Математика

DOI 10.15507/2079-6900.28.202601.11-30
Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.51

О некоторых свойствах многочленов, наименее уклоняющихся от нуля на положительной полуоси по экспоненциальной норме

О. Е. Галкин, С. Ю. Галкина, И. Ю. Ястребова

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (г. Нижний Новгород, Российская Федерация)

Аннотация. Многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля, играют важную роль в теории и практике использования численных методов. С их помощью можно решать задачи оптимизации свойств различных вычислительных алгоритмов. Наша работа посвящена изучению многочленов, наименее уклоняющихся от нуля на луче $[0, +\infty)$ в экспоненциальной норме. Экспоненциальная норма для любого $\alpha > 0$ и любого бесконечного подмножества $K \subset \mathbb{R}$ определяется равенством $\|P\|_{\alpha,K} = \sup\limits_{x \in K} e^{-|x|^{\alpha}} |P(x)|$. В настоящей статье мы обсуждаем вопрос о существовании, единственности и характеризации многочленов, наименее уклоняющихся от нуля по экспоненциальной норме $\|\cdot\|_{\alpha,[0;+\infty)}$, выводим систему уравнений, которым должны подчиняться такие многочлены, переформулируем для нормы $\|\cdot\|_{\alpha,[0;+\infty)}$ результаты Мхаскара и Саффа 1984 года, полученные ими для нормы $\|\cdot\|_{\alpha,\mathbb{R}}$. Далее мы приближенно вычисляем многочлены первой и второй степени, наименее уклоняющиеся от нуля по норме $\|\cdot\|_{1,[0;+\infty)}$, и получили (если ограничиться тремя цифрами после запятой), что они имеют вид $x - 0.279$ и $x^2 - 1.620x + 0.217$ соответственно. Применённый нами метод является альтернативным по отношению к алгоритму Ремеза. При вычислениях мы используем принцип сжимающих отображений, метод Ньютона и метод Галлея. Полученные нами результаты проиллюстрированы графиками.

Ключевые слова: экспоненциальная норма, многочлен наилучшего приближения, теорема Бернштейна-Чебышёва

Для цитирования: Галкин О. Е., Галкина С. Ю., Ястребова И. Ю. О некоторых свойствах многочленов, наименее уклоняющихся от нуля на положительной полуоси в экспоненциальной норме // *Журнал Средневолжского математического общества.* 2026. Т. 28, № 1. С. 11–30. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202601.11-30

Об авторах:
Галкин Олег Евгеньевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), ORCID: http://orcid.org/0000-0003-2085-572X, olegegalkin@ya.ru
Галкина Светлана Юрьевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-2476-2275, svetlana.u.galkina@mail.ru
Ястребова Ирина Юрьевна, старший преподаватель кафедры прикладной математики, Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (603022, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23), ORCID: https://orcid.org/0009-0009-5991-7466, yastrebova@unn.ru

---

Original article

MSC2020 41A50, 41A81, 65D15

On some properties of polynomials that are least-deviating from zero on the positive semi-axis in the exponential norm

O. E. Galkin, S. Yu. Galkina, I. Yu. Yastrebova

National Research University «Higher School of Economics» (Nizhny Novgorod, Russian Federation)

Abstract. Polynomials that are least-deviating from zero play an important role in the theory and practice of using numerical methods. They can be used to solve problems of optimizing the properties of various computational algorithms. So, our work is devoted to the study of polynomials that are least-deviating from zero on the ray $[0,+\infty)$ in the exponential norm. Such a norm for any $\alpha>0$ and any infinite subset $K\subset\mathbb{R}$ is defined by the equality $\|P\|_{\alpha,K}=\sup\limits_{x\in K} e^{-|x|^{\alpha}}|P(x)|$. In this article, we discuss the existence, uniqueness, and characterization of polynomials that deviate least from zero in the norm $\|\cdot\|_{\alpha,[0;+\infty)}$, derive a system of equations that such polynomials must obey, and reformulate the results of Mhaskar and Saff (1984), obtained for the norm $\|\cdot\|_{\alpha,\mathbb{R}}$, according to our kind of norm. Next, we approximately calculate the polynomials of the first and second degrees that deviate least from zero according to the norm $\|\cdot\|_{1,[0;+\ infty)}$. Our method is an alternative to Remez algorithm. In the calculations, we use the principle of contracting mappings, Newton's method and Halley's method. Our results are illustrated by pictures.

Keywords: exponential norm, best approximation polynomial, Bernstein-Chebyshev theorem

For citation: *O. E. Galkin, S. Yu. Galkina, I. Yu. Yastrebova.* On some properties of polynomials that are least-deviating from zero on the positive semi-axis in the exponential norm. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 28:1(2026), 11–30. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202601.11-30

About the authors:
Oleg E. Galkin, Ph. D. (Phys. and Math.), Associate Professor, Department of Fundamental Mathematics, National Research University «Higher School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603155, Russia), ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2085-572X, olegegalkin@ya.ru
Svetlana Yu. Galkina, Ph. D. (Phys. and Math.), Associate Professor, Department of Fundamental Mathematics, National Research University «Higher School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603155, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-2476-2275, svetlana.u.galkina@mail.ru
Irina Yu. Yastrebova, Senior Lecturer, Department of Applied Mathematics, National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (23 Gagarin Av., Nizhny Novgorod 603022, Russia), ORCID: https://orcid.org/0009-0009-5991-7466, yastrebova@unn.ru

1. Введение

Работа посвящена изучению многочленов, наименее уклоняющихся от нуля на луче $[0,+\infty)$ в экспоненциальной норме.

Сначала приведём определения многочленов, наименее уклоняющихся от нуля, и экспоненциальной нормы. При каждом $n \in \{0,1,2,\ldots\}$ будем обозначать через $\mathscr{P}_n$ пространство всех вещественных многочленов степени не выше n.

Определение 1.1. *Пусть $\|\cdot\|$ – некоторая норма на $\mathscr{P}_n$. Многочлен $T_n(x) = x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \ldots - a_1x - a_0$ называется многочленом степени n, наименее уклоняющимся от нуля (или многочленом Чебышёва) по норме $\|\cdot\|$, если он имеет минимальную норму среди норм всех многочленов из $\mathscr{P}_n$, имеющих единичный старший коэффициент. Это означает, что*

$$\|T_n\| = \inf_{c_0,c_1,\ldots,c_{n-1}\in\mathbb{R}} \|x^n - c_{n-1}x^{n-1} - \ldots - c_1x - c_0\| = \inf_{Q\in\mathscr{P}_{n-1}} \big\|x^n - Q(x)\big\|.$$

Замечание 1.1. *а) Для многочленов с комплексными коэффициентами определение многочлена, наименее уклоняющегося от нуля, аналогично.*

б) Из определения 1.1 вытекает, что многочлен $T_n(x) = x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \ldots - a_1x - a_0$ наименее уклоняется от нуля по норме $\|\cdot\|$ тогда и только тогда, когда многочлен $R_{n-1}(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ является многочленом наилучшего приближения степени $n-1$ для функции $f(x) = x^n$ по норме $\|\cdot\|$ (см. далее определение 2.2).

Интересующая нас экспоненциальная норма определяется следующим образом:

Определение 1.2. *Для любого числа $\alpha > 0$ и любого бесконечного подмножества $K \subset \mathbb{R}$ экспоненциальная норма $\|\cdot\|_{\alpha,K}$ на пространстве $\mathscr{P}_n$ задается равенством*

$$\|P\|_{\alpha,K} = \sup_{x\in K} e^{-|x|^\alpha}|P(x)|, \quad P \in \mathscr{P}_n.$$

Замечание 1.2. *а) Многочлены степени n, наименее уклоняющиеся от нуля по экспоненциальной норме $\|\cdot\|_{\alpha,K}$, будем обозначать через $T_n(\alpha,K)$, а их значения в точках $x \in \mathbb{R}$ – через $T_n(\alpha,K;x)$.*

б) Величину минимального уклонения многочлена степени n от нуля по экспоненциальной норме $\|\cdot\|_{\alpha,K}$ будем обозначать символом $E_n(\alpha,K)$. Таким образом, $E_n(\alpha,K) = \big\|T_n(\alpha,K)\big\|_{\alpha,K} = \inf_{c_0,c_1,\ldots,c_{n-1}\in\mathbb{R}} \|x^n - c_{n-1}x^{n-1} - \ldots - c_1x - c_0\|_{\alpha,K}$.

Многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля, одним из первых начал изучать П.Л. Чебышёв в работе [1], где он применил их для увеличения точности параллелограмма Уатта. В качестве нормы Чебышёв брал равномерную норму на отрезке $[-1;1]$, в наших обозначениях $\|\cdot\|_{0,[-1;1]}$. Найденные им многочлены (многочлены Чебышёва первого рода) при $n\in\mathbb{N}$ и $x\in[-1;1]$ можно записать с помощью формулы $T_n(0,[-1;1];x)=\dfrac{1}{2^{n-1}}\cdot\cos(n\arccos x)$.

Идеи Чебышёва были развиты его учениками Коркиным и Золотарёвым. В работе 1873 г. [2] они нашли явную формулу для так называемых многочленов Чебышёва второго рода U_n, наименее уклоняющихся от нуля по интегральной L^1-норме $\|P\| = \int\limits_{-1}^{1}|P(x)|\,dx$. При $n\in\mathbb{N}$ и $x\in(-1;1)$ эти многочлены можно записать в следующем виде: $U_n(x)=\dfrac{1}{2^n}\cdot\dfrac{\sin\big((n+1)\arccos x\big)}{\sqrt{1-x^2}}$.

Исследования многочленов, наименее уклоняющихся от нуля, развивались далее другими учеными, и продолжаются до настоящего времени. Изучались как вещественные, так и комплексные многочлены. В качестве норм брались равномерные и интегральные L^r-нормы с различными весами. В том числе решалась задача поиска многочленов, наименее уклоняющихся от нуля, при различных дополнительных ограничениях. Например, в работе [3] изучены вещественные наименее уклоняющихся от нуля по норме $L^r[-1;1]$ с весом полиномы, имеющие постоянный знак. Комплексные многочлены, наименее уклоняющихся от нуля на различных компактных подмножествах комплексной плоскости по равномерной норме, изучались, например, в работах [4–7]. При этом в [7] от многочленов дополнительно требовалось, чтобы они не обращались в ноль в заданном открытом подмножестве из $\mathbb{C}$. Многочленам, наименее уклоняющимся от нуля, и другим экстремальным задачам, связанным с многочленами, посвящена прекрасная монография 1994 г. [8], содержащая обзор большого числа трудов на эту тему. Среди всех работ по данному вопросу нам особенно интересны две, результаты которых мы подробнее изложим далее: статья 1981 г. [9], где используется экспоненциальная норма $\|\cdot\|_{1,[0;+\infty)}$, и статья 1984 г. [10], где применяется экспоненциальная норма $\|\cdot\|_{\alpha,\mathbb{R}}$ при любых $\alpha>0$.

В настоящей статье в параграфе 2 мы обсудили вопрос о существовании, единственности и характеризации многочленов, наименее уклоняющихся от нуля по экспоненциальной норме $\|\cdot\|_{\alpha,[0;+\infty)}$ (см. теорему 2.2), в параграфе 3 вывели систему уравнений, которым должны подчиняться такие многочлены (см. теорему 3.1), в параграфе 4 переформулировали для нормы $\|\cdot\|_{\alpha,[0;+\infty)}$ результаты, полученные в [10] для нормы $\|\cdot\|_{\alpha,\mathbb{R}}$ (см. теорему 4.2). Далее в параграфе 5 мы приближенно вычислили многочлены первой и второй степени, наименее уклоняющиеся от нуля по норме $\|\cdot\|_{1,[0;+\infty)}$, и получили (ограничиваясь тремя цифрами после запятой), что $T_1(1,[0;+\infty);x)\approx x-0.279$ и $T_2(1,[0;+\infty);x)\approx x^2-1.620x+0.217$. Применённый нами метод является альтернативным по отношению к алгоритму Ремеза, изложенному в его монографии [11] (глава 2, §5). При вычислениях мы использовали принцип сжимающих отображений, метод Ньютона и метод Галлея [12]. Полученные нами результаты проиллюстрированы графиками.

Многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля, имеют многочисленные применения. В частности, они применяются для приближения функций телескопическим методом (описание этого метода можно найти, например, в учебнике [13] в пункте 7 параграфа 6 главы 4). Нули таких многочленов используются в качестве узлов интерполяции при построении интерполяционных многочленов (см. например, параграф 9 главы 2 в [13]). Отметим также, что в евклидовой норме наименее уклоняющимися от нуля являются ортогональные многочлены, которые также широко используются.

2. Системы Чебышёва и теорема Бернштейна-Чебышёва

В этом параграфе мы даём общие определения, связанные с многочленами, наименее уклоняющимися от нуля, а также обсуждаем существование, единственность таких многочленов и наличие у них точек альтернанса. В своем изложении будем в основном следовать книгам Бернштейна [14] и Дзядыка [15].

Обозначим через $C_0[0,+\infty)$ класс всех непрерывных функций $f\colon [0,+\infty)\to\mathbb{R}$, удовлетворяющих условию $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. Очевидно, что множество $C_0[0,+\infty)$ является вещественным линейным пространством.

Нам понадобится следующее простое утверждение, которое для полноты изложения приведем с доказательством.

Предложение 2.1. *Для любой функции f из класса $C_0[0,+\infty)$ величина $\sup\limits_{x\geqslant 0}|f(x)|$ конечна и достигается в некоторой точке луча $[0,+\infty)$, т.е. существует такое $a\in[0,+\infty)$, что $\sup\limits_{x\geqslant 0}|f(x)|=|f(a)|$.*

Доказательство. В силу определения супремума существует такая последовательность неотрицательных чисел $(x_k)_{k=1}^{\infty}$, что

$$\sup_{x\geqslant 0}|f(x)|=\lim_{k\to\infty}|f(x_k)|. \tag{2.1}$$

Рассмотрим два возможных случая.

1) Если последовательность $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ ограничена, то, согласно теореме Больцано-Вейерштрасса, существует её подпоследовательность $(x_{k_i})_{i=1}^{\infty}$, сходящаяся к некоторой точке $a\in[0,+\infty)$. Тогда в силу непрерывности функции f из (2.1) вытекает нужное соотношение: $\sup\limits_{x\geqslant 0}|f(x)|=\lim\limits_{i\to\infty}|f(x_{k_i})|=|f(a)|$.

2) Если же последовательность $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ неограничена, то у неё существует подпоследовательность $(x_{k_j})_{j=1}^{\infty}$, сходящаяся к $+\infty$. Тогда из (2.1) и определения класса $C_0[0,+\infty)$ вытекает, что $\sup\limits_{x\geqslant 0}|f(x)|=\lim\limits_{j\to\infty}|f(x_{k_j})|=0$. Следовательно, $f(x)=0$ при любом $x\in[0,+\infty)$, и можно взять $a=0$.
Доказательство завершено.

Очевидно, что в пространстве $C_0[0,+\infty)$ отображение $f\mapsto\|f\|_\infty=\sup\limits_{x\geqslant 0}|f(x)|$ задает норму. Как обычно, будем называть ее равномерной нормой.

Определение 2.1. *Обобщённым полиномом по системе вещественнозначных функций $\{\varphi_0,\ \varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_n\}$ будем называть любую функцию вида $\sum\limits_{k=0}^{n}c_k\varphi_k$, где $c_0,c_1,\ldots,c_n\in\mathbb{R}$.*

Определение 2.2. *Пусть даны вещественнозначные функции $\varphi_0,\ \varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_n$ и f, принадлежащие некоторому нормированному пространству X с нормой $\|\cdot\|_X$, а* *также числа* $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$*. Будем называть функцию* $\varphi = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\varphi_k$ *обобщённым полиномом наилучшего приближения для функции* f *по системе* $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ *в норме* $\|\cdot\|_X$*, если для любого обобщённого полинома* $\sum\limits_{k=0}^{n} c_k\varphi_k$ *выполняется неравенство* $\|f-\varphi\|_X \leqslant \|f - \sum\limits_{k=0}^{n} c_k\varphi_k\|_X$.

Определение 2.3. *Систему функций* $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$*, принадлежащих классу* $C_0[0,+\infty)$*, назовём системой Чебышёва порядка* n *на луче* $[0,+\infty)$*, если обобщённый полином* $\sum\limits_{k=0}^{n} c_k\varphi_k$ *может иметь более, чем* n *различных корней на* $[0,+\infty)$ *только в том случае, когда он тождественно равен нулю, то есть когда* $c_0 = c_1 = \ldots = c_n = 0$.

Пример 2.1. При любых $n \in \{0,1,2,\ldots\}$ и $\alpha > 0$ система функций $\{e^{-x^\alpha}, e^{-x^\alpha}x, \ldots, e^{-x^\alpha}x^n\}$ является системой Чебышёва порядка n на луче $[0,+\infty)$. Это вытекает из основной теоремы алгебры (см., например, в [16] теорему 1 в пункте 1 §3).

В силу предложения 2.1, частным случаем теоремы Бернштейна (см. § 5 первой главы книги [14], где она названа основной теоремой Чебышёва, а также следствие 1 из этой теоремы) является следующий результат, который можно назвать теоремой Бернштейна-Чебышёва об альтернансе для луча:

Теорема 2.1. *Пусть функции* φ_0, φ_1, $\ldots$, φ_n *из класса* $C_0[0,+\infty)$ *образуют систему Чебышёва порядка* n *на луче* $[0,+\infty)$*. Тогда верны следующие два факта:*

1) Для того, чтобы обобщённый полином $\varphi = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\varphi_k$ *был обобщённым полиномом наилучшего приближения для данной функции* $f \in C_0[0,+\infty)$ *в равномерной норме на луче* $[0,+\infty)$*, необходимо и достаточно, чтобы величина*

$$\|f-\varphi\|_\infty = \sup_{x\geqslant 0} |f(x)-\varphi(x)|$$

достигалась не менее, чем в $n+2$ *точках* $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1}$ *луча* $[0,+\infty)$*, в которых знаки разностей* $f(x_0)-\varphi(x_0)$, $\ldots$, $f(x_{n+1})-\varphi(x_{n+1})$ *последовательно противоположны, т.е.* $f(x_{i+1})-\varphi(x_{i+1}) = -(f(x_i)-\varphi(x_i))$ *при всех* $i = \overline{0,n}$.

2) Для любой функции $f \in C_0[0,+\infty)$ *обобщённый полином наилучшего приближения по системе* φ_0, φ_1, $\ldots$, φ_n *в равномерной норме на луче* $[0,+\infty)$ *существует и единственен.*

Из этой теоремы вытекает другая теорема, которую можно было бы назвать теоремой Бернштейна-Чебышёва об альтернансе для многочлена, наименее уклоняющегося от нуля на луче по экспоненциальной норме:

Теорема 2.2. *Пусть* n *– произвольное натуральное число и* $\alpha > 0$*. Тогда:*

1) Для того, чтобы многочлен $P_n(x) = x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \ldots - a_0$ *был наименее уклоняющимся от нуля по экспоненциальной норме* $\|\cdot\|_{\alpha,[0,+\infty)}$*, необходимо и достаточно, чтобы величина* $\|P_n\|_{\alpha,[0,+\infty)} = \sup\limits_{x\geqslant 0} e^{-x^\alpha}|P_n(x)|$ *достигалась не менее, чем в* $n+1$ *точках* $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ *луча* $[0,+\infty)$*, в которых значения выражений* $e^{-x_0^\alpha}P_n(x_0)$, $\ldots$, $e^{-x_n^\alpha}P_n(x_n)$ *последовательно противоположны, то есть* $e^{-x_{i+1}^\alpha}P_n(x_{i+1}) = -e^{-x_i^\alpha}P_n(x_i)$ *при всех* $i = \overline{0,n-1}$.

2) Многочлен степени n, наименее уклоняющийся от нуля на луче $[0, +\infty)$ по экспоненциальной норме $\|\cdot\|_{\alpha,[0,+\infty)}$, существует и единственен.

Доказательство. Действительно, верно равенство

$$\|P_n\|_{\alpha,[0,+\infty)} = \sup_{x\geqslant 0} e^{-x^\alpha}|P_n(x)| = \sup_{x\geqslant 0}|e^{-x^\alpha}x^n - a_{n-1}e^{-x^\alpha}x^{n-1} - \ldots - a_0 e^{-x^\alpha}| = \|f-\varphi\|_\infty,$$

где $f(x) = e^{-x^\alpha}x^n \in C_0[0,+\infty)$ и $\varphi(x) = a_{n-1}e^{-x^\alpha}x^{n-1} + \ldots + a_0e^{-x^\alpha} \in C_0[0,+\infty)$. Поэтому многочлен P_n тогда и только тогда является наименее уклоняющимся от нуля по норме $\|\cdot\|_{\alpha,[0,+\infty)}$, когда обобщённый полином φ по системе Чебышёва $\{e^{-x^\alpha}, e^{-x^\alpha}x, \ldots, e^{-x^\alpha}x^n\}$ даёт наилучшее приближение для функции f по равномерной норме на луче $[0,+\infty)$, при этом $f(x) - \varphi(x) = e^{-x^\alpha}P_n(x)$. В силу теоремы 2.1, это равносильно тому, что величина $\|f-\varphi\|_\infty = \sup\limits_{x\geqslant 0}|f(x)-\varphi(x)|$ достигается не менее, чем в $n+1$ точках $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ луча $[0,+\infty)$, в которых значения разностей $f(x_i) - \varphi(x_i) = e^{-x_i^\alpha}P_n(x_i)$ при $i = \overline{0,n}$ последовательно противоположны.
Доказательство завершено.

Точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$, упомянутые в теореме 2.2, называются точками альтернанса.

Аналогично теореме 2.2 может быть доказана следующая теорема.

Теорема 2.3. *При любом натуральном n и любом $\alpha > 0$ многочлен степени n, наименее уклоняющийся от нуля на всём $\mathbb{R}$ по экспоненциальной норме $\|\cdot\|_{\alpha,\mathbb{R}}$, существует и единственен.*

3. Уравнения для поиска многочлена, наименее уклоняющегося от нуля на луче $[0,+\infty)$ по экспоненциальной норме $\|\cdot\|_{\alpha,[0,+\infty)}$

Доказанная в предыдущем параграфе теорема 2.2 фактически является переформулировкой теоремы 2.1 Бернштейна-Чебышёва для интересующего нас частного случая. Система уравнений, полученная в следующей теореме 3.1, уже позволяет находить коэффициенты искомого экстремального полинома.

Теорема 3.1. *Пусть n – произвольное натуральное число и $\alpha > 0$. Тогда*

1) Многочлен $P_n(x) = x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \ldots - a_0$ является многочленом, наименее уклоняющимся от нуля на луче $[0,+\infty)$ по экспоненциальной норме $\|\cdot\|_{\alpha,[0,+\infty)}$, тогда и только тогда, когда существуют n положительных чисел $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, таких что выполняются равенства

$$\begin{cases} P_n(0) = (-1)^n\|P_n\|_{\alpha,[0,+\infty)} \\ P_n(x_i) = (-1)^{n-i}e^{x_i^\alpha}\|P_n\|_{\alpha,[0,+\infty)}, \quad i = 1,\ldots,n \\ \alpha x_i^{\alpha-1}P_n(x_i) - P_n'(x_i) = 0, \quad i = 1,\ldots,n \end{cases} \tag{3.1}$$

2) Решение системы уравнений (3.1), в которой искомыми являются многочлен $P_n(x) = x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \ldots - a_0$ и положительные числа $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, существует и единственно.

3) Пусть система уравнений

$$\begin{cases} P_n(0) = (-1)^n h_n \\ P_n(x_i) = (-1)^{n-i}e^{x_i^\alpha}h_n, \quad i = \overline{1,n} \\ \alpha x_i^{\alpha-1}P_n(x_i) - P_n'(x_i) = 0, \quad i = \overline{1,n}, \end{cases} \tag{3.2}$$

в которой искомыми являются многочлен $P_n(x) = x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \ldots - a_0$ и положительные числа h_n, $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, имеет единственное решение. Тогда P_n является многочленом, наименее уклоняющимся от нуля по экспоненциальной норме $\|\cdot\|_{\alpha,[0,+\infty)}$, причем выполняется равенство $\|P_n\|_{\alpha,[0,+\infty)} = h_n$.

Доказательство. 1а) Пусть P_n – многочлен, наименее уклоняющийся от нуля по норме $\|\cdot\|_{\alpha,[0,+\infty)}$. Тогда в силу теоремы 2.2 существуют точки альтернанса $0 \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, такие что $e^{-x_i^\alpha}|P_n(x_i)| = \|P_n\|_{\alpha,[0,+\infty)}$ при всех $i = \overline{1,n}$ и $e^{-x_{i+1}^\alpha}P_n(x_{i+1}) = -e^{-x_i^\alpha}P_n(x_i)$ при всех $i = \overline{0,n-1}$. Отсюда следует равенство $P_n(x_i) = (-1)^{n-i}\mathrm{sign}\big(P_n(x_n)\big)e^{x_i^\alpha}\|P_n\|_{\alpha,[0,+\infty)}$ при любых $i = \overline{0,n}$.

Так как $\lim\limits_{x\to+\infty} P_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^n\left(1 - \dfrac{a_{n-1}}{x} - \ldots - \dfrac{a_0}{x^n}\right) = +\infty$, то $P_n(x) > 0$ при всех достаточно больших x. Поскольку между соседними точками альтернанса x_{i-1} и x_i любом $i = \overline{1,n}$ многочлен P_n имеет хотя бы один корень z_i, а всего он имеет не более n корней, то при $x \geqslant x_n$ знак $P_n(x)$ не меняется. Следовательно, $P_n(x_n) > 0$. Таким образом, $P_n(x_i) = (-1)^{n-i}e^{x_i^\alpha}\|P_n\|_{\alpha,[0,+\infty)}$ при всех $i = \overline{0,n}$. Из предыдущих рассуждений следует также, что на каждом из n промежутков $[x_{i-1}, x_i)$, где $i = \overline{1,n}$, корень z_i является единственным, и вне этих промежутков корней у P_n нет. Поэтому многочлен P_n не имеет корней и на полуинтервале $[0; z_1)$.

Предположим, что $x_0 > 0$ и покажем, что это неверно. Поскольку на промежутке $[0; z_1)$ у P_n нет корней, функция $y = |P_n(x)|$ на нем убывает. Поэтому верно неравенство $e^{-x^\alpha}|P_n(x)| > e^{-x_0^\alpha}|P_n(x_0)|$ при всех $x \in [0; x_0)$, что противоречит наличию альтернанса в точке x_0. Таким образом, $x_0 = 0$.

Далее, так как при любом $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ точка x_i лежит внутри луча $[0, +\infty)$, то по теореме Ферма производная функции $e^{-x^\alpha}P_n(x)$ в точке $x = x_i$ обращается в ноль. Это означает, что верно равенство $-\alpha x_i^{\alpha-1}e^{-x_i^\alpha}P_n(x_i) + e^{-x_i^\alpha}P_n'(x_i) = 0$. Следовательно, $\alpha x_i^{\alpha-1} - P_n'(x_i) = 0$. Итак, получили нужную систему (3.1).

1б) Пусть многочлен $P_n(x) = x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \ldots - a_0$ и точки $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ удовлетворяют системе (3.1). Покажем, что тогда многочлен P_n наименее уклоняется от нуля. Из первых $n+1$ уравнений системы (3.1) следует, что функция $e^{-x^\alpha}|P_n(x)|$ достигает своего супремума в точках $0, x_1, \ldots, x_n$, в которых значения выражений $e^{-x_i^\alpha}P_n(x_i)$ последовательно противоположны. В силу теоремы 2.2 отсюда следует, что многочлен P_n является наименее уклоняющимся от нуля по экспоненциальной норме $\|\cdot\|_{\alpha,[0,+\infty)}$.

2) Существование и единственность решения системы (3.1) следует из доказанного пункта 1 данной теоремы и из теоремы 2.2.

3) Если взять любое решение системы (3.1) и положить $h_n = \|P_n\|_{\alpha,[0,+\infty)}$, то получим решение системы (3.2). Поэтому третье утверждение нашей теоремы следует из второго, которое уже доказано.

Доказательство завершено.

4. Асимптотические свойства многочленов, наименее уклоняющихся от нуля по экспоненциальной норме

В данном параграфе мы переформулируем для нормы $\|\cdot\|_{\alpha,[0;+\infty)}$ некоторые результаты, полученные в [10] для нормы $\|\cdot\|_{\alpha,\mathbb{R}}$, а также сравниваем полученные факты со свойствами многочленов, наименее уклоняющихся от нуля на луче $[0, +\infty)$ по норме $\|\cdot\|_{1,[0,+\infty)}$, доказанные ещё раньше в работе [9].

Для перехода от нормы $\|\cdot\|_{\alpha,\mathbb{R}}$ к норме $\|\cdot\|_{\alpha,[0;+\infty)}$ понадобится следующая лемма.

Лемма 4.1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha > 0$. Тогда верны следующие утверждения:*

1) Многочлены степеней n и $2n$, которые наименее уклоняются от нуля по нормам $\|\cdot\|_{\alpha,[0,+\infty)}$ и $\|\cdot\|_{\alpha,\mathbb{R}}$ соответственно, связаны равенством

$$T_n(\alpha,[0,+\infty),x) = T_{2n}(2\alpha,\mathbb{R},\sqrt{x}) \quad \text{при всех } x \geqslant 0. \tag{4.1}$$

2) Имеет место равенство

$$E_n\big(\alpha,[0,+\infty)\big) = E_{2n}(2\alpha,\mathbb{R}). \tag{4.2}$$

3) Обозначим через $\xi_n\big(\alpha,[0,+\infty)\big)$ и $\xi_{2n}(2\alpha,\mathbb{R})$ наибольшие точки альтернанса, соответствующие экстремальным многочленам $T_n\big(\alpha,[0,+\infty)\big)$ и $T_{2n}(2\alpha,\mathbb{R})$ соответственно. Тогда

$$\xi_n\big(\alpha,[0,+\infty)\big) = \big(\xi_{2n}(2\alpha,\mathbb{R})\big)^2. \tag{4.3}$$

Доказательство. Из замечания 1.1 следует, что многочлен $T_{2n}(2\alpha,\mathbb{R})$ есть многочлен наилучшего приближения степени $2n-1$ для функции $f(t) = t^{2n}$ по экспоненциальной норме $\|\cdot\|_{\alpha,\mathbb{R}}$. В силу теоремы 2.3 он единственен. Поскольку приближаемая функция является чётной, то многочлен $T_{2n}(2\alpha,\mathbb{R})$ также является чётным, т.е. имеет вид $T_{2n}(2\alpha,\mathbb{R};t) = t^{2n} - a_{n-1}t^{2n-2} - \ldots - a_1t^2 - a_0$, где $a_0,a_1,\ldots,a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Поэтому верна следующая цепочка равенств:

$$E_{2n}(2\alpha,\mathbb{R}) = \big\|T_{2n}(2\alpha,\mathbb{R})\big\|_{2\alpha,\mathbb{R}} = \sup_{t\in\mathbb{R}} e^{-|t|^{2\alpha}}\big|t^{2n} - a_{n-1}t^{2n-2} - \ldots - a_1t^2 - a_0\big| =$$
$$= \inf_{c_0,c_1,\ldots,c_{n-1}\in\mathbb{R}} \sup_{t\in\mathbb{R}} e^{-|t|^{2\alpha}}\big|t^{2n} - c_{n-1}t^{2n-2} - \ldots - c_1t^2 - c_0\big|.$$

Сделаем здесь замену $t^2 = x \in [0,+\infty)$. Тогда получим:

$$E_{2n}(2\alpha,\mathbb{R}) = \big\|T_{2n}(2\alpha,\mathbb{R})\big\|_{2\alpha,\mathbb{R}} = \sup_{x\in[0,+\infty)} e^{-x^\alpha}\big|x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \ldots - a_1x - a_0\big| =$$
$$= \inf_{c_0,c_1,\ldots,c_{n-1}\in\mathbb{R}} \sup_{x\in[0,+\infty)} e^{-x^\alpha}\big|x^n - c_{n-1}x^{n-1} - \ldots - c_1x - c_0\big|. \tag{4.4}$$

Следовательно, многочлен $x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \ldots - a_1x - a_0 = T_{2n}(2\alpha,\mathbb{R};\sqrt{x})$ степени n является наименее уклоняющимся от нуля по норме $\|\cdot\|_{\alpha,[0,+\infty)}$. Таким образом, $T_n\big(\alpha,[0,+\infty),x\big) = T_{2n}(2\alpha,\mathbb{R},\sqrt{x})$ при всех $x \in [0,+\infty)$, т.е. равенство (4.1) доказано. Отсюда и из формулы (4.4) вытекают равенства (4.2) и (4.3).
Доказательство завершено.

В работе [10] авторы получили, в частности, следующие результаты: указали отрезки, на которых лежат все точки альтернанса многочленов $T_n(\alpha,\mathbb{R})$, наименее уклоняющихся от нуля по экспоненциальной норме $\|\cdot\|_{\alpha,\mathbb{R}}$ (в следствии 2.8 на странице 211); нашли асимптотику величин $E_n(\alpha,\mathbb{R})$ (в теореме 2.9 на странице 211); нашли предельное распределение корней многочленов $T_n(\alpha,\mathbb{R})$ (в теореме 2.10 на странице 212); а также вывели асимптотику наибольшей точки альтернанса $\xi_n(\alpha,\mathbb{R})$ (в следствии 2.11 на странице 212). Объединив упомянутые результаты в одно утверждение, их можно изложить следующим образом.

Теорема 4.1 (Мхаскар, Сафф [10]). *Пусть $\alpha > 0$. Тогда*

1) При любом $n \in \mathbb{N}$ все точки альтернанса многочлена $T_n(\alpha,\mathbb{R})$, наименее уклоняющегося от нуля по норме $\|\cdot\|_{\alpha,\mathbb{R}}$, лежат на отрезке $\big[-(n/\lambda_\alpha)^{1/\alpha},(n/\lambda_\alpha)^{1/\alpha}\big]$, где $\lambda_\alpha = 2^{2-\alpha}\Gamma(\alpha)/\Gamma^2(\alpha/2)$ и $\Gamma(\alpha)$ – это гамма-функция Эйлера.

2) $\big(E_n(\alpha,\mathbb{R})\big)^{1/n} \sim \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{n}{e\lambda_\alpha}\Big)^{1/\alpha}$ *при* $n\to\infty$.

3) Для любого натурального числа n и любого отрезка $[c,d]\subset[-1;1]$ обозначим через $\mathcal{N}_n\big(\alpha,\mathbb{R},[(n/\lambda_\alpha)^{1/\alpha}c,(n/\lambda_\alpha)^{1/\alpha}d]\big)$ количество корней многочлена $T_n(\alpha,\mathbb{R})$, лежащих на отрезке $\big[(n/\lambda_\alpha)^{1/\alpha}c,(n/\lambda_\alpha)^{1/\alpha}d\big]$. Тогда

$$\mathcal{N}_n\big(\alpha,\mathbb{R},[(n/\lambda_\alpha)^{1/\alpha}c,(n/\lambda_\alpha)^{1/\alpha}d]\big) \sim n\int\limits_c^d v_\alpha(t)dt \quad \text{при } n\to\infty,$$

где

$$v_\alpha(t) = \frac{\alpha}{\pi}\int\limits_{|t|}^{1}\frac{y^{\alpha-1}}{\sqrt{y^2-t^2}}dy \quad \text{при каждом } t\in[-1;1]. \tag{4.5}$$

4) $\xi_n(\alpha,\mathbb{R}) \sim (n/\lambda_\alpha)^{1/\alpha}$ *при* $n\to\infty$.

Замечание 4.1. *Предельные распределения корней и точек альтернанса многочленов, наименее уклоняющихся от нуля по экспоненциальной норме, совпадают, так как их корни чередуются с точками альтернанса, а значит на любом отрезке количество корней отличается от количества точек альтернанса не более, чем на единицу.*

Из этих результатов, с учетом леммы 4.1, вытекает следующая теорема о свойствах многочленов $T_n\big(\alpha,[0,+\infty)\big)$, наименее уклоняющихся от нуля по норме $\|\cdot\|_{\alpha,[0,+\infty)}$:

Теорема 4.2. *Пусть $\alpha>0$. Тогда*

1) При любом $n\in\mathbb{N}$ все точки альтернанса многочлена $T_n\big(\alpha,[0,+\infty)\big)$, наименее уклоняющегося от нуля по норме $\|\cdot\|_{\alpha,[0,+\infty)}$, лежат на отрезке $\big[0;(n/\mu_\alpha)^{1/\alpha}\big]$, где $\mu_\alpha=\lambda_{2\alpha}/2=2^{1-2\alpha}\Gamma(2\alpha)/\Gamma^2(\alpha)$.

2) $\Big(E_n\big(\alpha,[0,+\infty)\big)\Big)^{1/n} \sim \dfrac{1}{4}\Big(\dfrac{n}{e\mu_\alpha}\Big)^{1/\alpha}$ *при* $n\to\infty$.

3) Для любого натурального числа n и любого отрезка $[a,b]\subset[0;1]$ обозначим через $\mathcal{N}_n\big(\alpha,[0,+\infty),[(n/\mu_\alpha)^{1/\alpha}a,(n/\mu_\alpha)^{1/\alpha}b]\big)$ количество точек альтернанса многочлена $T_n\big(\alpha,[0,+\infty)\big)$ на отрезке $\big[(n/\mu_\alpha)^{1/\alpha}a,(n/\mu_\alpha)^{1/\alpha}b\big]$. Тогда

$$\mathcal{N}_n\big(\alpha,[0,+\infty),[(n/\mu_\alpha)^{1/\alpha}a,(n/\mu_\alpha)^{1/\alpha}b]\big) \sim n\int\limits_a^b w_\alpha(s)ds \quad \text{при } n\to\infty,$$

где $w_\alpha(s)=\dfrac{\alpha}{\pi\sqrt{s}}\int\limits_s^1\dfrac{z^{\alpha-1}}{\sqrt{z-s}}\,dz$ *при каждом* $s\in[0;1]$.

4) $\xi_n\big(\alpha,[0,+\infty)\big) \sim (n/\mu_\alpha)^{1/\alpha}$ *при* $n\to\infty$.

Доказательство. 1) В силу пункта 1 теоремы 4.1 и формулы (4.3), у экстремального многочлена $T_n\big(\alpha,[0,+\infty)\big)$ все точки альтернанса расположены на отрезке $\big[0;(2n/\lambda_{2\alpha})^{1/\alpha}\big]=\big[0;(n/\mu_\alpha)^{1/\alpha}\big]$.

2) Из формулы (4.2) и пункта 2 теоремы 4.1 следует, что

$$\big(E_n\big(\alpha,[0,+\infty)\big)\big)^{1/n} = \Big(\big(E_{2n}(2\alpha,\mathbb{R})\big)^{1/(2n)}\Big)^2 \sim \frac{1}{4}\Big(\frac{2n}{e\lambda_{2\alpha}}\Big)^{1/\alpha} = \frac{1}{4}\Big(\frac{n}{e\mu_\alpha}\Big)^{1/\alpha} \quad \text{при } n\to\infty.$$

3) Из формулы (4.1) и пункта 3 теоремы 4.1 следует, что

$$\begin{aligned}&\mathcal{N}_n\big(\alpha,[0,+\infty),[(n/\mu_\alpha)^{1/\alpha}a,(n/\mu_\alpha)^{1/\alpha}b]\big) =\\ &\qquad\qquad = \mathcal{N}_n\big(\alpha,[0,+\infty),[(2n/\lambda_{2\alpha})^{1/\alpha}a,(2n/\lambda_{2\alpha})^{1/\alpha}b]\big) =\\ &= 2\mathcal{N}_{2n}\big(2\alpha,\mathbb{R},[(2n/\lambda_{2\alpha})^{1/(2\alpha)}\sqrt{a},(2n/\lambda_{2\alpha})^{1/(2\alpha)}\sqrt{b}]\big) \sim 4n\int\limits_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} v_{2\alpha}(t)\,dt \quad \text{при } n\to\infty.\end{aligned}$$

После замены $t = \sqrt{s}$ в интеграле, правая часть этой формулы примет вид $n\int\limits_a^b \frac{v_{2\alpha}(\sqrt{s})}{\sqrt{s}}\,ds = n\int\limits_a^b w_\alpha(s)ds$, где $w_\alpha(s) = \dfrac{2v_{2\alpha}(\sqrt{s})}{\sqrt{s}}$. Применяя формулу (4.5) и делая там интегральную замену $y=\sqrt{z}$, при каждом $x\in[0;1]$ получим:

$$w_\alpha(s) = \frac{2\alpha}{\pi\sqrt{s}}\int\limits_{\sqrt{s}}^{1}\frac{y^{2\alpha-1}}{\sqrt{y^2-s}}\,dy = \frac{\alpha}{\pi\sqrt{s}}\int\limits_{s}^{1}\frac{z^{\alpha-1}}{\sqrt{z-s}}\,dz.$$

4) Из формулы (4.3) и пункта 4 теоремы 4.1 следует, что

$$\xi_n\big(\alpha,[0,+\infty)\big) = \big(\xi_{2n}(2\alpha,\mathbb{R})\big)^2 \sim (2n/\lambda_{2\alpha})^{1/\alpha} = (n/\mu_\alpha)^{1/\alpha} \quad \text{при } n\to\infty.$$

Доказательство завершено.

Для того, чтобы сравнить результаты, описанные в теореме 4.2, с результатами работы [9] Саффа и Варги 1981 года, в которой рассматривался интересующий нас случай $\alpha = 1$, сформулируем отдельно следствие из теоремы 4.2, соответствующее $\alpha = 1$. При этом мы учитываем, что $\mu_1 = \lambda_2/2 = 2^{-1}\Gamma(2)/\Gamma^2(1) = 1/2$.

Следствие 4.1. *1) При любом $n\in\mathbb{N}$ все точки альтернанса экстремального многочлена $T_n\big(1,[0,+\infty)\big)$ лежат на отрезке $[0;2n]$.*

2) $\big(E_n\big(1,[0,+\infty)\big)\big)^{1/n} \sim \dfrac{n}{2e}$ при $n\to\infty$.

3) Для любого натурального числа n и любого отрезка $[a,b]\subset[0;1]$ количество $\mathcal{N}_n\big(1,[0,+\infty),[2na,2nb]\big)$ точек альтернанса многочлена $T_n\big(1,[0,+\infty)\big)$, лежащих на отрезке $[2na,2nb]$, удовлетворяет соотношению

$$\mathcal{N}_n\big(\alpha,[0,+\infty),[2na,2nb]\big) \sim n\int\limits_a^b \frac{2\sqrt{1-s}}{\pi\sqrt{s}}ds \quad \text{при } n\to\infty. \tag{4.6}$$

4) $\xi_n\big(1,[0,+\infty)\big) \sim 2n$ при $n\to\infty$.

Пример 4.1. При $a=0$, $b=1/2$ из формулы (4.6) следует, что при больших n примерно 82% точек альтернанса находятся на отрезке $[0,n]$, и около 18% – на промежутке $(n,2n]$. Это видно из равенства $\int\limits_0^{1/2}\frac{2\sqrt{1-s}}{\pi\sqrt{s}}ds = \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\approx 0.82$.

Пример 4.2. Результат пункта 1 следствия 4.1 имеется в работе 1981 г. [9] (см. теорему 4.2 на стр. 169), где, помимо прочего, для всех $n \in \mathbb{N}$ доказана оценка $\dfrac{(2n)!}{(2^{3n}n!)} \leqslant E_n\big(1, [0, +\infty)\big) \leqslant \dfrac{n!}{2^n}$ (см. теорему 4.3 на стр. 170). Кроме того, в этой работе авторы привели значения для наибольшей точки альтернанса $\xi_n\big(1, [0, +\infty)\big)$ и для отклонения $E_n\big(1, [0, +\infty)\big)$ при $n = \overline{1, 11}$ с 6-ю знаками после запятой. В частности, при $n = 1$ и $n = 2$ они вычислили, что $E_1\big(1, [0, +\infty)\big) \approx 0.278465$, $\xi_1\big(1, [0, +\infty)\big) \approx 1.278466$, $E_2\big(1, [0, +\infty)\big) \approx 0.216916$, $\xi_2\big(1, [0, +\infty)\big) \approx 3.009706$. При вычислениях, по словам авторов, они использовали алгоритм Ремеза. Однако подробности вычислений, а также коэфициенты многочленов $T_n\big(1, [0, +\infty)\big)$ для значений $n = \overline{2, 11}$ в работе [9] не приведены.

5. Нахождение конкретного вида многочленов первой и второй степени, наименее уклоняющихся от нуля по норме $\|\cdot\|_{1,[0,+\infty)}$

Этот параграф посвящён случаю $\alpha = 1$. В первом подразделе рассмотрен вариант $n = 1$, а в третьем – вариант $n = 2$.

5.1. Нахождение конкретного вида многочлена первой степени, наименее уклоняющегося от нуля на луче $[0, +\infty)$ по норме $\|\cdot\|_{1,[0,+\infty)}$

Применим пункт 3 теоремы 3.1. Будем решать систему (3.2), которая при $n = 1$ примет вид

$$\begin{cases} P_1(0) = -h_1 \\ P_1(x_1) = e^{x_1} h_1 \\ P_1(x_1) - P_1'(x_1) = 0. \end{cases} \tag{5.1}$$

Поскольку $P_1(x) = x - a_0$ и $P_1'(x) = 1$, то получаем следующую систему уравнений относительно a_0, x_1 и h_1:

$$\begin{cases} a_0 = h_1 \\ x_1 - a_0 = e^{x_1} h_1 \\ x_1 - a_0 - 1 = 0. \end{cases} \tag{5.2}$$

Отсюда $h_1 = a_0$ и $x_1 = a_0 + 1$, где коэффициент a_0 удовлетворяет уравнению

$$a_0 e^{a_0} - \frac{1}{e} = 0. \tag{5.3}$$

Таким образом, можно записать, что $a_0 = W\left(\dfrac{1}{e}\right)$, где функция $W \colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ задается неявно с помощью уравнения $W(z)e^{W(z)} = z$. В работе [17] функция $W(z)$ называется функцией Ламберта.

Точная формула для решения уравнения (5.3) нам неизвестна, но можно решать его приближенно. Поскольку, очевидно, a_0 – это неподвижная точка отображения $[0, +\infty) \ni t \mapsto f(t) = e^{-t-1} \in [0, +\infty)$, то попробуем применить принцип сжимающих отображений. Луч $[0, +\infty)$ является полным метрическим пространством. Положим $q = \sup\limits_{t\in[0,+\infty)} |f'(t)|$. Тогда $q = \sup\limits_{t\in[0,+\infty)} |-e^{-t-1}| = \dfrac{1}{e} < 1$. Следовательно, отображение f

является сжимающим. В силу принципа сжимающих отображений (см., например, [18], теорема 1.4), f имеет единственную неподвижную точку $t_* = a_0$, которую можно найти как предел итераций: $t_* = \lim\limits_{k\to\infty} t_k$, где начальную точку $t_0 \in [0,+\infty)$ можно брать произвольно, и $t_k = f(t_{k-1})$ при всех $k \in \mathbb{N}$. При этом для всех $k \in \mathbb{N}$ верна следующая оценка погрешности (см. [18], формула (1.13)):

$$|t_k - t_*| \leqslant Cq^k, \quad \text{где } C = \frac{|t_1 - t_0|}{1-q}. \tag{5.4}$$

Положим $t_0 = 0$. Тогда $t_1 = f(t_0) = \dfrac{1}{e}$ и $t_k = e^{-t_{k-1}-1}$ при всех $k \geqslant 2$. Следовательно, $C = \dfrac{1}{e-1}$, откуда $|t_k - t_*| \leqslant \dfrac{1}{(e-1)e^k}$. Остается сделать достаточное число итераций, чтобы достигнуть требуемой точности вычислений. Например, если требуется достичь оценки $|t_k - t_*| \leqslant 10^{-3}$, то достаточно выполнения неравенства $\dfrac{1}{(e-1)e^k} \leqslant 10^{-3}$. Отсюда видно, что $k \geqslant 7$, т.е. достаточно сделать 7 итераций. Приведем вычисления с шестью цифрами после запятой:

$$t_1 = \frac{1}{e} \approx 0.367879; \quad t_2 = e^{-t_1-1} \approx 0.254646; \quad t_3 = e^{-t_2-1} \approx 0.285177;$$
$$t_4 = e^{-t_3-1} \approx 0.276602; \quad t_5 = e^{-t_4-1} \approx 0.278984;$$
$$t_6 = e^{-t_5-1} \approx 0.278320; \quad t_7 = e^{-t_6-1} \approx 0.278505.$$

При этом для погрешности получим оценку $|t_7 - t_*| \leqslant \dfrac{1}{(e-1)e^7} < 6 \cdot 10^{-4} < 10^{-3}$.

Итак, $h_1 = a_0 = t_* \approx 0.279$. Отсюда $P_1(x) = x - a_0 \approx x - 0.279$. Кроме того, из третьего уравнения системы (5.2) находим: $x_1 = a_0 + 1 \approx 1.279$.

Поскольку найденое решение системы (5.1) единственно, то, в силу пункта 3 теоремы 3.1, P_1 – искомый многочлен степени 1, наименее уклоняющийся от нуля по норме $\|\cdot\|_{1,[0,+\infty}$, т.е. $T_1\big(1,[0,+\infty)\big) = P_1$.

Иллюстрация 1. На рис. 5.1 изображены следующие графики: график функции $y = P_1(x)e^{-x} = T_1\big(1,[0,+\infty);x\big)e^{-x}$ (сплошной синей линией), а также горизонтальные линии $y = h_1 = \|T_1\big(1,[0,+\infty)\big)\|_{1,[0,+\infty)}$ и $y = -h_1$ (красным пунктиром). Положение точки альтернанса x_1 показано вертикальной синей пунктирной линией.

О дальнейшем уточнении значения a_0.

Вычисления показывают, что для достижения погрешности $|t_k - a_0| \leqslant 10^{-15}$ надо сделать не менее 34 итераций сжимающего отображения f. Для ускорения вычисления значения a_0 с такой точностью, можно применить для решения уравнения (5.3), например, итеративный метод Галлея третьего порядка. В качестве начального приближения можно взять вычисленное ранее значение $w_0 = 0.279$. В общем случае для уравнения $g(w) = 0$ рекуррентная формула метода Галлея выглядит так [12] (в работе изучены условия сходимости этого метода):

$$w_{j+1} = w_j - \frac{g(w_j)}{g'(w_j) - 0.5g''(w_j)g(w_j)/g'(w_j)}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

В применении к инересующему нас случаю $g(w) = we^w - \dfrac{1}{e}$, метод Галлея принимает

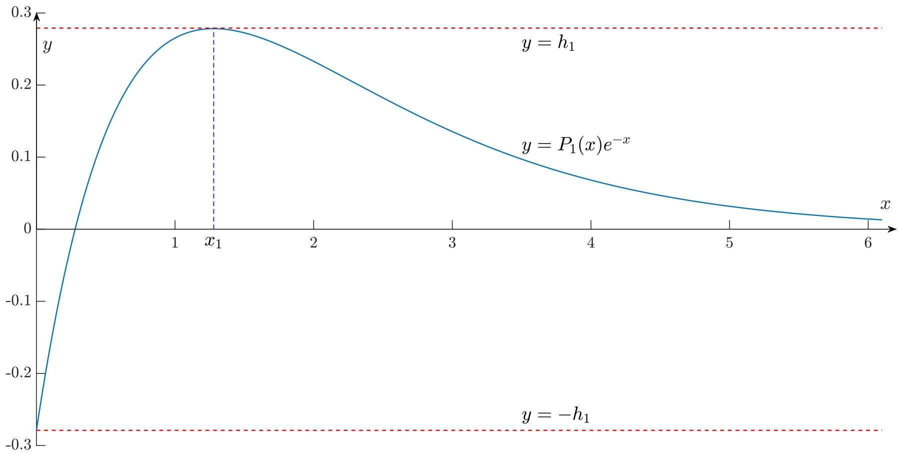

Рис. 5.1. График функции $y = P_1(x)e^{-x} = T_1\big(1, [0, +\infty); x\big)e^{-x}$

Fig. 5.1. Graph of the function $y = P_1(x)e^{-x} = T_1\big(1, [0, +\infty); x\big)e^{-x}$

следующий вид (см. формулу (5.9) на странице 355 в работе [17]):

$$w_{j+1} = w_j - \frac{w_j e^{w_j} - 1/e}{(w_j + 1)e^{w_j} - (w_j + 2)(w_j e^{w_j} - 1/e)/(2w_j + 2)}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

В соответствии с этой формулой будем иметь (результаты вычисления приводим с пятнадцатью цифрами после запятой): $w_0 = 0.279$; $w_1 \approx 0.278464542761090$; у следующих двух итераций все пятнадцать цифр совпадают: $w_2 \approx w_3 \approx 0.278464542817343$. Таким образом, $a_0 \approx 0.278464542817343$.

5.2. Один вариант метода Ньютона и оценка скорости его сходимости

В следующем подразделе нам понадобится метод Ньютона для решения нелинейного уравнения вида $g(t) = 0$, где $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Из рассуждений в главе 12, §1, пункт 5 (стр. 410-411) книги [19] можно извлечь доказательство следующей теоремы:

Теорема 5.1. *Пусть функция $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ имеет непрерывную вторую производную на $[a; b]$, причём $g(a) < 0$, $g(b) > 0$, $g'(a) > 0$, и $g''(t) > 0$ при всех $t \in [a; b]$. Зададим рекуррентную последовательность $\{t_0, t_1, t_2, \ldots\}$, положив $t_0 = b$ и $t_k = t_{k-1} - \dfrac{g(t_{k-1})}{g'(t_{k-1})}$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Тогда*

1) уравнение $g(t) = 0$ на отрезке $[a; b]$ имеет единственное решение $t = c$.

2) при любых $k \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $0 \leqslant t_{k+1} - c \leqslant t_k - c \leqslant \dfrac{g(t_k)}{g'(a)}$.

3) при любом $t \in [a; b]$ верно неравенство $|t - c| \leqslant \dfrac{|g(t)|}{g'(a)}$.

5.3. Нахождение конкретного вида многочлена второй степени, наименее уклоняющегося от нуля на луче $[0,+\infty)$ по норме $\|\cdot\|_{1,[0,+\infty)}$

При $n=2$ снова применим пункт 3 теоремы 3.1. Система (3.2) примет вид:

$$\begin{cases} P_2(0)=h_2 \\ P_2(x_1)=-e^{x_1}h_2 \\ P_2(x_2)=e^{x_2}h_2 \\ P_2(x_1)-P_2'(x_1)=0 \\ P_2(x_2)-P_2'(x_2)=0. \end{cases} \tag{5.5}$$

Подставляя сюда $P_2(x)=x^2-a_1x-a_0$ и $P_2'(x)=2x-a_1$, придём к следующей нелинейной системе относительно a_0, x_1, x_2 и h_2, где $0<x_1<x_2$ и $h_2>0$:

$$\begin{cases} -a_0=h_2 \\ x_1^2-a_1x_1-a_0=-e^{x_1}h_2 \\ x_2^2-a_1x_2-a_0=e^{x_2}h_2 \\ x_1^2-a_1x_1-a_0-(2x_1-a_1)=0 \\ x_2^2-a_1x_2-a_0-(2x_2-a_1)=0. \end{cases} \tag{5.6}$$

Находя a_0 и a_1 из последних двух уравнений, а затем подставляя эти выражения в первые три уравнения системы, получим:

$$\begin{cases} a_0=x_1+x_2-2-x_1x_2 \\ a_1=x_1+x_2-2 \\ h_2=x_1x_2-x_1-x_2+2 \\ h_2=e^{-x_1}(x_2-x_1-2) \\ x_2-x_1+2=e^{x_2}h_2. \end{cases} \tag{5.7}$$

Подставим в системе (5.7) четвертое уравнение в пятое. Тогда получим равенство

$$x_2-x_1+2=e^{x_2-x_1}(x_2-x_1-2). \tag{5.8}$$

Поскольку $x_2>x_1$, то $x_2-x_1>0$. После замены $\tau=x_2-x_1$ уравнение (5.8) примет вид $\tau=2+(\tau+2)e^{-\tau}$. Отсюда следует, что $\tau>2$. Таким образом, τ является неподвижной точкой отображения $[2,+\infty)\ni t\mapsto f(t)=2+(t+2)e^{-t}\in[2,+\infty)$. Поэтому для его вычисления попробуем и здесь применить принцип сжимающих отображений. Найдем коэффициент сжатия q. Поскольку $f'(t)=-(t+1)e^{-t}<0$ и $f''(t)=te^{-t}>0$ при всех $t\geqslant 2$, то функция f' возрастает, поэтому $q=\sup\limits_{t\in[2,+\infty)}|f'(t)|=|f'(2)|=\dfrac{3}{e^2}<1$. Следовательно, отображение f – сжимающее, а значит (см. [18], теорема 1.4) оно имеет единственную неподвижную точку τ, которую можно вычислить как предел итераций: $\tau=\lim\limits_{k\to\infty}t_k$, где $t_k=f(t_{k-1})$ при всех $k\in\mathbb{N}$. При этом для всех $k\in\mathbb{N}$ верна оценка погрешности (5.4).

Положим $t_0=2$. Тогда $t_1=f(t_0)=2+4e^{-2}$ и $t_k=2+(t_{k-1}+2)e^{-t_{k-1}}$ при всех $k\geqslant 2$, причём $|t_k-\tau|\leqslant\dfrac{4}{e^2}\cdot\left(\dfrac{3}{e^2}\right)^k$. Например, для получения оценки погрешности

$|t_k-\tau|\leqslant 10^{-4}$ достаточно потребовать, чтобы $\dfrac{4}{e^2}\cdot\left(\dfrac{3}{e^2}\right)^k\leqslant 10^{-4}$. Отсюда следует, что $k\geqslant 10$. Приведем начало и конец вычислений с шестью цифрами после запятой: $t_1=2+4e^{-2}\approx 2.541341$; $t_2=f(t_1)\approx 2.357679$; $\ldots$; $t_{10}=f(t_9)\approx 2.399357$.

При этом для погрешности верна оценка $|\Delta\tau|=|t_{10}-\tau|\leqslant\dfrac{4}{e^2}\cdot\left(\dfrac{3}{e^2}\right)^{10}<7\cdot 10^{-5}$. Итак, $\tau=x_2-x_1\approx\tilde{\tau}=2.39936$.

Для вычисления точек x_1 и x_2 приравняем правые части третьего и четвертого уравнений системы (5.7), подставив в них равенство $x_2=x_1+\tau$. Получим следующее уравнение для x_1: $x_1^2+(\tau-2)(x_1-1-e^{-x_1})=0$. Таким образом, x_1 – это положительный корень уравнения $f(t)=0$, где отображение $f\colon[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ определяется формулой $f(t)=t^2+(\tau-2)(t-1-e^{-t})$. Имеем: $f(0)=-2(\tau-2)<0$, $f(1)=1-(\tau-2)e^{-1}<0$, $f'(t)=2t+(\tau-2)(1+e^{-t})>0$ при всех $t\geqslant 0$. Поэтому функция f имеет единственный положительный корень, причём этот корень лежит на отрезке $[0;1]$.

Далее хотелось бы применить теорему 5.1 для отрезка $[a,b]=[0;1]$ в случае, когда $g=f$. Но мы не можем воспользоваться данной теоремой в полном объёме, поскольку величину $\tau\approx\tilde{\tau}=2.39936$, а значит и функцию $f(t)=t^2+(\tau-2)(t-1-e^{-t})$, мы знаем лишь приближённо. Поэтому на первом этапе вместо последовательности $\{t_0,t_1,t_2,\ldots\}$ построим последовательность $\{\tilde{t}_0,\tilde{t}_1,\tilde{t}_2,\ldots\}$ для приближенного варианта функции $f(t)$, а именно, для функции $\tilde{f}(t)=t^2+(\tilde{\tau}-2)(t-1-e^{-t})$. Итак, положим: $\tilde{t}_0=1$ и

$$\tilde{t}_k=\tilde{t}_{k-1}-\frac{\tilde{f}(\tilde{t}_{k-1})}{\tilde{f}'(\tilde{t}_{k-1})}=\tilde{t}_{k-1}-\frac{\tilde{t}_{k-1}^2+(\tilde{\tau}-2)(\tilde{t}_{k-1}-1-e^{-\tilde{t}_{k-1}})}{2\tilde{t}_{k-1}+(\tilde{\tau}-2)(1+e^{-\tilde{t}_{k-1}})}\quad\text{при } k\in\mathbb{N}.$$

для $k=0,1,2,\ldots$. В частности, получим (приводим результаты вычислений с шестью цифрами после запятой): $\tilde{t}_1\approx 0.664982$; $\tilde{t}_2\approx 0.611731$; $\tilde{t}_3\approx 0.610351$.

На втором этапе для оценки погрешности $|\tilde{t}_3-x_1|$ воспользуемся неравенством из третьего пункта теоремы 5.1, примененной к функции f: $|\tilde{t}_3-x_1|\leqslant\dfrac{|f(\tilde{t}_3)|}{f'(0)}$. Сначала оценим $|f(\tilde{t}_3)|$. Имеем: $\tau=\tilde{\tau}+\Delta\tau$, где $\Delta\tau<7\cdot 10^{-5}$. Поэтому

$$\begin{aligned}|f(\tilde{t}_3)|=\left|\tilde{t}_3^2+(\tilde{\tau}+\Delta\tau-2)(\tilde{t}_3-1-e^{-\tilde{t}_3})\right|\leqslant\left|\tilde{t}_3^2+(\tilde{\tau}-2)(\tilde{t}_3-1-e^{-\tilde{t}_3})\right|+\\+|\Delta\tau|\cdot|\tilde{t}_3-1-e^{-\tilde{t}_3}|\leqslant\left|\tilde{f}(\tilde{t}_3)\right|+7\cdot 10^{-5}\cdot|\tilde{t}_3-1-e^{-\tilde{t}_3}|.\end{aligned}$$

Кроме того, $f'(0)=2(\tau-2)>2(2.399-2)=0.798$. Поэтому

$$|\tilde{t}_3-x_1|\leqslant\frac{|f(\tilde{t}_3)|}{f'(0)}\leqslant\frac{\left|\tilde{f}(\tilde{t}_3)\right|+7\cdot 10^{-5}\cdot|\tilde{t}_3-1-e^{-\tilde{t}_3}|}{0.798}<9\cdot 10^{-5}.$$

Итак, $x_1\approx 0.61035$, причём $|\Delta x_1|=|\tilde{t}_3-x_1|<9\cdot 10^{-5}$.

Теперь можно найти точку x_2: $x_2=x_1+\tau\approx 0.61035+2.39936=3.00971$.

Для вычисления коэффициентов a_0 и a_1 подставим в первое и второе уравнения системы (5.7) вместо x_2 выражение $x_1+\tau$. После преобразований придём к равенствам

$$\begin{cases}a_0=x_1(2-x_1)+\tau(1-x_1)-2,\\a_1=2x_1+\tau-2.\end{cases}$$

Отсюда найдем приближённые значения для a_0 и a_1:

$$\begin{cases} a_0 \approx 0.61035(2-0.61035) + 2.39936(1-0.61035) - 2 \approx -0.216916; \\ a_1 \approx 2 \cdot 0.61035 + 2.39936 - 2 = 1.62006. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы (5.6) видим, что $h_2 = -a_0 \approx 0.217$.

Далее оценим погрешности вычисления величин a_0 и a_1:

$$\begin{cases} |\Delta a_0| \leqslant |\Delta x_1| \cdot |2 - x_1| + |x_1| \cdot |\Delta x_1| + |\Delta\tau| \cdot |1 - x_1| + |\tau| \cdot |\Delta x_1| < 5 \cdot 10^{-4} \\ |\Delta a_1| \leqslant 2|\Delta x_1| + |\Delta\tau| < 3 \cdot 10^{-4}. \end{cases}$$

Итак, решение системы (5.5) единственно. Поэтому в силу пункта 3 теоремы 3.1, P_2 – искомый многочлен степени 2, наименее уклоняющийся от нуля по норме $\|\cdot\|_{1,[0,+\infty}$, т.е. $T_2\big(1,[0,+\infty;x)\big) = P_2(x) = x^2 - a_1x - a_0 \approx x^2 - 1.620x + 0.217$.

Иллюстрация 2. На рис. 5.2 изображены следующие графики: график функции $y = P_2(x)e^{-x} = T_2\big(1,[0,+\infty;x)\big)e^{-x}$ (сплошной синей линией), а также прямые $y = h_2 = \|T_2\big(1,[0,+\infty)\big)\|_{1,[0,+\infty)}$ и $y = -h_2$ (красным пунктиром). Положение точек альтернанса x_1 и x_2 показано вертикальными пунктирными синими линиями.

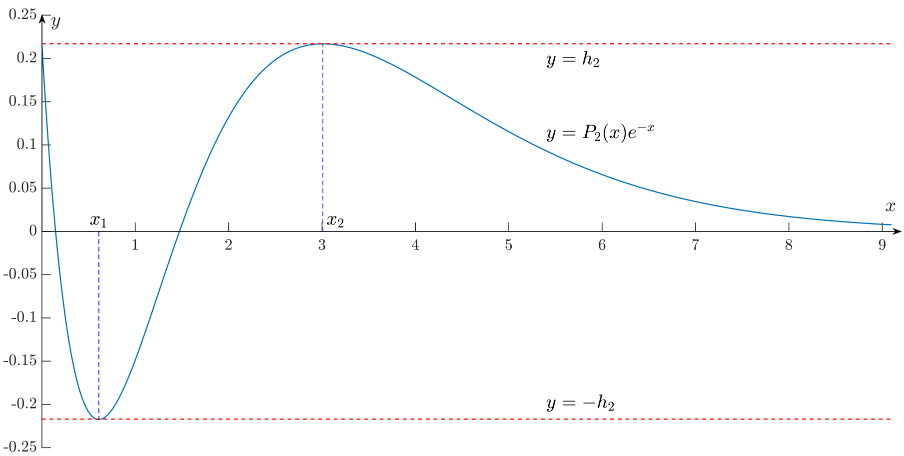

Рис. 5.2. График функции $y = P_2(x)e^{-x} = T_2\big(1,[0,+\infty;x)\big)e^{-x}$

Fig. 5.2. Graph of the function $y = P_2(x)e^{-x} = T_2\big(1,[0,+\infty;x)\big)e^{-x}$

Иллюстрация 3. На рис. 5.3 изображены: график многочлена $y = P_2(x)$ (сплошной синей линией), а также графики $y = h_2e^x$ и $y = -h_2e^{-x}$ (красным пунктиром). Положение точек альтернанса x_1 и x_2 показано синим пунктиром.

6. Дальнейшее направление исследований

В дальнейшем планируется распространить результаты, полученные для случаев $n = 1$ и $n = 2$ на более общий вариант.

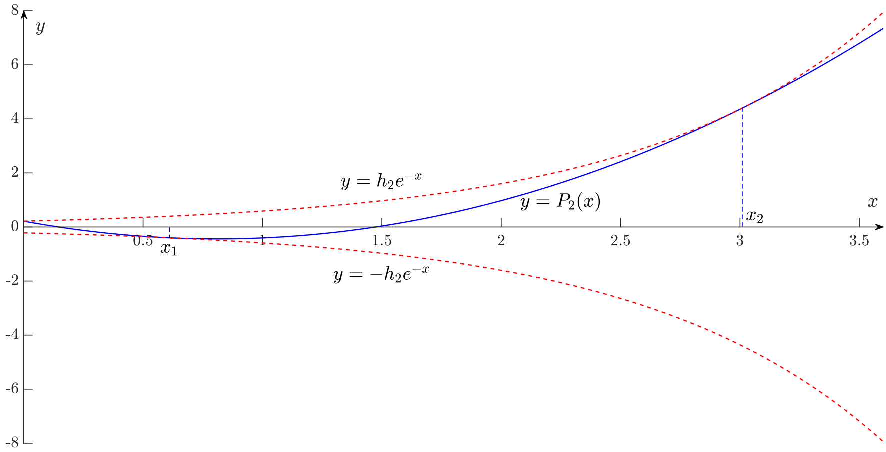

Рис. 5.3. График функции $y = P_2(x) = T_2\big(1, [0, +\infty; x)\big)$

Fig. 5.3. Graph of the function $y = P_2(x) = T_2\big(1, [0, +\infty; x)\big)$

Благодарности. Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

Список литературы

1. Chebyshev P. L. Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes. Mémoires présentes á l'Académie des sciences de St.-Pétersbourg par divers savants. 1854. Vol. VII. P. 539–568.

2. Korkine A., Zolotareff G. Sur un certain minimum. Nouvelles Annales de Mathématiques: 2e série. Paris, Gauthier-Villars, Imprimeur-Libraire. 1873. Vol. 12. P. 337–355.

3. Бабенко В. Ф., Кофанов В. А. О знакопостоянных полиномах, наименее уклоняющихся от нуля в пространствах L_p // *Матем. заметки.* 1985. Т. 37, № 2. С. 176–185.

4. Fischer B. Chebyshev polynomials for disjoint compact sets. *Constr. Approx.* 1992. Vol. 8. P. 309–329. DOI: 10.1007/BF01279022

5. Peherstorfer F. Minimal polynomials for the compact sets of the complex plane. *Constr. Approx.* 1996. Vol. 12, No. 4. P. 481–488. DOI: 10.1007/BF02437504

6. Байрамов Э. Б. Многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля на квадрате комплексной плоскости // *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.* 2018. Т. 24, № 3. С. 5–15.

7. Пестовская А. Э. Многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля, с ограничением на расположение корней // *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.* 2022. Т. 28, № 3. С. 166–175.

8. Milovanović G. V., Mitrinović D. S., Rassias T. M. Topics in polynomials: Extremal problems, inequalities, zeros. Singapore: World Scientific Publ. Comp., 1994. 821 p.

9. Saff E. B., Varga R. S. On incomplete polynomials. II. *Pacific J. Math.* 1981. Vol. 92, No. 1. P. 161–172. DOI: 10.2140/pjm.1981.92.161

10. Mhaskar H. N., Saff E. B. Extremal problems for polynomials with exponential weights. *Trans. Amer. Math. Soc.* 1984. Vol. 285. P. 203–234. DOI: https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1984-0748838-0

11. Ремез Е. Я. Основы численных методов чебышёвского приближения. Киев: Наукова думка, 1969. 625 с.

12. Alefeld G. On the convergence of Halley's method. *Amer. Math. Monthly.* 1981. Vol. 88. P. 530–536.

13. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М.: БИНОМ Лаборатория знаний, 2015. 639 с.

14. Бернштейн С. Н. Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной действительной переменной. М.: ОНТИ, 1937. 205 с.

15. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977. 512 с.

16. Кострикин А. И. Введение в алгебру. Часть 1. Основы алгебры. М.: Физико-математическая литература, 2000. 272 с.

17. Corless R. M., Gonnet G. H., Hare D. E. G., Jeffrey D. J., Knuth D. E. On the Lambert W Function. *Adv. Comput. Math.* 1996. Vol. 5. P. 329–359.

18. Дерр В. Я. Функциональный анализ. Лекции и упражнения. М.: Кнорус, 2016. 464 с.

19. Ильин В. А., Позднняк Э. Г. Основы математического анализа. Ч. 1. М.: Физматлит, 2021. 648 с.

Поступила 04.12.2025; доработана после рецензирования 16.02.2026; принята к публикации 25.02.2026

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

References

1. P. L. Chebyshev, “Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes”, *Mémoires présentes á l'Académie des sciences de St.-Pétersbourg par divers savants*, **VII** (1854), 539–568.

2. A. Korkine, G. Zolotareff, “Sur un certain minimum”, *Nouvelles Annales de Mathématiques: 2e série*, **12** (1873), 337–355.

3. V. F. Babenko, V. A. Kofanov, “Polynomials of fixed sign that deviate least from zero in the spaces L_p”, *Matem. Zametki*, **37**:2 (1985), 176–185 (In Russ.).

4. B. Fischer, “Chebyshev polynomials for disjoint compact sets”, *Constr. Approx.*, **8**:3 (1992), 309–329. DOI: 10.1007/BF01279022

5. F. Peherstorfer, “Minimal polynomials for the compact sets of the complex plane”, *Constr. Approx.*, **12**:4 (1996), 481–488. DOI: 10.1007/BF02437504

6. E. B. Bayramov, “Polynomials least deviating from zero on a square of the complex plane”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **307** (2019), 13–22 (In Russ.). DOI: 10.1134/S0081543819070022

7. A. E. Pestovskaya, “Polynomials least deviating from zero with a constraint on the location of roots”, *Trudi Instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN*, **28**:3 (2022), 166–175 (In Russ.).

8. G. V. Milovanović, D. S. Mitrinović, T. M. Rassias, *Topics in polynomials: Extremal problems, inequalities, zeros*, World Scientific Publ. Comp., Singapore, 1994, 821 p.

9. E. B. Saff, R. S. Varga, “On incomplete polynomials. II”, *Pacific J. Math.*, **92**:1 (1981), 161–172. DOI: 10.2140/pjm.1981.92.161

10. H. N. Mhaskar, E. B. Saff, “Extremal problems for polynomials with exponential weights”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **285** (1984), 203–234.

11. E. Ya. Remez, *[Fundamentals of numerical methods of Chebyshev approximation]*, Naukova Dumka, Kyiv, 1969 (In Russ.), 625 p.

12. G. Alefeld, “On the convergence of Halley's method”, *Amer. Math. Monthly*, **88** (1981), 530–536.

13. N. S. Bakhvalov, N. P. Zhidkov, G. M. Kobelkov, *[Numerical methods [Electronic resource]]*, BINOM Laboratoriya Znanii, Moscow, 2015 (In Russ.), 639 p.

14. S. N. Bernshtein, *[Extreme properties of polynomials and the best approximation of continuous functions of one real variable]*, ONTI, Moscow, 1937 (In Russ.), 205 p.

15. V. K. Dzyadik, *Introduction to the theory of uniform approximation of functions by polynomials*, Nauka Publ., Moscow, 1977 (In Russ.), 512 p.

16. A. I. Kostrikin, *[Introduction to Algebra. Part 1. Fundamentals of algebra]*, Fiziko-matematicheskaya literatura, Moscow, 2000 (In Russ.), 272 p.

17. R. M. Corless, G. H. Gonnet, D. E. G. Hare, D. J. Jeffrey, D. E. Knuth, “On the Lambert W Function”, *Adv. Comput. Math.*, **5** (1996), 329–359.

18. V. Ya. Derr, *Functional analysis. Lectures and exercises*, Knorus, Moscow, 2016 (In Russ.), 464 p.

19. V. A. Ilin, E. G. Pozdnyak, *Fundamentals of mathematical analysis. Part 1*, Fizmatlit Publ, Moscow, 2021 (In Russ.), 648 p.

Submitted 04.12.2025; Revised 16.02.2026; Accepted 25.02.2026

The authors have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.