DOI 10.15507/2079-6900.28.202601.31-47
Оригинальная статья
ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.956.4

Построение функционала по заданной производной для линейного уравнения параболического типа с однородными граничными условиями

П. Е. Маковеева, А. В. Егоров

Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург, Российская Федерация)

Аннотация. В работе к линейному уравнению параболического типа с однородными граничными условиями применяется метод функционалов Ляпунова. В рамках этого подхода строится функционал, производная которого вдоль решений системы представляет собой заданную отрицательно определённую квадратичную форму. Ключевую роль в построении функционала играет матрица Ляпунова, исследованию которой посвящена значительная часть работы. В статье предложены два определения данной матрицы. Первое основано на представлении ее в виде ряда. Второе, альтернативное, связывает матрицу Ляпунова с функцией Грина для соответствующего стационарного уравнения. Показана совместимость предложенных определений и доказано, что любая функция, удовлетворяющая второму определению, одновременно удовлетворяет и первому, что подтверждает согласованность двух подходов. Важным преимуществом второго определения является его конструктивность: оно позволяет получить явное аналитическое выражение для матрицы Ляпунова при произвольных параметрах краевой задачи. Кроме того, показано, что данный подход даёт возможность строить функционалы с заданной производной без требования экспоненциальной устойчивости, что существенно расширяет область его применения.

Ключевые слова: матрица Ляпунова, уравнение параболического типа, функционал Ляпунова, функционал с заданной производной, экспоненциальная устойчивость

Для цитирования: Маковеева П. Е., Егоров А. В. Построение функционала по заданной производной для линейного уравнения параболического типа с однородными граничными условиями // *Журнал Средневолжского математического общества.* 2026. Т. 28, № 1. С. 31–47. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202601.31-47

Об авторах:
Маковеева Полина Евгеньевна, аспирант факультета прикладной математики – процессов управления, Санкт-Петербургский государственный университет (199034, Россия, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7-9), ORCID: https://orcid.org/0009-0006-2846-4829, p.e.makoveeva@spbu.ru
Егоров Алексей Валерьевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории управления, Санкт-Петербургский государственный университет (199034, Россия, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7-9), ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7671-2467, alexey.egorov@spbu.ru

Original article

MSC2020 35K10

Construction of a functional with a prescribed derivative for a linear parabolic equation with homogeneous boundary conditions

P. E. Makoveeva, A. V. Egorov

St. Petersburg State University (St. Petersburg, Russian Federation)

Abstract. The Lyapunov functional method is applied to a linear parabolic-type equation with homogeneous boundary conditions. Within this framework, a Lyapunov functional is constructed whose derivative along the solutions of the system is a prescribed negative definite quadratic form. A central role in this construction is played by the Lyapunov matrix, whose properties are investigated in detail. In the paper, two definitions of the Lyapunov matrix are proposed. The first one is based on its representation in the form of a series. The second alternative definition relates the matrix to the Green's function for a corresponding stationary equation. The consistency of the proposed definitions is established, and it is proved that any function satisfying the second definition simultaneously satisfies the first one, thereby confirming the equivalence of the two approaches. An important advantage of the second definition lies in its constructive nature: this makes it possible to derive an explicit analytical representation of the Lyapunov matrix for arbitrary parameters of the boundary value problem. Moreover, it is shown that this approach allows construction of Lyapunov functionals with a prescribed derivative without imposing the requirement of exponential stability. This significantly broadens the scope of potential applications.

Keywords: Lyapunov matrix, parabolic equation, Lyapunov functional, functional with a prescribed derivative, exponential stability

For citation: *P. E. Makoveeva, A. V. Egorov.* Construction of a functional with a prescribed derivative for a linear parabolic equation with homogeneous boundary conditions. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 28:1(2026), 31–47. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202601.31-47

About the authors:
Polina E. Makoveeva, Postgraduate Student, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, St. Petersburg State University (7-9 Universitetskaya Emb., St. Petersburg 199034, Russia) ORCID: https://orcid.org/0009-0006-2846-4829, p.e.makoveeva@spbu.ru
Alexey V. Egorov, Ph. D. (Phys. and Math.), Associate Professor, Department of Control Theory, St. Petersburg State University (7-9 Universitetskaya Emb., St. Petersburg 199034, Russia), ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7671-2467, alexey.egorov@spbu.ru

1. Введение

Уравнения параболического типа занимают центральное место в математической физике, моделируя широкий круг явлений и процессов. Среди наиболее известных приложений можно отметить процессы теплопроводности [1], диффузии и распространения волн в вязких средах [2–3]. Основные результаты, касающиеся существования, единственности и устойчивости решений уравнений такого типа, подробно представлены в классических работах [4–5].

Для исследования динамических систем широко применяются методы Ляпунова [6]. В теории обыкновенных дифференциальных уравнений ключевым инструментом анализа устойчивости являются функции Ляпунова. В случае систем обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием [7–8] используется их естественное обобщение – функционалы Ляпунова–Красовского [9]. Аналогичные идеи находят применение и в теории уравнений в частных производных, где строятся функционалы Ляпунова. Они позволяют анализировать устойчивость, получать экспоненциальные оценки решений и формулировать критерии устойчивости краевых задач.

В работах [10–12] был разработан подход к построению функционалов по заданной производной для систем с запаздыванием, при котором сначала задаётся производная функционала вдоль решений системы в виде отрицательно определённой квадратичной формы, а затем по этой производной строится сам функционал.

В настоящей работе будет построен функционал Ляпунова по заданной производной для линейного уравнения параболического типа с однородными граничными условиями. Ключевым элементом этого функционала является функциональная матрица Ляпунова. В статье предлагаются два определения этой матрицы. Первое естественным образом возникает при построении функционала, матрица Ляпунова представляет собой тригонометрический ряд. Второе, альтернативное, определение связывает матрицу Ляпунова с функцией Грина. Доказана эквивалентность этих определений, что подтверждает внутреннюю согласованность предлагаемого подхода. Существенным преимуществом второго определения является то, что оно позволяет получить явное выражение для матрицы Ляпунова при произвольных параметрах без предположения об экспоненциальной устойчивости исходной задачи. Это существенно расширяет область применения метода и делает его более универсальным.

В работе использованы следующие обозначения: $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$ – множества вещественных и натуральных чисел соответственно, $||\cdot||_{L_2}$ – интегральная норма в пространстве Лебега $L_2\big((0,1),\mathbb{R}\big)$; через $\mathbf{C}(\Omega)$ обозначено пространство функций, непрерывных на произвольном множестве $\Omega \in \mathbb{R}^n$; через $\mathbf{C}^2(\Omega)$ – пространство функций, имеющих непрерывные частные производные по всем переменным до второго порядка включительно на Ω; $\sinh x$, $\cosh x$ и $\coth x$ – гиперболические функции синуса, косинуса и котангенса.

2. Решение краевой задачи

Рассматриваем краевую задачу, содержащую уравнение в частных производных второго порядка, однородные граничные условия, а также соответствующие начальные условия:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = au_{xx}(x,t) + bu(x,t), & x \in (0,l),\ t > 0, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in [0,l]. \end{cases} \tag{2.1}$$

Здесь начальная функция φ – абсолютно непрерывная с областью определения $[0,1]$ и значениями из $\mathbb{R}$, $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ – параметры модели. Далее будем считать $l = 1$, поскольку к этому случаю всегда можно свести задачу посредством масштабирования пространственной переменной x.

Для построения указанного функционала требуется найти решение задачи (2.1) в зависимости от функции φ. Для это применим метод Фурье, следуя методике, изложенной в книге [13].

Решение краевой задачи (2.1) строится методом разделения переменных Фурье. Представим решение в виде произведения

$$u(x,t) = f(x)g(t), \tag{2.2}$$

где $x \in [0,1]$, $t \geq 0$.

Подставив (2.2) в (2.1), получим две задачи

$$g'(t) = (b-\mu)g(t) \tag{2.3}$$

и

$$\begin{cases} af''(x) = -\mu f(x), \\ f(0) = f(1) = 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Рассмотрим только случай $\mu > 0$, так как при остальных значениях задача (2.4) имеет только тривиальное решение.

Решение задачи Коши для уравнения (2.3) имеет вид

$$g_i(t) = K_i(t)g_i(0),\ K_i(t) = e^{(b-\mu_i)t}.$$

Решениями краевой задачи (2.4) являются собственные функции

$$f_i(x) = \sin(\pi i x),\ i \in \mathbb{N},$$

соответствующие собственным значениям $\mu_i = a(\pi i)^2$.

Тогда решение исходной краевой задачи (2.1) представляется в виде ряда по собственным функциям

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} K_i(t)\sin(\pi i x)\, g_i(0),$$

сходимость которого легко доказать для всех $t > 0$, в силу того, что K_i является затухающей экспонентой.

Для того чтобы решение u удовлетворяло начальным условиям, необходимо потребовать выполнения равенств $g_i(0) = \varphi_i$, $i \in \mathbb{N}$, где φ_i – коэффициенты разложения в ряд Фурье функции φ по системе взаимно ортогональных функций f_1, f_2, ...

Таким образом, мы приходим к следующему результату.

Лемма 2.1. [13] *Решение краевой задачи* (2.1) *представимо в виде ряда*

$$u(x,t,\varphi) = \sum_{i=1}^{\infty} K_i(t)\sin(\pi i x)\varphi_i, \quad x \in [0,1],\ t \geq 0, \tag{2.5}$$

где коэффициенты разложения в ряд Фурье функции φ имеют вид

$$\varphi_i = 2\int_0^1 \sin(\pi i x)\varphi(x)dx, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Определение 2.1. *Состоянием краевой задачи в момент времени $t \geq 0$ будем называть некоторую функцию $\widehat{u}(t,\varphi) = u(\cdot,t,\varphi)$ из пространства Лебега $L_2\big((0,1),\mathbb{R}\big)$.*

Аргумент φ мы будем опускать для краткости, когда его значение несущественно.

3. Построение функционала v_0

В этом параграфе будет построен функционал v_0 с заданной отрицательно определённой квадратичной производной вдоль решений краевой задачи (2.1):

$$\frac{d}{dt}v_0(\varphi)\bigg|_{(2.1)} = -\left\|\varphi\right\|^2_{L_2}. \tag{3.1}$$

Определение 3.1. *Функцию $U(y_1, y_2)$, $y_1, y_2 \in [0, 1]$, которая имеет вид*

$$U(y_1, y_2) = H(y_1 - y_2) - H(y_1 + y_2), \tag{3.2}$$

где

$$H(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi i x)}{2a\pi^2 i^2 - 2b},\ x \in [-1, 2], \tag{3.3}$$

будем называть матрицей Ляпунова для краевой задачи (2.1).

Замечание 3.1. *Заметим, что ряд* (3.3) *сходится абсолютно и равномерно на* $[0, 1]$ *при* $b \neq a\pi^2 i^2$, $i \in \mathbb{N}$.

Замечание 3.2. *Функция U является скалярной функцией двух переменных и, строго говоря, матрицей не является. Однако в этой статье мы следуем терминологии из работ* [10] *и* [11], *где аналогичный подход был применён для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием.*

Определение 3.2. *Краевая задача* (2.1) *называется экспоненциально устойчивой, если существуют константы $\gamma \geq 1$ и $\sigma > 0$ такие, что для всех начальных функций φ и всех $t \geq 0$ выполнено неравенство*

$$||u(t, \varphi)||_{L_2} \leq \gamma e^{-\sigma t}||\varphi||_{L_2}.$$

Теорема 3.1. *Пусть краевая задача* (2.1) *экспоненциально устойчива. Если производная вдоль решений этой задачи задана равенством* (3.1), *то функционал имеет вид*

$$v_0(\varphi) = \int_0^1 \varphi(y_2) \int_0^1 U(y_1, y_2)\varphi(y_1)\, dy_1\, dy_2, \tag{3.4}$$

где функция U – матрица Ляпунова.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Производная v_0 вдоль решений краевой задачи (2.1):

$$\frac{d}{dt}v_0(\widehat{u}(t, \varphi)) = -\left\|\widehat{u}(t, \varphi)\right\|^2_{L_2} = -\int_0^1 u^2(x, t, \varphi)dx. \tag{3.5}$$

Далее подставляем решение (2.5) в (3.5), полученное равенство интегрируем на отрезке $[0, T]$, где $T > 0$, затем выполняем предельный переход, устремляя T к бесконечности:

$$v_0(\varphi) = \int_0^{\infty}\int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{\infty} K_i(t)\sin(\pi i x)\varphi_i\right)^2 dx\, dt.$$

Возводим в квадрат подынтегральное выражение. От двойного суммирования переходим к однократному в силу ортогональности системы синусов. Получаем выражение

$$v_0(\varphi) = \int_0^\infty \sum_{i=1}^\infty K_i^2(t)\varphi_i^2 \int_0^1 \sin^2(\pi i x)\, dx\, dt.$$

Вычислив интеграл от квадрата синуса, поменяв порядок суммирования и интегрирования (что возможно в силу сходимости ряда по признаку Вейерштрасса) и подставив явные выражения для φ_i, $i \in \mathbb{N}$, получим

$$v_0(\varphi) = 2\sum_{i=1}^\infty \int_0^\infty e^{2(b-\mu_i)t} dt \int_0^1 \int_0^1 \sin(\pi i y_1)\sin(\pi i y_2)\varphi(y_1)\varphi(y_2)\, dy_2\, dy_1.$$

В силу экспоненциальной устойчивости выполняются неравенства $\mu_i > b$, $i \in \mathbb{N}$, значит, несобственные интегралы сходятся:

$$v_0(\varphi) = \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{(\mu_i - b)} \int_0^1 \int_0^1 \sin(\pi i y_1)\sin(\pi i y_2)\varphi(y_1)\varphi(y_2)\, dy_2\, dy_1.$$

Меняем порядок интегрирования и суммирования, это возможно, так как представленный ряд сходится по признаку Вейерштрасса. Подставляем явное значение $\mu_i = a(\pi i)^2$ и получаем функцию вида

$$U(y_1, y_2) = \sum_{i=1}^\infty \frac{\sin(\pi i y_1)\sin(\pi i y_2)}{a\pi^2 i^2 - b}.$$

Далее, применяя стандартное тригонометрическое тождество для произведения синусов, несложно убедиться, что полученная функция полностью совпадает с матрицей Ляпунова (3.2) из условий теоремы.

Доказательство завершено.

Ниже будет найдена функция, для которой (3.3) является разложением в ряд Фурье. Искать её по определению 3.1 затруднительно. Поэтому далее воспользуемся альтернативным определением матрицы Ляпунова, где она будет построена по функции Грина соответствующей краевой задачи.

4. Альтернативное определение матрицы Ляпунова и дифференцирование функционала v_0

В этом разделе вводится альтернативное определение матрицы Ляпунова, которое позволяет отказаться от предположения об экспоненциальной устойчивости краевой задачи при доказательстве равенства (3.1) для производной квадратичного функционала.

Определение 4.1 (параграф 10 в [14], стр. 38 в [15]). *Функция $G(y_1, y_2) \in \mathbb{R}$, $y_1, y_2 \in [0, 1]$, называется функцией Грина одномерной краевой задачи Дирихле.*

$$\begin{cases} au''(y) + bu(y) = f(y), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{4.1}$$

если

$$G \in \mathbf{C}([0,1]\times[0,1]) \cap \mathbf{C}^2(\{(y_1,y_2)\in(0,1)\times(0,1): y_1 \neq y_2\}),$$

и удовлетворяет следующему набору свойств:

1. *Функция G удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$a\frac{\partial^2 G(y_1,y_2)}{\partial y_1^2} + bG(y_1,y_2) = 0, \quad y_1, y_2 \in (0,1), \quad y_1 \neq y_2.$$

2. *Функция G удовлетворяет граничным условиям*

$$G(0,y) = G(1,y) = 0, \quad y \in [0,1].$$

3. *Производная функции G имеет скачок*

$$\frac{\partial G(y,y+0)}{\partial y_2} - \frac{\partial G(y,y-0)}{\partial y_2} = \frac{1}{a}, \quad y \in (0,1),$$

где под $+0$ и -0 мы подразумеваем правый и левый пределы соответственно.

Если функция G является функцией Грина краевой задачи Дирихле, то решение задачи (4.1) может быть представлено в виде

$$u(y_1) = \int_0^1 G(y_1,y_2) f(y_2)\, dy_2, \quad y_1 \in [0,1].$$

Замечание 4.1. *Краевая задача* (4.1) *в зависимости от значения параметра b сводится к одной из следующих классических задач математической физики:*

- *при $b > 0$ — одномерному уравнению Гельмгольца;*
- *при $b < 0$ — одномерному модифицированному уравнению Гельмгольца;*
- *при $b = 0$ — уравнению Пуассона.*

Лемма 4.1 (стр. 43 в [15]). *Функция Грина G краевой задачи* (4.1) *обладает свойством симметрии:*

$$G(y_1,y_2) = G(y_2,y_1),\ y_1,y_2 \in [0,1].$$

Определение 4.2. *Матрицей Ляпунова для краевой задачи* (2.1) *назовем функцию*

$$U(y_1,y_2) = -\frac{1}{2}G(y_1,y_2),\ y_1,y_2 \in [0,1].$$

При построении функционала v_0 ранее предполагалась экспоненциальная устойчивость краевой задачи. Теперь же мы отказываемся от этого предположения. Необходимо показать, что производная функционала вдоль решений краевой задачи имеет вид (3.1), опираясь исключительно на определение 4.2 матрицы Ляпунова.

Теорема 4.1. *Если функция U определяется через функцию Грина в соответствии с определением 4.2, и при этом функционал имеет вид* (3.4)*, то его производная вдоль решений краевой задачи* (2.1) *удовлетворяет равенству* (3.1)*.*

Доказательство. Рассмотрим функционал v_0 из условия теоремы. Производная вдоль решений краевой задачи (2.1), учитывая лемму 4.1 и определение 4.2, может быть записана следующим образом:

$$\frac{dv_0(\widehat{u}(t))}{dt} = \underbrace{2a\int\limits_0^1 u(y_2,t)\int\limits_0^1 U(y_1,y_2)u_{y_1y_1}(y_1,t)\,dy_1\,dy_2}_{=:I_1} + \\ + 2b\int\limits_0^1 u(y_2,t)\int\limits_0^1 U(y_1,y_2)u(y_1,t)\,dy_1\,dy_2.$$

Для вычисления производной необходимо к I_1 два раза применить интегрирование по частям, после этого в формуле появятся слагаемые, содержащие частные производные матрицы Ляпунова. Однако из свойств функции Грина и определения 4.2 производная имеет разрыв в точке $y_1 = y_2$, поэтому при втором интегрировании по частям будем разбивать интеграл на интервале $(0,1)$ на два и рассматривать их на области непрерывности. После первого интегрирования по частям получаем

$$I_1 = 2a\int\limits_0^1 u(y_2,t)\Big[u_{y_1}(1,t)U(1,y_2) - u_{y_1}(0,t)U(0,y_2)\Big]\,dy_2 - \\ - 2a\int\limits_0^1 u(y_2,t)\int\limits_0^{y_2-0} u_{y_1}(y_1,t)\frac{\partial U(y_1,y_2)}{\partial y_1}\,dy_1\,dy_2 - \\ - 2a\int\limits_0^1 u(y_2,t)\int\limits_{y_2+0}^1 u_{y_1}(y_1,t)\frac{\partial U(y_1,y_2)}{\partial y_1}\,dy_1\,dy_2. \quad (4.2)$$

Заметим, что первое слагаемое формулы (4.2) равно нулю в силу граничных условий функции Грина и определения 4.2. Проинтегрируем по частям полученное выражение второй раз. С учетом непрерывности функции u, полная производная имеет вид

$$\frac{dv_0(\widehat{u}(t))}{dt} = 2a\int\limits_0^1 u(y_2,t)\left[u(0,t)\frac{\partial U(0,y_2)}{\partial y_1} - u(1,t)\frac{\partial U(1,y_2)}{\partial y_1}\right]dy_2 + \\ + 2\int\limits_0^1 u(y_2,t)\int\limits_0^{y_2-0} u(y_1,t)\left[a\frac{\partial^2 U(y_1,y_2)}{\partial y_1^2} + bU(y_1,y_2)\right]dy_1\,dy_2 + \\ + 2\int\limits_0^1 u(y_2,t)\int\limits_{y_2+0}^1 u(y_1,t)\left[a\frac{\partial^2 U(y_1,y_2)}{\partial y_1^2} + bU(y_1,y_2)\right]dy_1\,dy_2 + \\ + 2a\int\limits_0^1 u^2(y_2,t)\left[\frac{\partial U(y_2+0,y_2)}{\partial y_1} - \frac{\partial U(y_2-0,y_2)}{\partial y_1}\right]dy_2. \quad (4.3)$$

Из граничных условий краевой задачи (2.1) следует равенство нулю первого слагаемого формулы (4.3). Второе и третье слагаемые этой формулы обращаются в нуль в силу свойства 1 функции Грина и определения 4.2.

Далее рассматривая последнее слагаемое, учитывая свойство 3 функции Грина и определение 4.2, имеем, что производная функционала удовлетворяет равенству (3.1). Доказательство завершено.

Стоит отметить, что совпадение матрицы Ляпунова для граничной задачи (2.1) для уравнения параболического типа с функцией Грина для соответствующей стационарной задачи (4.1) представляется нетривиальным фактом. Матрица Ляпунова является компонентой функционала, производная которого в силу граничной задачи совпадает с заданным функционалом, тогда как функция Грина входит в представление общего решения задачи Дирихле. Таким образом, указанные объекты имеют принципиально различное функциональное назначение. Обнаруженное соответствие, по-видимому, указывает на наличие более глубокой взаимосвязи, природа которой требует дополнительного исследования.

5. Построение матрицы Ляпунова и функции H

В этом разделе мы вычислим матрицу Ляпунова и покажем, что функция U из определения 4.2, удовлетворяет также исходному определению 3.1.

Идея доказательства заключается в следующем. Сначала мы построим матрицу Ляпунова по определению 4.2, используя свойства функции Грина задачи (4.1). Получим явное выражение для матрицы Ляпунова U. Затем по ней построим вспомогательную функцию H, разложим её в ряд Фурье и сравним результат с рядом (3.3) из определения 3.1.

Построить функцию H по известной матрице Ляпунова U позволяет следующая лемма.

Лемма 5.1. *Если U – матрица Ляпунова из определения 4.2, функция H удовлетворяет уравнению* (3.2) *и справедливо равенство*

$$\int\limits_0^1 H(s)ds = 0, \tag{5.1}$$

то функция H может быть представлена в виде

$$H(x) = \int\limits_0^1 U\left(\frac{s}{2}, \frac{s}{2}\right)ds - U\left(\frac{|x|}{2}, \frac{|x|}{2}\right), \; x \in [-1, 2]. \tag{5.2}$$

Доказательство. Подставим в формулу (3.2) $y_1 = y_2 = \dfrac{x}{2}$ и выразим из нее $H(x)$, получаем

$$H(x) = H(0) - U\left(\frac{x}{2}, \frac{x}{2}\right), \; x \in [0, 2]. \tag{5.3}$$

Из граничных условий функции Грина, определения 4.2 и формулы (3.2) следует, что функция H является четной, так как

$$H(-x) - H(x) = U(0, x) = 0.$$

Поэтому продолжаем функцию H по четности на отрицательный интервал. Остается найти значение $H(0)$. Для этого рассматриваем интеграл (5.1) из условия теоремы

$$\int_0^1 H(s)ds = H(0) - \int_0^1 U\left(\frac{s}{2}, \frac{s}{2}\right)ds = 0,$$

отсюда получаем

$$H(0) = \int_0^1 U\left(\frac{s}{2}, \frac{s}{2}\right)ds. \tag{5.4}$$

Из равенств (5.3) и (5.4) следует формула (5.2).
Доказательство завершено.

Замечание 5.1. *Функция H определяется по формуле* (3.2) *с точностью до константы. Чтобы в разложении в ряд Фурье функции H свободная константа равнялась нулю, в условие леммы 5.1 добавлено равенство* (5.1).

Лемма 5.1 показывает, что для построения функции H необходимо знать функцию U на диагонали.

Заметим, что явный вид функции Грина задачи (4.1), а следовательно и матрицы Ляпунова U, зависит от знака коэффициента b. Поэтому рассмотрим три случая.

5.1. Случай $b > 0$

Как уже было отмечено выше, в этом случае матрица Ляпунова U совпадает с точностью до мультипликативной константы с функцией Грина для одномерного уравнения Гельмгольца с однородными условиями Дирихле.

В работе [16] получена явная формула для функции Грина. Тогда, матрица Ляпунова, в соответствии с определением 4.2, имеет вид

$$U(y_1, y_2) = \begin{cases} \dfrac{\sin k(1-y_2)\sin ky_1}{2ak\sin k}, \; y_2 \geqslant y_1, \\ \dfrac{\sin k(1-y_1)\sin ky_2}{2ak\sin k}, \; y_2 \leqslant y_1. \end{cases} \tag{5.5}$$

Теперь нужно восстановить из нее функцию H, чтобы затем сравнить ее с рядом (3.3) из определения 3.1. Воспользуемся леммой 5.2, которая показывает, что для построения функции H необходимо знать функцию U на диагонали. Из формулы (5.5) следует, что

$$U\left(\frac{|x|}{2}, \frac{|x|}{2}\right) = \frac{1}{2ak}\left(\cos k\frac{x}{2} - \cot k \sin k\frac{|x|}{2}\right)\sin k\frac{|x|}{2}. \tag{5.6}$$

Из формул (5.6) и (5.2) получаем явный вид для функции

$$H(x) = -\frac{1}{4ak}\left(\cot k\cos kx + \sin k|x| - \frac{1}{k}\right), \; x \in [-1, 2]. \tag{5.7}$$

Теперь мы можем сравнить полученную функцию H и H из определения 3.1, представленную в виде ряда. Сперва заметим, что H является 2-периодической. На отрезке $[-1, 1]$ разложим в ряд Фурье функцию (5.7). Так как она чётная, то коэффициенты при синусах равны нулю. По построению H аддитивная константа также равна нулю. Переходим к нахождению коэффициентов при косинусах. Вычисляем все необходимые интегралы. В итоге получаем значения

$$a_i = \frac{1}{2a\pi^2 i^2 - 2b}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Значит, разложение в ряд Фурье функции (5.7) совпадает с рядом (3.3) из определения 3.1.

5.2. Случай $b < 0$

Здесь матрица Ляпунова совпадает с точностью до мультипликативной константы с функцией Грина для модифицированного уравнения Гельмгольца с однородными условиями Дирихле, но явного вида функции Грина для этого случая нам найти не удалось. Его несложно построить, используя теорию из книги [14], или же непосредственно, используя свойства функции Грина задачи (4.1) при $b < 0$.

Воспользуемся вторым способом и введём константу $k = \sqrt{-b/a}$. Построим решение уравнения из свойства 1 функции Грина с учётом определения 4.2 в области $y_1 > y_2$. Затем по свойству симметрии функции Грина, а следовательно, и матрицы Ляпунова, продолжим решение на область $y_1 < y_2$. В итоге получаем, что матрица Ляпунова будет иметь вид

$$U(y_1, y_2) = \begin{cases} C_1(y_2)\exp(ky_1) + C_2(y_2)\exp(-ky_1),\ y_2 \geqslant y_1, \\ C_1(y_1)\exp(ky_2) + C_2(y_1)\exp(-ky_2),\ y_2 \leqslant y_1. \end{cases}$$

Из свойства 3 функции Грина и однородных граничных условий с учетом определения 4.2 находим явное выражение для функции

$$C_1(y) = \frac{1}{4ak}\Bigg(\cosh ky - \coth k \sinh ky\Bigg).$$

В итоге матрица Ляпунова, найденная по определению 4.2, имеет вид

$$U(y_1, y_2) = \begin{cases} \dfrac{\sinh k(1-y_2)\sinh ky_1}{2ak\sinh k},\ y_2 \geqslant y_1, \\ \dfrac{\sinh k(1-y_1)\sinh ky_2}{2ak\sinh k},\ y_2 \leqslant y_1. \end{cases} \tag{5.8}$$

Используя лемму 5.1, найдем явный вид функции H:

$$H(x) = \frac{1}{4ak}\Bigg(\coth k\cosh kx - \sinh k|x| - \frac{1}{k}\Bigg),\ x \in [-1, 2]. \tag{5.9}$$

Затем разложим функцию (5.9) в ряд Фурье и сравним полученное разложение с рядом из определения 3.1. В силу чётности функции H коэффициенты при синусах равны нулю. По построению H аддитивная константа также равна нулю. Теперь вычислим коэффициенты при косинусах:

$$a_i = \frac{1}{2a\pi^2 i^2 - 2b}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

5.3. Случай $b = 0$

Из определения 4.2 естественно следует, что в этом случае матрица Ляпунова U совпадает с точностью до мультипликативной константы с функцией Грина для уравнения Пуассона. В работе [14] для параметра $a = -1$ эта функция представлена в виде

$$G(y_1, y_2) = \begin{cases} y_1(1-y_2), \ y_2 \geqslant y_1, \\ y_2(1-y_1), \ y_2 \leqslant y_1. \end{cases}$$

Значит, матрица Ляпунова при $b = 0$ имеет вид

$$U(y_1, y_2) = \begin{cases} \dfrac{y_1(1-y_2)}{2a}, \ y_2 \geqslant y_1, \\ \dfrac{y_2(1-y_1)}{2a}, \ y_2 \leqslant y_1. \end{cases} \tag{5.10}$$

Теперь по полученной функции U, используя лемму 5.1, построим

$$H(x) = \frac{1}{4a}\left(\frac{x^2}{2} - |x| + \frac{1}{3}\right), \ x \in [-1, 2]. \tag{5.11}$$

Далее, как и в предыдущих случаях, разложим функцию (5.11) в ряд Фурье и сравним полученный ряд с формулой (3.3).

Функция (5.11) чётная, следовательно, коэффициенты при синусах равны нулю. По построению H аддитивная константа также равна нулю. Вычислим оставшиеся коэффициенты при косинусах:

$$a_i = \frac{1}{4a}\int\limits_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - |x| + \frac{1}{3}\right)\cos{(\pi i x)}dx = \frac{1}{2a\pi^2 i^2}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

После рассмотрения трёх случаев, можно сформулировать следующий результат.

Теорема 5.1. *Пусть* $k = \sqrt{\dfrac{|b|}{a}}$. *Матрица Ляпунова, построенная по определению 4.2, имеет вид*

- (5.5) *при* $b > 0$ *и* $\sin k \neq 0$,
- (5.8) *при* $b < 0$,
- (5.10) *при* $b = 0$.

В остальных случаях матрицы Ляпунова не существует.

Теорема 5.2. *Матрица Ляпунова, определённая через функцию Грина задачи* (4.1), *также удовлетворяет определению 3.1.*

Можно показать, что построенная функция U действительно совпадает с функцией $-\dfrac{1}{2}G$, где G – функция Грина задачи (4.1). Также нетрудно показать, что она представима в виде разности значений функции H, ряд которой совпадает с рядом из формулы (3.3). Из этих рассуждений можно сформулировать следующий результат.

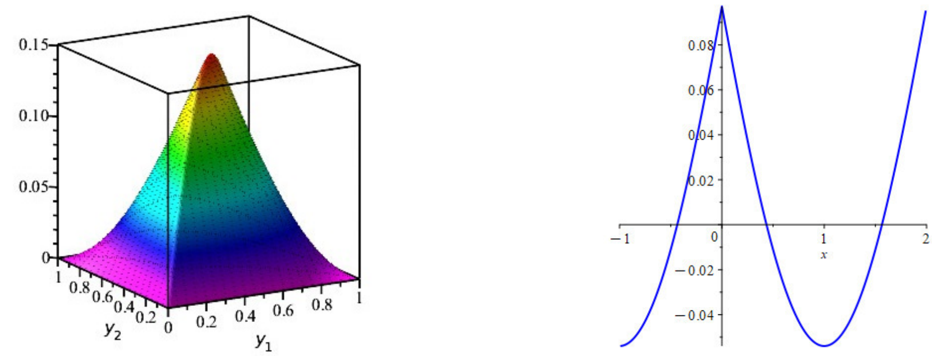
Теорема 5.3. *Определение 3.1 и определение 4.2 эквивалентны.*

6. Пример

Рассмотрим краевую задачу (2.1). Отметим, что ее решение будет экспоненциально устойчивым при выполнении следующего условия: $b < a\pi^2$.

Для иллюстрации полученных результатов построим матрицу Ляпунова при различных значениях параметров краевой задачи (2.1).

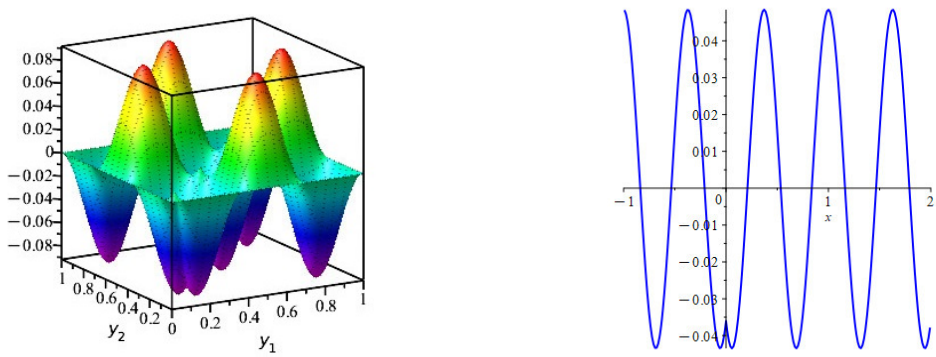
Рассмотрим случай $b > 0$. На рис. 6.1 представлены графики матрицы U и соответствующей функции H для экспоненциально устойчивой краевой задачи. На рис. 6.2 изображён график U для неустойчивого случая — видно, что часть его лежит в области отрицательных значений. Также отметим, что функция H пересекает ось ординат ниже нуля в отличие от предыдущего случая.



a) *b*)

Рис. 6.1. Параметры краевой задачи $a = 1$, $b = 2$:
a) матрица Ляпунова $U(y_1, y_2)$, b) функция $H(x)$

Fig. 6.1. Parameters of the boundary value problem $a = 1$, $b = 2$:
a) Lyapunov matrix $U(y_1, y_2)$, b) function $H(x)$



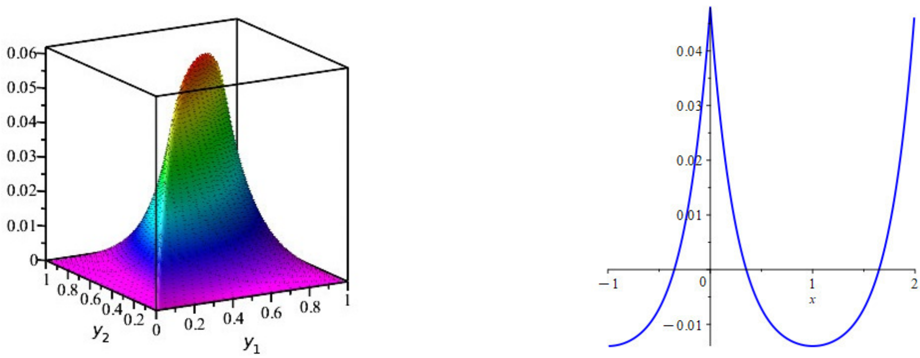
a) *b*)

Рис. 6.2. Параметры краевой задачи $a = 1$, $b = 100$:
a) матрица Ляпунова $U(y_1, y_2)$, b) функция $H(x)$

Fig. 6.2. Parameters of the boundary value problem $a = 1$, $b = 100$:
a) Lyapunov matrix $U(y_1, y_2)$, b) function $H(x)$

Далее рассмотрим задачу (2.1) при значении параметра $b < 0$, который также соответствует экспоненциально устойчивой краевой задаче. График матрицы Ляпунова приведён на рис. 6.3. Аналогично, при $b = 0$ краевая задача остаётся экспоненциально устойчивой, соответствующие графики U и H представлены на рис. 6.4.

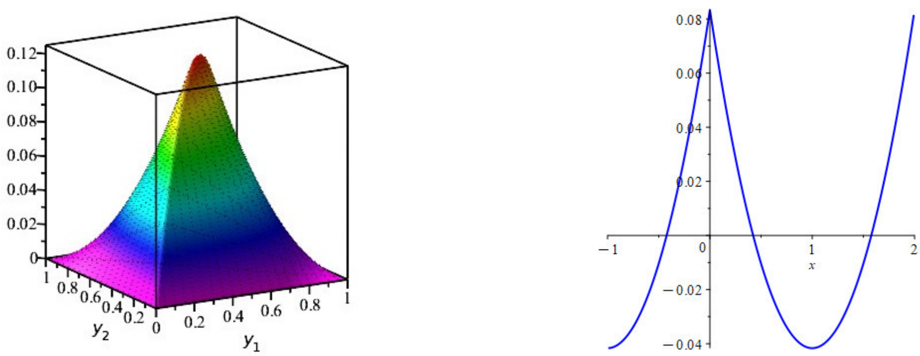
Представленные наблюдения в дальнейшем могут быть использованы для вывода критерия экспоненциальной устойчивости более общей краевой задачи.



a) *b*)

Рис. 6.3. Параметры краевой задачи $a = 1,\ b = -15$:
а) матрица Ляпунова $U(y_1, y_2)$, b) функция $H(x)$

Fig. 6.3. Parameters of the boundary value problem $a = 1,\ b = -15$:
a) Lyapunov matrix $U(y_1, y_2)$, b) function $H(x)$



a) *b*)

Рис. 6.4. Параметры краевой задачи $a = 1,\ b = 0$:
а) матрица Ляпунова $U(y_1, y_2)$, b) функция $H(x)$

Fig. 6.4. Parameters of the boundary value problem $a = 1,\ b = 0$:
a) Lyapunov matrix $U(y_1, y_2)$, b) function $H(x)$

7. Заключение

В работе для уравнения параболического типа построен функционал с заданной отрицательно определённой производной, ключевым элементом которого является функциональная матрица Ляпунова. В статье введены два определения этой матрицы. Первое возникает непосредственно при построении функционала по заданной производной, матрица Ляпунова представляет собой тригонометрический ряд. Второе определение было сформулировано через функцию Грина для соответствующего стационарного уравнения. На основе второго определения получена явная формула для построения матрицы Ляпунова. Доказано, что всякая функция, удовлетворяющая второму определению, автоматически удовлетворяет и первому. Построенные функционалы и матрицы Ляпунова могут быть применены для исследования устойчивости и робастной устойчивости краевых задач, а также для построения экспоненциальных оценок решений.

Кроме того, полученные в работе результаты могут быть перенесены на уравнения параболического типа с запаздыванием, которые применяются в некоторых прикладных задачах [17], в частности, в биологических системах, где такие уравнения описывают динамику популяции с пространственным распределением и запаздывающей реакцией на изменения окружающей среды [18].

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-71-10099, https://rscf.ru/project/23-71-10099/

Список литературы

1. Rogolino P., Kovács R., Ván P., Cimmelli V. A. Generalized heat-transport equations: parabolic and hyperbolic models. *Continuum Mechanics and Thermodynamics.* 2018. Vol. 30, no. 6. P. 1245–1258. DOI: 10.1007/s00161-018-0643-9.

2. Szabo T. L., Wu J. A model for longitudinal and shear wave propagation in viscoelastic media *The Journal of the Acoustical Society of America.* 2000. Vol. 107, no. 5. P. 2437–2446. DOI: 10.1121/1.428630.

3. Rubinow S. I., Keller J. B. Wave propagation in a viscoelastic tube containing a viscous fluid. *Journal of Fluid Mechanics.* 1978. Vol. 88, no. 1. P. 181–203. DOI: 10.1017/S0022112078002049.

4. Friedman A. Partial Differential Equations of Parabolic Type. Malabar, FL: R. E. Krieger Publishing Co., 1983. 347 p.

5. Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., Uraltseva N. N. Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type. Providence, RI: American Mathematical Society, 1968. 648 p.

6. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.–Л.: ГИТТЛ, 1950. 472 с.

7. Fridman E. New Lyapunov–Krasovskii functionals for stability of linear retarded and neutral type systems. *Systems & Control Letters.* 2001. Vol. 43, no. 4. P. 309–319.

8. Egorov A. V., Mondié S. Necessary stability conditions for linear delay systems. *Automatica.* 2014. Vol. 50, no. 12. P. 3204–3208.

9. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматлит, 1959. 211 с.

10. Kharitonov V. L., Zhabko A. P. Lyapunov–Krasovskii approach to the robust stability analysis of time-delay systems. *Automatica.* 2003. Vol. 39, no. 1. P. 15–20.

11. Kharitonov V. L. Time-Delay Systems: Lyapunov Functionals and Matrices. Basel: Birkhäuser, 2013. 316 p.

12. Egorov A. V., Mondié S. A stability criterion for the single delay equation in terms of the Lyapunov matrix // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10.* 2013. № 1. С. 106–115.

13. Полянин А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001. 576 с.

14. Arfken H., Weber G., Harris F. Mathematical Methods for Physicists. Amsterdam: Elsevier, 2013. 1220 p.

15. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1969. 528 с.

16. de Castro A. S. Green's function for the one-dimensional Helmholtz equation: closed-form solution from its Fourier sine series. *Revista Brasileira de Ensino de Física.* 2021. Vol. 43. e20210068. DOI: 10.1590/1806-9126-RBEF-2021-0068.

17. Polyanin A. D., Sorokin V. G., Zhurov A. I. Ordinary and Partial Differential Equations with Delay. Boca Raton, FL: Chapman and Hall/CRC, 2023. 712 p.

18. Nonlinear Oscillations in Biology and Chemistry: Proceedings of a Meeting Held at the University of Utah (May 9–11, 1985). Ed. by H. G. Othmer. Berlin–Heidelberg: Springer, 2013. 353 p.

Поступила 25.05.2025; доработана после рецензирования 29.10.2025; принята к публикации 25.02.2026

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

References

1. P. Rogolino, R. Kovács, P. Ván, V. A. Cimmelli, "Generalized heat-transport equations: parabolic and hyperbolic models", *Continuum Mech. Thermodyn.*, **30**:6 (2018), 1245–1258. DOI: https://doi.org/10.1007/s00161-018-0643-9

2. T. L. Szabo, J. Wu, "A model for longitudinal and shear wave propagation in viscoelastic media", *J. Acoust. Soc. Am.*, **107**:5 (2000), 2437–2446. DOI: https://doi.org/10.1121/1.428630

3. S. I. Rubinow, J. B. Keller, "Wave propagation in a viscoelastic tube containing a viscous fluid", *J. Fluid Mech.*, **88**:1 (1978), 181–203. DOI: https://doi.org/10.1017/S0022112078002049

4. A. Friedman, *Partial Differential Equations of Parabolic Type*, R. E. Krieger Publishing Co., Malabar, Fla., 1983, ISBN: 0-89874-660-4, 347 p.

5. O. A. Ladyzhenskaia, V. A. Solonnikov, N. N. Uraltseva, *Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic Type*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1968, ISBN: 978-0-8218-8653-3

6. A. M. Lyapunov, *Obshchaya zadacha ob ustojchivosti dvizheniya [The General Problem of Motion Stability]*, GITTL, Moscow–Leningrad, 1950 (In Russ.), 472 p.

7. E. Fridman, "New Lyapunov–Krasovskii functionals for stability of linear retarded and neutral type systems", *Syst. Control Lett.*, **43**:4 (2001), 309–319.

8. A. V. Egorov, S. Mondié, "Necessary stability conditions for linear delay systems", *Automatica*, **50**:12 (2014), 3204–3208.

9. N. N. Krasovskii, *Nekotorye zadachi teorii ustojchivosti dvizheniya [Some Problems of the Theory of Motion Stability]*, Gos. izd-vo fiz.-mat. lit., Moscow, 1959 (In Russ.), 211 p.

10. V. L. Kharitonov, A. P. Zhabko, "Lyapunov–Krasovskii approach to the robust stability analysis of time-delay systems", *Automatica*, **39**:1 (2003), 15–20.

11. V. L. Kharitonov, *Time-Delay Systems: Lyapunov Functionals and Matrices*, Birkhäuser, Basel, 2013, 316 p.

12. A. V. Egorov, S. Mondié, "A stability criterion for the single delay equation in terms of the Lyapunov matrix", *Vestn. Saint Petersburg Univ., Ser. 10.*, 2013, no. 1, 106–115.

13. A. D. Polyanin, *Spravochnik po lineynym uravneniyam matematicheskoy fiziki [Handbook on Linear Equations of Mathematical Physics]*, FIZMATLIT, Moscow, 2001 (In Russ.), 576 p.

14. H. Arfken, G. Weber, F. Harris, *Mathematical Methods for Physicists*, **66**, Elsevier, Amsterdam, 2013, 1220 p.

15. M. A. Naimark, *Lineinye differentsialnye operatory [Linear Differential Operators]*, Nauka, Moscow, 1969 (In Russ.), 528 p.

16. de Castro A. S., "Green's function for the one-dimensional Helmholtz equation: closed-form solution from its Fourier sine series", *Rev. Bras. Ensino Fís.*, **43** (2021), e20210068.

17. A. D. Polyanin, V. G. Sorokin, A. I. Zhurov, *Ordinary and Partial Differential Equations with Delay*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2023, 712 p.

18. H. G. Othmer (Ed.), *Nonlinear Oscillations in Biology and Chemistry: Proceedings of a Meeting Held at the University of Utah, (May 9–11, 1985)*, **66**, Springer, Berlin, Heidelberg, 2013, 353 p.

Submitted 25.05.2025; Revised 29.10.2025; Accepted 25.02.2026

The authors have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.