$$= \frac{1}{\lambda_m}\int\limits_0^t \left|W_m^{(1)}(\tau)-W_m^{(2)}(\tau)\right| k_1(\tau-t)\, d\tau, \quad (2.18)$$

где $k_1(t)=\int\limits_0^t \left|k^{(1)}(\theta)\right| d\theta$. Подставляя (2.17) и (2.18) в (2.16), находим

$$|W_m^{(1)}(t)-W_m^{(2)}(t)| \le \frac{1}{\lambda_m}\Bigg[\frac{T^2}{2}\left(|\varphi_m|+\frac{1}{\lambda_m}|\psi_m|+\frac{1}{\lambda_m}\|g_m\|T\right)e^{\|k\|T^2/2\lambda_m}\|k^{(1)}-k^{(2)}\|+$$
$$+\int\limits_0^t \left|W_m^{(1)}(\tau)-W_m^{(2)}(\tau)\right| k_1(t-\tau)\, d\tau\Bigg]. \quad (2.19)$$

Применив лемму Гронуолла к данному неравенству, получим оценку (2.13).
Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

Основным результатом данного раздела является следующая теорема.

Т е о р е м а 2.1. *Пусть* $k(t)\in C[0,T]$. *Кроме того выполнены условия:*

1. $a_{ij}(x)\in C^{[n/2]+2}(\bar\Omega)\cap C^{1,\gamma}(\Omega)$, $c(x)\in C^{[n/2]+1}(\bar\Omega)\cap C^{0,\gamma}(\Omega)$, $0<\gamma\le 1$;
2. $\varphi(x)\in H^{[n/2]+3}(\Omega)$, $\psi(x)\in H^{[n/2]+2}(\Omega)$;
3. $g(\cdot,t)\in H^{[n/2]+2}(\Omega)$, $g(x,\cdot)\in C[0,T]$;
4. $\varphi,\ L\varphi,\ldots,L^{[(n+4)/4]}\varphi\in H_0^1(\Omega)$, $\psi,\ L\psi,\ldots,L^{[(n+2)/4]}\psi\in H_0^1(\Omega)$;
5. $g(\cdot,t)$, $Lg(\cdot,t),\ldots,L^{[(n+2)/4]}g(\cdot,t)\in H_0^1(\Omega)$.

Тогда существует единственное классическое решение задачи (1.1)-(1.3).

Здесь H^s – соболевское пространство порядка s в области Ω, построенное на норме L_2, а H_0^1 – соболевское пространство первого порядка с нулевым следом на границе.

Доказательство. Продифференцировав (формально) ряд (2.3) по переменным x и t, получаем ряды

$$u_{tt}(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} W_m''(t) v_m(x), \tag{2.20}$$

$$Lu(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} W_m(t) L v_m(x) = -\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 W_m(t) v_m(x). \tag{2.21}$$

Докажем сходимость рядов (2.3), (2.20), (2.21).

Используя представление (2.3) и оценку (2.11), получим

$$\begin{gathered}
|u(x,t)| = \left|\sum_{m=1}^{\infty} W_m(t) v_m(x)\right| \le \sum_{m=1}^{\infty} |W_m(t)||v_m(x)| \le \\
\le \sum_{m=1}^{\infty} |v_m(x)| \left(|\varphi_m| + \frac{1}{\lambda_m}|\psi_m| + \frac{1}{\lambda_m}\|g_m\| t\right) e^{\|k\| t^2/2\lambda_m} \le \\
\le e^{\|k\| t^2/2\lambda_1} \left(\sum_{m=1}^{\infty} |\varphi_m||v_m(x)| + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\psi_m|}{\lambda_m}|v_m(x)| + t\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|g_m(t)|}{\lambda_m}|v_m(x)|\right).
\end{gathered} \tag{2.22}$$

Все ряды, находящиеся в скобках последней строки, сходятся по условиям 1-5 теоремы 2.1, поэтому ряд (2.3) сходится абсолютно и равномерно, так как он мажорируется сходящимся числовым рядом.

Аналогичным образом доказываются сходимости рядов (2.20) и (2.21). На самом деле

$$\begin{gathered}
|u_{tt}(x,t)| \le \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 |\varphi_m v_m(x)| + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m |\psi_m v_m(x)| + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m |g_m(t)||v_m(x)| + \\
+ \|k\| t e^{\|k\| t^2/2\lambda_1} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{t}{2}\lambda_m\right) |\varphi_m||v_m(x)| + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_m} + \frac{t}{2}\right) |\psi_m||v_m(x)| + \right. \\
\left. + t\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_m} + \frac{t}{2}\right) |g_m(t)||v_m(x)|\right).
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
|Lu(x,t)| \le \\
\le e^{\|k\| t^2/2\lambda_1} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 |\varphi_m||v_m(x)| + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m |\psi_m||v_m(x)| + t\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m |g_m(t)||v_m(x)|\right).
\end{gathered}$$

Так как все ряды в правых частях этих неравенств мажорируются сходящимися числовыми рядами, то ряды (2.20) и (2.21) сходятся абсолютно и равномерно, а функция $u(x,t)$, определяемая рядом (2.3), является решением задачи (1.1)-(1.3) в области D.

Переходим к доказательству единственности этого решения. При $\varphi(x) \equiv 0$, $\psi(x) \equiv 0$ и $g(x,t) \equiv 0$ получаем тождества $\varphi_m \equiv 0$, $\psi_m \equiv 0$, $g_m(t) \equiv 0$. Тогда из формулы (2.8) следует, что $W_m \equiv 0$, так как W_m является решением однородного уравнения:

$$W_m(t) = \frac{1}{\lambda_m} \int\limits_0^t W_m(\tau)d\tau \int\limits_0^{t-\tau} \sin\lambda_m(t-\tau-s)k(s)ds.$$

Если подставить $W_m \equiv 0$, то из равенства (2.4) следует

$$\int\limits_\Omega u(x,t)v_m(x)dx = 0.$$

Поскольку система функций v_m полна в пространстве $L_2(\Omega)$, функция $u(x,t) = 0$ почти всюду в Ω при любом $t \in [0,T]$. Так как функция $u(x,t) \in C^1(\overline{D})$, заключаем, что $u(x,t) \equiv 0$ в D.

Доказательство завершено.

Таким образом, согласно теореме 2.1, решение задачи (1.1)-(1.3) имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \Big[\varphi_m \cos\lambda_m t + \frac{1}{\lambda_m}\psi_m \sin\lambda_m t + \frac{1}{\lambda_m}\int\limits_0^t \sin\lambda_m(t-s)G_m(s)ds\Big]v_m(x). \quad (2.23)$$

3. Теорема о разрешимости обратной задачи 1

Умножив обе части уравнения (1.1) на $h(x)$, проинтегрировав по x в области Ω, используя дополнительное условие (1.4) и (2.21), имеем

$$f''(t) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 W_m(t)\Lambda[v_m] = \int\limits_0^t k(\tau)f(t-\tau)d\tau + \Lambda[g].$$

Продифференцировав это уравнение по t, получим

$$k(t) = \frac{1}{f(0)}\left[f'''(t) - \Lambda[g_t] + \sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m^2 W'_m(t)\Lambda[v_m] - \int\limits_0^t k(\tau)f'(t-\tau)d\tau\right], \quad (3.1)$$

где

$$W'_m(t) = \Big[-\lambda_m\varphi_m \sin\lambda_m t + \psi_m\cos\lambda_m t + \int\limits_0^t \cos\lambda_m(t-s)g_m(s)ds$$
$$+ \int\limits_0^t \cos\lambda_m(t-s)\int\limits_0^s k(s-\tau)W_m(\tau)\,d\tau ds\Big].$$

Теорема 3.1. *Пусть $f(t) \in C^3[0,T]$, $f(0) \neq 0$ и выполнены следующие условия*

1. $\varphi(x) \in H^{[n/2]+4}(\Omega)$, $\psi(x) \in H^{[n/2]+3}(\Omega)$;
2. $g(\cdot,t) \in H^{[n/2]+3}(\Omega)$, $g(x,\cdot) \in C^1[0,T]$;

3. $\varphi,\ L\varphi, \ldots, L^{[(n+4)/4]}\varphi \in H_0^1(\Omega),\ \psi,\ L\psi, \ldots, L^{[(n+2)/4]}\psi \in H_0^1(\Omega)$;

4. $g(\cdot,t),\ Lg(\cdot,t), \ldots, L^{[(n+2)/4]}g(\cdot,t) \in H_0^1(\Omega)$.

Тогда существует единственное решение обратной задачи (1.1)-(1.3) *и* (1.4) *– функция* $k(t) \in C[0,T]$, *удовлетворяющая уравнению* (3.1).

Доказательство. Уравнение (3.1) представим в виде операторного уравнения

$$k = Ak. \tag{3.2}$$

Оператор A имеет вид

$$Ak = k_0 + \frac{1}{f(0)} \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 \Lambda[v_m] \int_0^t \cos\lambda_m(t-s) \int_0^s k(s-\tau) W_m(\tau)\, d\tau ds - \frac{1}{f(0)} \int_0^t k(\tau) f'(t-\tau) d\tau,$$

где

$$k_0(t) = \frac{1}{f(0)} \Bigg[f'''(t) - \Lambda[g_t] + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 \Lambda[v_m] \Bigg[-\lambda_m \varphi_m \sin\lambda_m t + \psi_m \cos\lambda_m t + \int_0^t \cos\lambda_m(t-s) g_m(s) ds \Bigg].$$

Обозначим через C_σ банахово пространство непрерывных функций, порожденное семейством весовых норм

$$||k||_\sigma = \left\{ \max_{t\in[0,T]} |k(t)e^{-\sigma t}| \right\}, \sigma \geq 0.$$

Очевидно, что при $\sigma = 0$ данное пространство совпадает с пространством непрерывных функций с обычной нормой. Эту норму будем обозначать далее $\|k\|$. В силу неравенства

$$e^{-\sigma t}\|k\| \leq \|k\|_\sigma \leq \|k\|,$$

нормы $\|k\|_\sigma$ и $\|k\|$ эквивалентны для любого фиксированного $T \in (0,\infty)$. Число σ выберем позже. Пусть $P_\sigma(k_0, \|k_0\|) := \{k \in C_\sigma : \|k - k_0\|_\sigma \leq \|k_0\|\}$ – шар радиуса $\|k_0\|$ с центром в точке k_0 некоторого весового пространства $C_\sigma (\sigma \geq 0)$.

Нетрудно заметить, что для $k \in P_\sigma(k_0, \|k_0\|)$ имеет место оценка

$$\|k\|_\sigma \leq \|k_0\|_\sigma + \|k_0\| \leq 2\|k_0\|.$$

Пусть $k(t) \in P_\sigma(k_0, \|k_0\|)$. Покажем, что при подходящем выборе $\sigma > 0$ оператор A переводит шар в себя, т.е. $A \in P_\sigma(k_0, \|k_0\|)$. Проверим выполнение условий теоремы Банаха о неподвижной точке [16],

$$|Ak - k_0| = \max_{t\in[0,T]} |(Ak - k_0)e^{-\sigma t}| = \\ = \max_{t\in[0,T]} \left| \frac{1}{f(0)} \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 \Lambda[v_m] \int_0^t \cos\lambda_m(t-s) \int_0^s k(\tau) W_m(s-\tau) e^{-\sigma\tau} e^{-\sigma(t-\tau)}\, d\tau ds - \right.$$

$$
-\frac{1}{f(0)}\int_0^t k(\tau)f'(t-\tau)e^{-\sigma\tau}e^{-\sigma(t-\tau)}d\tau\Bigg| \leq
$$

$$
\leq \frac{2}{|f(0)|}\left[T\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m\|f_m\|\left(|\varphi_m|+\frac{1}{\lambda_m}|\psi_m|+\frac{1}{\lambda_m}\|g_m\|T\right)e^{\|k\|T^2/2\lambda_m}+\|f'\|\right]\frac{\|k_0\|}{\sigma} =:
$$

$$
=: \frac{\|k_0\|}{\sigma}\alpha_0,
$$

где $\|f'\| = \max\limits_{0\leq t\leq T}|f'(t)|$. Выбирая $\sigma \geq \alpha_0$, получим, что A переводит $P_\sigma(k_0,\|k_0\|)$ в $P_\sigma(k_0,\|k_0\|)$.

Проверим выполнение второго условия

$$
||(Ak^1-Ak^2)||_\sigma = \max_{t\in[0,T]}|(Ak^1-Ak^2)e^{-\sigma t}| =
$$

$$
= \max_{t\in[0,T]}\Bigg|\frac{1}{f(0)}\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m^2\Lambda[v_m]\int_0^t\cos\lambda_m(t-s)\int_0^s\Big[k^{(1)}(\tau)W_m^{(1)}(s-\tau)-
$$

$$
-k^{(2)}(\tau)W_m^{(2)}(s-\tau)\Big]e^{-\sigma\tau}e^{-\sigma(t-\tau)}\,d\tau ds-
$$

$$
-\frac{1}{f(0)}\int_0^t\Big[k^{(1)}(\tau)-k^{(2)}(\tau)\Big]f'(t-\tau)e^{-\sigma\tau}e^{-\sigma(t-\tau)}d\tau\Bigg|.
$$

Используя неравенство (2.15) и оценки (2.11), (2.13), получим

$$
||(Ak^1-Ak^2)||_\sigma \leq
$$

$$
\leq \max_{t\in[0,T]}\frac{1}{|f(0)|}\int_0^t\int_0^t\Bigg[\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m^2\Lambda[v_m]\big|\cos\lambda_m(t-\theta)\big|\Bigg[\Big|W_m^{(1)}(\theta-\tau)-W_m^{(2)}(\theta-\tau)\Big|\left|k^1(\tau)\right|+
$$

$$
+\Big|W_m^{(2)}(\theta-\tau)\Big|\left|k^1(\tau)-k^2(\tau)\right|\Bigg]e^{-\sigma\tau}e^{-\sigma(t-\tau)}d\theta\Bigg]d\tau \leq
$$

$$
\leq \frac{1}{|f(0)|}\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m^2\|f_m\|\left[T^2\|k_0\|e^{\int_0^t|k_1(\theta)|d\theta}+1\right]\left(\|\varphi_m\|+\frac{1}{\lambda_m}\|f_m\|T\right)e^{\|k\|T^2/2\lambda_1}+\|f'\|\right\}\cdot
$$

$$
\cdot\frac{\|k^1-k^2\|}{\sigma} = \frac{\alpha_1}{\sigma}\|k^1-k^2\|.
$$

Как следует из полученных оценок, если число σ выбрать из условия $\sigma >> \max\{\alpha_0,\alpha_1\}$, то оператор A является сжимающим на $P_\sigma(k_0,\|k_0\|)$. Тогда, согласно принципу Банаха, уравнение (3.2) имеет единственное решение в $P_\sigma(k_0,\|k_0\|)$ при любом фиксированном $T>0$ [16].

Доказательство завершено.

4. Исследование обратной задачи 2

В дальнейших исследованиях воспользуемся следующей записью формулы (2.8)

$$
W_m(t)-(ZW)_m(t) = \Phi_m(t), \tag{4.1}
$$

здесь введены обозначения

$$\Phi_m(t) = \varphi_m \cos\lambda_m t + \frac{1}{\lambda_m}\psi_m \sin\lambda_m t + \frac{1}{\lambda_m}\int\limits_0^t \sin\lambda_m(t-s) g_m(s)ds,$$

$$(ZW)_m(t) = \frac{1}{\lambda_m}\int\limits_0^t r_m(t-\theta)W_m(\theta)d\theta,$$

$$r_m(t) = \int\limits_0^t \sin\lambda_m(t-s)k(s)ds.$$

Используя выражение (2.3), дополнительное условие (1.5) примет вид

$$\sum_{m=1}^{\infty} W_m(t)v_m(x_0) = h(t). \tag{4.2}$$

Подставив в (4.2) вместо $W_m(t)$ выражение, найденное из (4.1), получим интегральное уравнение Вольтерра первого рода

$$\int\limits_0^t k(s)M[k](t-s)ds = f(t), \tag{4.3}$$

где

$$M[k](t) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_m}v_m(x_0)\int\limits_0^t W_m(\theta)\sin\lambda_m(t-\theta)d\theta,$$

$$f(t) = h(t) - \sum_{m=1}^{\infty}\Phi_m(t)v_m(x_0).$$

Уравнение (4.3) перепишем в удобном для исследования виде

$$h(t) = \int\limits_0^t k(s)M[k](t-s)ds + F(t), \tag{4.4}$$

где $F(t) := \sum\limits_{m=1}^{\infty}\Phi_m(t)v_m(x_0)$.

Из (4.4) следует

$$h(0) = \sum_{m=1}^{\infty}\varphi_m v_m(x_0) = \varphi(x_0).$$

Для получения интегрального уравнения Вольтерра второго рода относительно функции $k(t)$ продифференцируем уравнение (4.4) три раза по переменной t. При этом мы попутно находим $h'(0) = \psi(x_0)$ и $h''(0) = g(x_0,0) + L\varphi(x_0)$. Таким образом, получаем интегральное уравнение Вольтерры второго рода относительно функции $k(t)$:

$$k(t) = \frac{1}{h(0)}\left[h'''(t) - F'''(t) - \int\limits_0^t k(s)M'''[k](t-s)ds\right], \quad t\in[0,T]. \tag{4.5}$$

Теорема 4.1. *Пусть* $h(t) \in C^3[0,T]$, $h(0) = \varphi(x_0) \neq 0$, $h'(0) = \psi(x_0)$, $h''(0) = g(x_0, 0) + L\varphi(x_0)$ *и выполнены условия 1-4 Теоремы 3.1. Тогда существует единственное решение обратной задачи* (1.1)-(1.3) *и* (1.5) *– функция* $k(t) \in C[0,T]$, *удовлетворяющая уравнению* (4.5).

Доказательство. Как и в предыдущем случае, уравнение (4.5) представим в виде операторного уравнения

$$k = Bk. \tag{4.6}$$

Оператор B имеет вид:

$$Bk = k_0 - \frac{1}{h(0)} \int_0^t M'''[k](t-\tau)k(\tau)d\tau,$$

где $k_0(t) = \dfrac{1}{h(0)}\left[h'''(t) - F'''(t)\right]$. Нетрудно заметить, что функция $F'''(t)$ является непрерывной функций, это следует из условий Теоремы 3.1. Аналогично ядро $M'''[k]$ также является непрерывной функцией.

Как и при доказательстве Теоремы 3.1 введем банахово пространство непрерывных функций C_σ, порожденное семейством весовых норм

$$||k||_\sigma = \{\max_{t\in[0,T]} |k(t)e^{-\sigma t}|\},\ \sigma \geq 0.$$

Рассмотрим шар $P_\sigma(k_0, \|k_0\|) := \{k \in C_\sigma : \|k - k_0\|_\sigma \leq \|k_0\|\}$ радиуса $\|k_0\|$ с центром в точке k_0 некоторого весового пространства $C_\sigma(\sigma \geq 0)$. Пусть $k(t) \in P_\sigma(k_0, \|k_0\|)$.

Покажем выполнения условий теоремы Банаха о неподвижной точке [16],

$$|Bk - k_0| = \max_{t\in[0,T]} |(Bk - k_0)e^{-\sigma t}| = \max_{t\in[0,T]} \left| \frac{1}{h(0)} \int_0^t M'''[k](t-\tau)k(\tau)e^{-\sigma\tau}e^{-\sigma(t-\tau)}d\tau \right|$$

$$\leq \frac{2T}{|h(0)|}\left[\|h'\| + T\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m v_m(x_0)\left(|\varphi_m| + \frac{1}{\lambda_m}|\psi_m| + \frac{1}{\lambda_m}\|g_m\|T\right)e^{\frac{\|k\|T^2}{2\lambda_m}}\right]\frac{\|k_0\|}{\sigma} =: \frac{\|k_0\|}{\sigma}\beta_0,$$

$$||(Bk^1 - Bk^2)||_\sigma = \max_{t\in[0,T]} \left|(Bk^1 - Bk^2)e^{-\sigma t}\right| \leq$$

$$\leq \frac{T}{|h(0)|}\left[\|h'\| + T\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 v_m(x_0)\left[T^2\|k_0\|e^{\int_0^t |k_1(\theta)|d\theta} + 1\right]\left(|\varphi_m| + \frac{1}{\lambda_m}\|f_m\|T\right)e^{\frac{\|k\|T^2}{2\lambda_1}}\right]\cdot$$

$$\cdot\frac{\|k^1 - k^2\|}{\sigma} = \frac{\beta_1}{\sigma}\|k^1 - k^2\|.$$

Следовательно, если число σ выбрать из условия $\sigma > \max\{\beta_0, \beta_1\}$, то оператор B является сжимающим на $P_\sigma(k_0, \|k_0\|)$. Тогда, согласно принципу Банаха, уравнение (4.6) имеет, и притом единственное, решение в $P_\sigma(k_0, \|k_0\|)$ при любом фиксированном $T > 0$ [16].

Доказательство завершено.

5. Оценка условной устойчивости

Пусть выполнены условия Теоремы 4.1. Тогда решение уравнения (4.6) принадлежит множеству $P_\sigma(k_0, \|k_0\|)$ и

$$\max_{t\in[0,T]} |k(t)| \leq 2\|k_0\| := k^0.$$

Обозначим через $K(k^0)$ – множество функций $k(t) \in C[0,T]$, удовлетворяющих для $t \in [0,T]$ неравенству

$$\|k(t)\|_{C[0,T]} \leq k^0 \tag{5.1}$$

с фиксированной постоянной k^0.

Определение 5.1. *Решение обратной задачи называется условно устойчивым, если непрерывная зависимость решения от исходных данных устанавливается лишь при наложении априорных ограничений на класс допустимых решений.*

Иными словами, в отличие от классической устойчивости, понимаемой как непрерывная зависимость решения от данных на всём пространстве, в обратных задачах, как правило, имеет место лишь условная устойчивость. Она устанавливается при введении дополнительных ограничений на искомую функцию (например, ограничений по норме, гладкости или энергии) [2]. Оценка условной устойчивости, доказанная в настоящей работе, справедлива при выполнении условия (5.1).

Теорема 5.1. *Если выполнены условия Теоремы 4.1 и функции k_1 и k_2 два решения обратной задачи* (1.1)-(1.3),(1.5)*, соответствующие двум наборам данных $\{\varphi^{(1)}, \psi^1, g^1, h^1\}$ и $\{\varphi^{(2)}, \psi^2, g^2, h^2\}$, то имеет место следующая оценка условной устойчивости:*

$$\|k^1 - k^2\|_{C[0,T]} \leq C\Big(\|\tilde{\varphi}\|_{H^{[n/2]+4}(\Omega)} + \|\tilde{\psi}\|_{H^{[n/2]+3}(\Omega)} + \|\tilde{g}\|_{H^{[n/2]+3}(\Omega)\times C^1[0,T]}\Big), \tag{5.2}$$

где $C = C(k^0, T)-$ некоторая положительная постоянная.

Доказательство.

Пусть ϕ^j, $j = 1,2$ – вектор функций, являющихся решениями (3.1) с наборами данных $\{\varphi^j(x), \psi^j(x), g^j(x,t), h^j(t)\}$, $j = 1,2$ соответственно, т.е. справедливы уравнения $\phi^j = A\phi^j$ для $j = 1,2$. Заданные функции $\varphi^j(x), \psi^j(x)$, $j = 1,2$ входят в свободные члены этих интегральных уравнений соответствующим образом через сложные функции $M^j[k(t)]$, $j = 1,2$. В дальнейшем будем обозначать разность двух функций, наименования которых отличаются только верхним индексом, той же буквой со знаком $\sim$, как в работе [17]. Например, $\widetilde{u} = u^1 - u^2$, $\widetilde{h} = h^1 - h^2$ и т.д. Тогда из (4.5) получаем уравнение относительно функции $\widetilde{k}(t)$

$$\widetilde{k}(t) = \frac{1}{h(0)}\left[\widetilde{h}'''(t) - \widetilde{F}'''(t) - \int\limits_0^t \Big[k^1(s)\widetilde{M}'''[k](t-s) + \widetilde{k}(s)M^{2'''}[k](t-s)\Big]\,ds\right], \quad t \in [0,T],$$

где

$$\widetilde{M}'''[k](t) = \widetilde{h}'(t) - \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 v_m(x_0) \int\limits_0^t \widetilde{A}_m(\theta)\cos\lambda_m(t-\theta)d\theta.$$

Заметим, что входящие в это уравнение функции могут быть оценены на основе априорной информации о данных задачи. Используя указанную априорную информацию и применяя неравенство Гронуолла, получаем оценку (5.2).
Доказательство завершено.

6. Пример восстановления ядра при заданной дополнительной информации

Рассмотрим одномерный случай $\Omega = (0,\pi)$ при $T > 0$; $L = \dfrac{d^2}{dx^2}$ $\big(a_{11}(x) \equiv 1,\ c(x) \equiv 0\big)$ с однородными граничными условиями $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$. Пусть в прямой задаче (1.1)-(1.3) заданы функции

$$\varphi(x) = \sin x, \quad \psi(x) = 0, \quad g(x,t) \equiv 0,$$

а дополнительная информация в обратной задаче 1 имеет вид

$$\Lambda[u(\cdot,t)] = \int\limits_0^\pi u(x,t)\sin x\,dx = f(t), \quad t \in [0,T], \tag{6.1}$$

где функция $f \in C^3[0,T]$ известна и удовлетворяет условию $f(0) \neq 0$.

Покажем, что выполнено условие теоремы $(h,\varphi) \neq 0$, где $h(x) = \sin x$:

$$(h,\varphi) = \int\limits_0^\pi \sin x \cdot \sin x\,dx = \int\limits_0^\pi \sin^2 x\,dx = \frac{\pi}{2} \neq 0.$$

В качестве дополнительной информации (6.1) возьмем конкретную функцию

$$f(t) = \frac{\pi}{2}\big(1 + t^2\big), \quad t \in [0,T].$$

Очевидно, что $f \in C^3[0,T]$ и $f(0) = \dfrac{\pi}{2} \neq 0$.

Собственные функции спектральной задачи (2.1)-(2.2) для $\Omega = (0,\pi)$:

$$v_m(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(mx), \quad \lambda_m = m, \quad m \geq 1.$$

Так как $\varphi(x) = \sin x = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\,v_1(x)$, то в разложении (2.8) решение имеет вид

$$u(x,t) = W_1(t)v_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,W_1(t)\sin x.$$

Подставляя это выражение в (6.1), получаем явную связь между функцией $f(t)$ и коэффициентом $W_1(t)$

$$\Lambda[u(\cdot,t)] = \int\limits_0^\pi u(x,t)\sin x\,dx = f(t),$$

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} W_1(t) \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, W_1(t), \quad W_1(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, f(t).$$

Согласно теореме о разрешимости обратной задачи 1, существует единственное ядро $k(t) \in C[0,T]$ и оно удовлетворяет уравнению (3.1). В данном примере (при $g \equiv 0$) это дает формулу восстановления

$$k(t) = \frac{1}{f(0)} \Big(f'''(t) + f'(t) - \int_0^t k(\tau) f'(t-\tau) d\tau \Big), \quad t \in [0,T]. \tag{6.2}$$

Для выбранной функции $f(t) = \dfrac{\pi}{2}(1+t^2)$ имеем

$$f'(t) = \pi t, \qquad f'''(t) = 0, \quad f(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Подставляя эти величины в уравнение (6.2), получаем следующее интегральное уравнение относительно функции $k(t)$:

$$k(t) = 2t - 2\int_0^t (t-\tau) k(\tau)\, d\tau, \qquad t \in [0,T].$$

Решая данное уравнение, находим явный вид функции $k(t)$:

$$k(t) = \sqrt{2} \sin(\sqrt{2}\, t), \qquad t \in [0,T].$$

7. Заключение

В работе исследованы прямая и две обратные задачи для многомерного гиперболического интегро-дифференциального уравнения с памятью. Прямая задача при известном ядре интегрального члена сведена методом Фурье к интегральному уравнению Вольтерра второго рода. Для решения получены априорные оценки и оценки вторых производных, обеспечивающие корректность постановки. Рассмотрены две обратные задачи восстановления ядра: по интегральному условию переопределения и по значению решения в фиксированной точке области. В обоих случаях задачи сведены к нелинейным интегральным уравнениям Вольтерра свёрточного типа. С применением принципа сжимающих отображений доказаны существование и единственность решения в пространстве непрерывных функций с весовой нормой и установлена условная устойчивость.

Таким образом, в работе построена единая схема исследования задач определения одномерного ядра интегрального члена гиперболического интегро-дифференциального уравнения в ограниченной области. Полученные результаты развивают теорию обратных задач для сред с последействием и могут быть использованы при математическом моделировании волновых процессов в средах с памятью.

Список литературы

1. Романов В. Г. Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984, 264 с.

2. Романов В. Г. Устойчивость в обратных задачах. М.: Научный мир, 2005, 296 с.

3. Lorenzi A., Paparoni E. Direct and inverse problems in the theory of materials with memory. *Ren. Sem. Math.* Univ1992. №87. P. 105–138.

4. Lorenzi A. An identification problem related to a nonlinear hyperbolic integro-differential equation. *Nonlinear Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications.* 1994. Vol. 22. no. 1. P. 21–44. Zbl 0818.93014.

5. Рахмонов А. А, Дурдиев У. Д, Бозоров З. Р. Задача определения скорости звука и функции памяти анизотропной среды // *ТМФ.* 2021. Vol. 207, no. 1. P. 112–132. DOI: 10.4213/tmf10035

6. Сафаров Ж. Ш. Одномерная обратная задача для уравнения вязкоупругости в ограниченной области //*Журнал Средневолжского математического общества.* 2015. Т. 17, № 3. Р. 44–55.

7. Дурдиев У. Д. Обратная задача по определению неизвестного коэффициента в уравнении колебания балки// *Дифференциальные уравнения.* 2022. Т. 58, № 1, С. 37–44. DOI: 10.31857/S0374064122010058

8. Сафаров Ж. Ш. Обратная задача для интегро-дифференциального уравнения гиперболического типа с дополнительной информацией специального вида в ограниченной области //*Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.* 2024. Т. 28, №1. С. 29–44. DOI: 10.14498/vsgtu1997

9. Сафаров Ж. Ш. Обратная задача для неоднородного интегродифференциального уравнения гиперболического типа //*Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия.* 2024. Т. 11 (69). Вып. 1. С. 141–151. DOI: 10.21638/spbu01.2024.109

10. Safarov J. Sh., Kalandarov U. N., Safarova M. J. Inverse Problem of Determining a Kernel of the Viscoelasticity Equation with Distributed Data in a Limited Domain. *Lobachevskii Journal of Mathematics.* 2024. Vol. 45, no. 7. P. 3380–3390. DOI: 10.1134/S1995080224604077

11. Дурдиев Д. К, Рахмонов А. А. Задача об определении двумерного ядра в системе интегро-дифференциальных уравнений вязкоупругой пористой среды //*Сиб. журн. индустр. матем.* 2020. Т. 23, № 2. 63—80. DOI: 10.33048/SIBJIM.2020.23.205

12. Safarov J. Sh. Two-dimensional Inverse Problem for an Integro-differential Equation of Hyperbolic Type. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics.* 2022. Vol. 15, no. 5. P. 651–662. DOI: 10.17516/1997-1397-2022-15-5-651-662

13. Janno J., Von Wolfersdorf L. Inverse problems for identification of memory kernels in heat flow. *J.Inv.Ill-PosedProblems.* 1996. Vol. 4, no. 1. P. 39–66.

14. Safarov J. The problem of determining two coefficients of the wave equation in a weakly horizontally inhomogeneous environment. *UzMathJournal.* 2023. № 3. P. 145–155. DOI:10.29229/uzmj.2023-3-15

15. Ильин В. А. О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений // *Успехи мат. наук.* 1960. Т. 15, № 2. С. 97–154.

16. Колмогоров А. Н, Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 542 с.

17. Safarov J. Sh, Durdiev D. K, Rakhmonov A. A. An inverse problem for a hyperbolic integro-differential equation in a bounded domain. *Siberian Advances in Mathematics.* 2024. Vol.34, no. 2. P. 91–103. DOI: 10.1134/S1055134424020068

Поступила 22.02.2025; доработана после рецензирования 13.02.2026; принята к публикации 25.02.2026

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

References

1. V. G. Romanov, *Inverse Problems of Mathematical Physics*, Nauka, M., 1984 (In Russ.), 264 p.

2. V. G. Romanov, *Stability in inverse problems*, Nauchniy mir, M., 2005 (In Russ.), 296 p.

3. A. Lorenzi, E. Paparoni, "Direct and inverse problems in the theory of materials with memory", *Ren. Sem. Math. Univ*, **87** (1992), 105–138.

4. A. Lorenzi, "An identification problem related to a nonlinear hyperbolic integro-differential equation", *Applications*, **22**:1 (1994), 21–44.

5. A. A. Rahmonov, U. D. Durdiev, Z. R. Bozorov, "Problem of determining the speed of sound and the memory of an anisotropic medium", *Theoretical and mathematical physics*, **207**:1 (2021), 112–132. DOI: 10.4213/tmf9480

6. J. Sh. Safarov, "One-dimensional inverse problem for the equation of viscoelasticity in a bounded region", *Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva*, **17**:3 (2015), 44–55 (In Russ.).

7. U. D. Durdiev, "Inverse problem of determining the unknown coefficient in the beam vibration equation", *Differential Equations*, **58**:1 (2022), 37–44 (In Russ.). DOI: 10.31857/S0374064122010058

8. J. Sh. Safarov, "Inverse problem for integro-differential equation of hyperbolic type with additional information of a special type in a bounded domain", *Vestn. Sam. state tech. un-ta. Ser. Phys.-math. sciences*, **28**:1 (1924), 29–44 (In Russ.). DOI: 10.14498/vsgtu1997

9. J. Sh. Safarov, “Inverse problem for non-homogeneous integro-differential equation of hyperbolic type”, *Vestnik of St. Petersburg State University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, **11**:69 (1924), 141-151 (In Russ.). DOI: 10.21638/spbu01.2024.109

10. J. Sh. Safarov, U. N. Kalandarov, M. J. Safarova, “Inverse Problem of Determining a Kernel of the Viscoelasticity Equation with Distributed Data in a Limited Domain”, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **45**:7 (1924), 3380-3390. DOI: 10.1134/S1995080224604077

11. D. K. Durdiev, A. A. Rakhmonov, “The problem of determining a two-dimensional kernel in a system of integro-differential equations of a viscoelastic porous medium”, *Sib. J. Ind. Math.*, **23**:2 (2020), 63–80 (In Russ.). DOI: 10.33048/SIBJIM.2020.23.205

12. J. Sh. Safarov, “Two-dimensional Inverse Problem for an Integro-differential Equation of Hyperbolic Type”, *J. Sib. Fed. Univ. Math Phys.*, **15**:5 (2022), 651–662. DOI: 10.17516/1997-1397-2022-15-5-651-662

13. J. Janno, L. Von Wolfersdorf, “Inverse problems for identification of memory kernels in heat flow”, *J.Inv.Ill-PosedProblems*, **4**:1 (1996), 39–66.

14. J. Sh. Safarov, “The problem of determining two coefficients of the wave equation in a weakly horizontally inhomogeneous environment”, *UzMathJournal*, **3** (2023), 145–155. DOI: 10.29229/uzmj.2023-3-15

15. V. A. Il’in, “The solvability of mixed problems for hyperbolic and parabolic equations”, *Russian Mathematical Surveys*, **15**:2 (1960), 85–142 (In Russ).

16. A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Elements of the theory of functions and functional analysis*, Nauka, M., 1976 (In Russ.), 544 p.

17. J. Sh. Safarov, D. K. Durdiev, A. A. Rakhmonov, “An Inverse Problem for a Hyperbolic Integro-Differential Equation in a Bounded Domain”, *Siberian Advances in Mathematics*, **34**:2 (2024), 91–103 (In Russ.). DOI: 10.1134/S1055134424020068

Submitted 22.02.2025; Revised 13.02.2026; Accepted 25.02.2026

The authors have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.