

УДК 517.926

## Исследование вынужденных колебаний в неоднородной цепочке линейных осцилляторов методом Ляпунова-Шмидта

П. А. Шаманаев<sup>1</sup>, Д. А. Катин<sup>2</sup>, Н. В. Ошина<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Научно-технологический университет «Сириус» (федеральная территория «Сириус», Россия),

<sup>2</sup> Национальный исследовательский Мордовский государственный университет (г. Саранск, Россия)

**Аннотация.** Исследуются продольные колебания неоднородной цепочки линейных осцилляторов, соединённых пружинами. Крайние пружины цепочки жёстко закреплены на неподвижных опорах. Система находится под действием внешних периодических сил. Неоднородность цепочки (возмущенная система) обусловлена тем, что коэффициенты жёсткости пружин различны. Коэффициенты жёсткости мало отклоняются от некоторого номинального значения и зависят от безразмерных параметров отклонения. Нулевое значение безразмерных параметров отклонения соответствует однородной (невозмущённой) системе. Рассматривается резонансный случай, когда частота внешней периодической силы совпадает с одной из собственных частот невозмущенной системы. Для построения точного периодического решения возмущенной системы применяется метод Ляпунова-Шмидта. Благодаря линейности задачи, этот метод позволяет свести её к конечномерной алгебраической задаче построения обобщённой жордановой цепочки для вырожденного линейного оператора. Получены необходимые и достаточные условия на безразмерные параметры отклонения, при которых длина такой цепочки равна 1 или 2. Для каждого случая выведены точные явные формулы для элементов цепочки, дающие полное описание периодического решения. Показано, что при длине обобщенной жордановой цепочки, равной 1, и стремлении малого параметра  $\varepsilon$  к нулю периодическое решение возмущенной системы непрерывно переходит в некоторое периодическое решение невозмущенной системы. Если же длина обобщенной жордановой цепочки равна 2, то периодическое решение возмущенной системы имеет полюс первого порядка в точке  $\varepsilon = 0$ , а при  $\varepsilon = 0$  переходит в однопараметрическое семейство периодических решений невозмущенной системы. Численное моделирование проводилось на примере цепочки из восьми осцилляторов. Построены графики периодических решений и фазовых траекторий возмущенной системы при различных значениях малого параметра.

**Ключевые слова:** цепочка связанных линейных осцилляторов, вынужденные периодические колебания, амплитуда колебаний, резонанс, метод Ляпунова-Шмидта, обобщенный жорданов набор

**Для цитирования:** Шаманаев П. А., Катин Д. А., Ошина Н. В. Исследование вынужденных колебаний в неоднородной цепочке линейных осцилляторов методом Ляпунова-Шмидта // Журнал Средневолжского математического общества. 2025. Т. 27, № 4. С. 471–487. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202504.471-487

Об авторах:

**Шаманаев Павел Анатольевич**, к.ф.-м.н., ведущий инженер-исследователь направления «Математическая робототехника», Научно-технологический университет «Сириус» (354340, Россия, Федеральная территория «Сириус», Олимпийский проспект, д. 1), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0135-317X>, [korspa@yandex.ru](mailto:korspa@yandex.ru)

**Катин Дмитрий Александрович**, магистрант факультета математики и информационных технологий, МГУ им. Н. П. Огарёва (430005, Россия, г. Саранск, ул. Больше-вистская, д. 68), ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-9193-3590>, [dmitriykatinn@gmail.com](mailto:dmitriykatinn@gmail.com)

**Ошина Наталья Владиславовна**, магистрант факультета математики и информационных технологий, МГУ им. Н. П. Огарёва (430005, Россия, г. Саранск, ул. Больше-вистская, д. 68), ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-9193-3590>, [natali.oshina@mail.ru](mailto:natali.oshina@mail.ru)

*Original article*

MSC2020 34C10, 34C25

## A Lyapunov–Schmidt Analysis of Forced Oscillations in an Inhomogeneous Linear Oscillator Chain

P. A. Shamanaev<sup>1</sup>, D. A. Katin<sup>2</sup>, N. V. Oshina<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Sirius University of Science and Technology (Sirius, Russian Federation)* <sup>2</sup>

*National Research Mordovia State University (Saransk, Russian Federation)*

**Abstract.** Longitudinal oscillations of an inhomogeneous chain of linear oscillators coupled by springs are investigated. Both outer springs of the chain are rigidly fixed to immovable supports. The system is subjected to external periodic forces. The inhomogeneity of the chain (the perturbed system) is due to the different stiffness coefficients of the springs. These coefficients deviate slightly from a certain nominal value and depend on dimensionless deviation parameters. Zero values of these parameters correspond to a homogeneous (unperturbed) system. The resonant case is considered when the frequency of the external periodic force coincides with one of the eigenfrequencies of the unperturbed system. To construct an exact periodic solution of the perturbed system, the Lyapunov–Schmidt method is applied. As the problem is linear, this method allows to reduce it to a finite-dimensional algebraic problem of constructing a generalized Jordan chain for a degenerate linear operator. Necessary and sufficient conditions on the dimensionless deviation parameters are obtained, under which the length of such a chain is equal to 1 or 2. For each case, explicit exact formulas for the chain are derived, providing a complete description of the periodic solution. It is shown that for a generalized Jordan chain of length 1, the periodic solution of the perturbed system continuously transforms into a certain periodic solution of the unperturbed system as the small parameter  $\varepsilon$  tends to zero. If the length of the generalized Jordan chain is 2, the periodic solution of the perturbed system possesses a first-order pole at  $\varepsilon = 0$  and, reduces to a one-parameter family of periodic solutions of the unperturbed system. Numerical simulation was performed for a chain of eight oscillators. Plots of periodic solutions and phase trajectories of the perturbed system are constructed for various values of the small parameter.

**Keywords:** chain of coupled linear oscillators, forced periodic oscillations, oscillation amplitude, resonance, Lyapunov–Schmidt method, generalized Jordan chain

**For citation:** P. A. Shamanaev, D. A. Katin, N. V. Oshina. A Lyapunov–Schmidt Analysis of Forced Oscillations in an Inhomogeneous Linear Oscillator Chain. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 27:4(2025), 471–487. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202504.471-487

P. A. Shamanaev, D. A. Katin, N. V. Oshina. A Lyapunov–Schmidt Analysis of Forced Oscillations in an ...

*About the authors:*

**Pavel A. Shamanaev**, Ph.D. (Phys.-Math.), Leading Research Engineer, Department of «Mathematical robotics and artificial intelligence», Sirius University of Science and Technology (1 Olympic Ave., Sirius Federal Territory 354340, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-9193-3590>, [korspa@yandex.ru](mailto:korspa@yandex.ru)

**Dmitry A. Katin**, student of the Faculty of Mathematics and Information Technology, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya str., Saransk, 430005, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-6335-6016>, [dmitriykatinn@gmail.com](mailto:dmitriykatinn@gmail.com)

**Natalya V. Oshina**, student of the Faculty of Mathematics and Information Technology, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya str., Saransk, 430005, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-9193-3590>, [natali.oshina@mail.ru](mailto:natali.oshina@mail.ru)

## 1. Введение

Одной из классических задач теории малых колебаний систем со многими степенями свободы является исследование поперечных колебаний невесомой идеально гибкой нити, подробно рассмотренное в работе [1]. В настоящее время объём публикаций, посвящённых теории малых линейных колебаний таких систем, чрезвычайно велик. Фундаментальное изложение основных положений данной теории представлено в монографиях [2, 3]. Современные подходы и методы описаны в работах [4–6]. Особый интерес представляют задачи о колебаниях в цепочках однородных и периодически неоднородных элементов, рассмотренные в [7].

Опираясь на эти результаты, в настоящей работе ставится задача о малых линейных колебаниях цепочки при малых возмущениях её параметров. Для решения этой задачи применяется метод Ляпунова-Шмидта, изложенный в [8]. Современный обзор применения метода Ляпунова-Шмидта содержится в монографии [9].

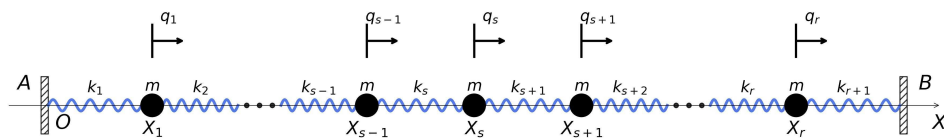
Настоящее исследование основывается на результатах работы [10], в которой установлены условия существования и единственности периодических решений линейных неоднородных дифференциальных уравнений с возмущением в виде малого линейного слагаемого.

Кратко изложим содержание работы. В параграфе 2 описывается математическая модель и излагается постановка задачи. В 3-м параграфе излагаются предварительные преобразования уравнения движения. В параграфе 4 рассматривается применение метода Ляпунова-Шмидта для решения возмущенного уравнения. В параграфе 5 описывается численное моделирование цепочки из восьми осцилляторов.

## 2. Математическая модель и постановка задачи

Рассмотрим механическую систему (см. рис. 2.1), состоящую из  $r$  одинаковых частиц массы  $m$  и соединённых последовательно  $r + 1$  невесомыми пружинами с коэффициентами жесткости  $k_s$  ( $s = 1, \dots, r + 1$ ). Крайние пружины (с номерами  $s = 1$  и  $s = r + 1$ ) закреплены на неподвижных опорах в точках  $A(0)$  и  $B((r + 1)l)$  соответственно, где  $l$  — длина каждой пружины в свободном (недеформированном) состоянии. Поскольку в равновесии длина каждой пружины в точности равна  $l$ , все они не деформированы, и их натяжение равно нулю. Таким образом, частицы ( $s = 1, \dots, r$ ) находятся в точках  $X_s = sl$  [6].

Изучаются малые продольные колебания частиц вдоль оси  $OX$ , под действием внешних периодических сил  $F_s(t)$ , приложенных к соответствующим частицам ( $s = 1, \dots, r$ ).



**Рис. 2.1.** Математическая модель механической системы из  $r$  частиц, соединенных  $r + 1$  пружинами

**Fig. 2.1.** Mathematical model of a mechanical system of  $r$  particles connected by  $r + 1$  springs

Обозначим через  $q_s$  продольное смещение  $s$ -й частицы из положения равновесия. Тогда уравнение движения имеет вид

$$M\ddot{q} + Kq = F(t), \quad (2.1)$$

где  $q = (q_1, \dots, q_r)^\top$ ,  $F(t) = (F_1(t), \dots, F_r(t))^\top$  – вектор внешних сил,  $M = mI_r$  – матрица масс системы,  $K$  – матрица жёсткости системы, имеющая трёхдиагональную структуру:

$$K = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & \ddots & \vdots \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -k_r \\ 0 & \cdots & 0 & -k_r & k_r + k_{r+1} \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

Будем рассматривать случай, когда коэффициенты жёсткости пружин  $k_s$  мало отклоняются от некоторого номинального значения  $k_0$ :

$$k_s = k_0(1 - d_s\varepsilon), \quad s = 1, \dots, r + 1, \quad (2.3)$$

где  $d_s$  – безразмерные параметры отклонения,  $\varepsilon$  – малый параметр.

Подставляя (2.3) в (2.2), представим матрицу жёсткости  $K$  в виде

$$K = k_0(K_0 - \varepsilon D), \quad (2.4)$$

где  $K_0$  – матрица жёсткости невозмущённой (одинаковые пружины) цепочки с закреплёнными концами:

$$K_0 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

а матрица возмущения  $D$  сохраняет трёхдиагональную структуру:

$$D = \begin{pmatrix} d_1 + d_2 & -d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -d_2 & d_2 + d_3 & -d_3 & \ddots & \vdots \\ 0 & -d_3 & d_3 + d_4 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -d_r \\ 0 & \cdots & 0 & -d_r & d_r + d_{r+1} \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Подставляя (2.4) в (2.1) и вводя обозначение

$$\omega_0^2 = \frac{k_0}{m}, \quad (2.7)$$

получим возмущенное уравнение движения

$$\ddot{q} + \omega_0^2 (K_0 - \varepsilon D) q = \frac{1}{m} F(t). \quad (2.8)$$

В работах [1, 2] показано, что матрица  $K_0$  имеет  $r$  различных вещественных положительных собственных значений  $\omega_1^2, \dots, \omega_r^2$ , а соответствующие им собственные векторы  $a^{(1)}, \dots, a^{(r)}$  образуют ортонормированный базис.

Тогда для невозмущённого уравнения

$$\ddot{\zeta} + \omega_0^2 K_0 \zeta = 0 \quad (2.9)$$

собственные частоты равны

$$\tilde{\omega}_k = \omega_0 \omega_k, \quad k = 1, \dots, r, \quad (2.10)$$

и каждому из них соответствует периодическое решение.

Зафиксируем некоторый номер  $k$  ( $1 \leq k \leq r$ ) и рассмотрим резонансный случай, когда частота внешней периодической силы  $F(t)$  совпадает с собственной частотой  $\tilde{\omega}_k$ . Полагая

$$F(t) \equiv F^{(k)}(t) = \tilde{h}^{(k)} \cos(\tilde{\omega}_k t + \theta_k), \quad (2.11)$$

где  $\tilde{h}^{(k)} \in R^r$  – амплитудный вектор внешней силы,  $\theta_k \in R$ , уравнение (2.8) примет вид

$$\ddot{q}^{(k)} + \omega_0^2 (K_0 - \varepsilon D) q^{(k)} = \frac{1}{m} F^{(k)}(t). \quad (2.12)$$

Предположим, что для невозмущенного уравнения

$$\ddot{z} + \omega_0^2 K_0 z = \frac{1}{m} F^{(k)}(t) \quad (2.13)$$

амплитудный вектор  $\tilde{h}^{(k)} \in R^r$  ортогонален собственному вектору  $a^{(k)}$  матрицы  $K_0$

$$(\tilde{h}^{(k)}, a^{(k)}) = 0. \quad (2.14)$$

где  $(\cdot, \cdot)$  – скалярное произведение в  $\mathbb{R}^r$ .

Условие является необходимым и достаточным условием для существования периодического решения с частотой  $\tilde{\omega}_k$  для уравнения (2.13) [3].

Определим период, соответствующий частоте  $\tilde{\omega}_k$ , как

$$\tilde{T}_k = \frac{2\pi}{\tilde{\omega}_k} \quad (2.15)$$

и сформулируем следующую задачу [8], [10]: при достаточно малых вещественных  $\varepsilon$  найти  $\tilde{T}_k$  - периодическое решение  $q^{(k)}(t, \varepsilon)$  уравнения (2.12), удовлетворяющее условию  $q^{(k)}(t, 0) = z(t)$ , где  $z(t)$  — одно из  $\tilde{T}_k$ -периодических решений невозмущенного уравнения (2.13).

### 3. Предварительные преобразования уравнения движения

#### 3.1. Приведение уравнения движения к безразмерному виду

Введём безразмерное время  $\tau$  и безразмерный вектор смещения  $\eta \in \mathbb{R}^r$  по формулам

$$t = \frac{\tau}{\omega_0}, \quad \eta(\tau) = \frac{1}{q_0} q \left( \frac{\tau}{\omega_0} \right), \quad (3.1)$$

где переменная масштаба  $q_0$  (имеющая размерность длины) будет выбрана ниже.

Вычислим производные по времени

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt} = \omega_0 q_0 \frac{d\eta}{d\tau} = \omega_0 q_0 \dot{\eta}, \quad \ddot{q} = \frac{d^2 q}{dt^2} = \omega_0^2 q_0 \frac{d^2 \eta}{d\tau^2} = \omega_0^2 q_0 \ddot{\eta}. \quad (3.2)$$

Здесь и далее точка обозначает производную по безразмерному времени  $\tau$ .

Подставляя (3.1) и (3.2) в уравнение (2.12), получим

$$\ddot{\eta} + (K_0 - \varepsilon D)\eta = \frac{1}{m\omega_0^2 q_0} F^{(k)} \left( \frac{\tau}{\omega_0} \right). \quad (3.3)$$

Выберем теперь переменную масштаба  $q_0$  так, чтобы правая часть уравнения также стала безразмерной. Для этого положим

$$q_0 = \frac{\tilde{F}}{m\omega_0^2}, \quad (3.4)$$

где  $\tilde{F}$  — переменная масштаба относительно амплитуды внешней силы. Тогда, учитывая (2.10), (3.1), (3.2) и (3.4) уравнение (3.3) примет следующий безразмерный вид

$$\ddot{\eta} + (K_0 - \varepsilon D)\eta = F_0(\tau), \quad (3.5)$$

где

$$F_0^{(k)}(\tau) = h^{(k)} \cos(\omega_k \tau + \theta_k), \quad h^{(k)} = \frac{1}{\tilde{F}} \tilde{h}^{(k)}. \quad (3.6)$$

#### 3.2. Переход к нормальным координатам

Составим ортогональную матрицу  $S = [a^{(1)}, \dots, a^{(r)}]$  из собственных векторов и диагональную матрицу  $\Lambda = \text{diag}[\omega_1^2, \dots, \omega_r^2]$  из собственных значений матрицы  $K_0$  так, что

$$K_0 S = S \Lambda, \quad (3.7)$$

Выполняя в уравнении (3.5) замену переменных

$$\eta = Sx, \quad (3.8)$$

где  $x$  — вектор нормальных координат, получим

$$\ddot{x} + \Lambda x = \varepsilon SDSx + f^{(k)}(\tau), \quad (3.9)$$

где

$$f^{(k)}(\tau) = SF_0^{(k)}(\tau). \quad (3.10)$$

Соответствующее невозмущенное уравнение имеет вид

$$\ddot{y} + \Lambda y = f^{(k)}(\tau). \quad (3.11)$$

#### 4. Применение метода Ляпунова-Шмидта для решения возмущенного уравнения

##### 4.1. Переход к системе линейных алгебраических уравнений с малым параметром

Будем искать  $T_k$ -периодические решение уравнения (3.9) в виде

$$x^{(k)}(\tau, \varepsilon) = v^{(k)}(\varepsilon) \cos(\omega_k \tau + \theta_k), \quad (4.1)$$

где  $v^{(k)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^r$ . Вектор-функцию  $v^{(k)}(\varepsilon)$  будем называть амплитудным вектором колебаний на частоте  $\omega_k$  для возмущенного уравнения (3.9).

Подставляя (4.1) в (3.9) и учитывая (3.6), (3.10), приходим к системе линейных алгебраических уравнений с малым параметром

$$B_k v^{(k)} = \varepsilon SDS v^{(k)} + S h^{(k)}, \quad (4.2)$$

где

$$B_k = \Lambda - \omega_k^2 I. \quad (4.3)$$

Здесь  $I$  — единичная квадратная матрица размерности  $r$ .

Так как согласно условию (3.6), вектор  $h^{(k)}$  отличается от  $\tilde{h}^{(k)}$  лишь скалярным множителем, то из условия (2.14) следует

$$(h^{(k)}, a^{(k)}) = 0, \quad (4.4)$$

что обеспечивает разрешимость невозмущенной системы

$$B_k w^{(k)} = S h^{(k)}, \quad (4.5)$$

где  $w^{(k)} \in \mathbb{R}^r$ . Вектор  $w^{(k)}$  будем называть амплитудным вектором колебаний на частоте  $\omega_k$  для невозмущенного уравнения (3.11).

#### 4.2. Условия существования полного обобщенного жорданова набора

Получим условия существования полного  $SDS$ -жорданова набора матрицы  $B_k$ , выраженные через безразмерные параметры отклонения  $d_s$  ( $s = 1, \dots, r + 1$ ).

Согласно [8]  $k$ -й  $SDS$ -жордановой цепочкой длины  $p_k$  матрицы  $B_k$  будем называть совокупность элементов

$$\varphi_k^{(1)}, \dots, \varphi_k^{(p_k)}, \quad (4.6)$$

где первый элемент  $\varphi_k^{(1)}$  является решением системы

$$B_k \varphi_k^{(1)} = 0 \quad \text{или} \quad [\Lambda - \omega_k^2 I] \varphi_k^{(1)} = 0, \quad (4.7)$$

остальные элементы  $\varphi_k^{(j)}$ ,  $j = 2, \dots, p_k$  удовлетворяют соответствующим системам

$$B_k \varphi_k^{(j)} = SDS \varphi_k^{(j-1)} \quad \text{или} \quad [\Lambda - \omega_k^2 I] \varphi_k^{(j)} = SDS \varphi_k^{(j-1)}. \quad (4.8)$$

Здесь нижний индекс  $k$  – номер цепочки (совпадает с номером частоты), а верхний индекс  $j$  – номер элемента в цепочке.

Определим условия на безразмерные параметры отклонения  $d_s$  ( $s = 1, \dots, r + 1$ ), обеспечивающие существование цепочек длины  $p_k = 1$  или  $p_k = 2$ .

Поскольку все собственные значения  $\omega_1^2, \dots, \omega_r^2$  матрицы  $K_0$  различны, матрица  $B_k$  имеет ровно одно нулевое собственное значение (кратности 1). Следовательно, её ядро  $\text{Ker } B_k$  одномерно. Поэтому для каждого фиксированного  $k$  может существовать не более одной линейно независимой  $SDS$ -жордановой цепочки, то есть  $n = 1$ .

Поскольку  $(SDS)^T = SDS$  и матрицы  $B_k$  являются вещественными и диагональными, то

$$B_0^* \psi_k^{(1)} = 0, \quad B_0^* \psi_k^{(j)} = SDS \psi_k^{(j-1)} \quad (4.9)$$

совпадают с системами (4.7) и (4.8), соответственно, а, следовательно, в качестве элементов  $k$ -й сопряженной обобщенной жордановой цепочки  $\psi_k^{(1)}, \dots, \psi_k^{(p_k)}$  можно взять соответствующие элементы цепочки (4.6).

Первый элемент  $\varphi_k^{(1)}$  цепочки (4.6) можно выбрать в виде

$$\varphi_k^{(1)} = e^{(k)}, \quad (4.10)$$

где  $e^{(k)}$  –  $k$ -й единичный орт из  $\mathbb{R}^r$ .

Получим условие разрешимости системы (4.8) при  $j = 2$ . Так как матрица  $\Lambda$  является диагональной, то в левой части  $k$ -я координата вектора  $[\Lambda - \omega_k^2 I] b^{(k)}$  равна нулю, следовательно, для разрешимости этой системы, в правой части  $k$ -я координата вектора  $SDS e^{(k)}$  так же должна быть равна нулю.

Учитывая, что  $S e^{(k)} = a^{(k)}$ , представим коэффициенты матрицы  $SDS$  в виде

$$(SDS)_{sk} = \left( D a^{(k)}, a^{(s)} \right), \quad k, s = 1, \dots, r. \quad (4.11)$$

Тогда условие того, что  $k$ -я координата вектора  $SDS e^{(k)}$  равна нулю примет вид

$$\left( D a^{(k)}, a^{(k)} \right) = 0. \quad (4.12)$$

Таким образом, для существования решения  $\varphi_k^{(2)}$  (4.8) при  $j = 2$ , необходимо и достаточно, что бы выполнялось равенство (4.12).



**Замечание 4.1.** Условие разрешимости (4.12) системы (4.8) при  $j = 2$  может быть так же получено из условия

$$(SDSe^{(k)}, e^{(k)}) = 0. \quad (4.13)$$

Действительно,

$$(SDSe^{(k)}, e^{(k)}) = (Da^{(k)}, a^{(k)}). \quad (4.14)$$

**Замечание 4.2.** Равенство (4.12) так же возможно, в случае

$$Da^{(k)} = 0. \quad (4.15)$$

Но тогда решением системы (4.8) при  $j = 2$  является  $\varphi_k^{(2)} = c\varphi_k^{(1)}$ , где  $c$  – произвольная константа. Отсюда следует, что и все системы (4.8) при любом  $j = 2, 3, \dots$  имеют решения, отличающиеся от  $\varphi_k^{(1)}$  лишь константой. В этом случае получаем бесконечную цепочку линейно зависимых элементов и результат работы [8] не применим.

В дальнейшем будем предполагать, что выполнено условие

$$Da^{(k)} \neq 0. \quad (4.16)$$

Учитывая вышеизложенное сформулируем условия существования  $k$ -й обобщенной жордановой цепочки для случая  $p_k = 1$ .

**Теорема 4.1.** Пусть выполнено условие (4.16). Тогда, для того, что бы длина  $k$ -й обобщенной жордановой цепочки была равна 1, то есть состояла только лишь из одного элемента  $\varphi_k^{(1)}$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$(Da^{(k)}, a^{(k)}) \neq 0. \quad (4.17)$$

В случае выполнения условия разрешимости (4.12) система (4.8) при  $j = 2$  координаты вектора  $\varphi_k^{(2)}$  находятся по формулам

$$b_s^{(k)} = \begin{cases} \frac{1}{\omega_s^2 - \omega_k^2} (Da^{(k)}, a^{(s)}), & s \neq k, \\ c, & s = k, \end{cases} \quad (4.18)$$

где  $s = 1, \dots, r$ ,  $c$  – произвольная константа. В дальнейшем будем полагать  $b_k^{(k)} = 0$ .

**Замечание 4.3.** Если

$$(Da^{(k)}, a^{(s)}) = 0, \quad \text{для всех } s = 1, \dots, r, \quad (4.19)$$

то  $\varphi_k^{(2)} = c\varphi_k^{(1)}$  и приходим так же как и в замечании 4.2 к бесконечной обобщенной жордановой цепочке.

В дальнейшем будем предполагать, что для некоторого номера  $s$  ( $s = 1, \dots, r$ ) такого, что  $s \neq k$  выполняется условие

$$(Da^{(k)}, a^{(s)}) \neq 0. \quad (4.20)$$

Сформулируем условия существования  $k$ -й обобщенной жордановой цепочки для случая  $p_k = 2$ .

**Теорема 4.2.** Пусть выполнены условия (4.16) и (4.20). Тогда для того, чтобы длина обобщенной жордановой цепочки, начинающейся с элемента  $\varphi_k^{(1)}$ , была равна 2, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство (4.12) и условие

$$\left( SDSb^{(k)}, e^{(k)} \right) \neq 0. \quad (4.21)$$

Действительно, условия (4.16) и (4.20) обеспечивают, что длина  $k$ -й обобщенной жордановой цепочки будет конечна. Справедливость равенства (4.12) есть необходимые и достаточные условия разрешимости системы (4.8) при  $j = 2$ , решением которой является элемент  $\varphi_k^{(2)}$ .

Для завершения доказательства следует заметить, что условием разрешимости системы (4.8) при  $j = 3$  является условие

$$\left( SDSb^{(k)}, e^{(k)} \right) = 0, \quad (4.22)$$

которое не выполняется в силу условия (4.21), и следовательно, длина  $k$ -й обобщенной жордановой цепочки не может быть больше 2.

Условия (4.17) и (4.21) обеспечивают полноту обобщенных жордановых наборов в случаях  $p_k = 1$  и  $p_k = 2$ , соответственно.

#### 4.3. Биортогонализация обобщенных жордановых наборов

Построим биортогональный обобщенный жорданов набор. Пусть определена  $k$ -я обобщенная жордановая цепочка длины  $p_k$  ( $p_k = 1$  или  $p_k = 2$ ). Определим элементы [8, 10]

$$z_k^{(j)} = SDS\varphi_k^{(p_k+1-j)}, \quad \gamma_k^{(j)} = SDS\psi_k^{(p_k+1-j)}, \quad j = \overline{1, p_k}. \quad (4.23)$$

Поскольку ранее было установлено, что  $\psi_k^{(j)} = \varphi_k^{(j)}$  элементы  $z_k^{(j)}$  и  $\gamma_k^{(j)}$  совпадают, но не удовлетворяют условиям биортогональности [11]. Для выполнения условий биортогональности перейдем к новым элементам  $\hat{\psi}_k^{(j)}$  ( $k = 1, \dots, p_k$ ).

Для  $p_k = 1$  биортогонализация сводится к вычислению

$$\hat{\psi}_k^{(1)} = \frac{1}{(Da^{(k)}, a^{(k)})} \psi_k^{(1)}, \quad \hat{\gamma}_k^{(1)} = SDS\hat{\psi}_k^{(1)}. \quad (4.24)$$

Для  $p_k = 2$  вычислим

$$\left( z_k^{(1)}, \psi_k^{(1)} \right) = (SDSb^{(k)}, e^{(k)}), \quad (4.25)$$

$$\left( z_k^{(2)}, \psi_k^{(2)} \right) = (e^{(k)}, SDSb^{(k)}). \quad (4.26)$$

Поскольку матрица  $SDS$  является вещественной и симметричной и вектор  $b^{(k)}$  так же вещественен, то

$$\left( z_k^{(1)}, \psi_k^{(1)} \right) = \left( z_k^{(2)}, \psi_k^{(2)} \right). \quad (4.27)$$

Далее учитывая, что

$$\left( z_k^{(2)}, \psi_k^{(1)} \right) = \left( SDS e^{(k)}, e^{(k)} \right) = \left( Da^{(k)}, a^{(k)} \right) = 0, \quad (4.28)$$

для нахождения новых элементов  $\hat{\psi}_k^{(j)}$  ( $k = 1, \dots, p_k$ ) применяются результаты работы [11].

В дальнейшем не ограничивая общности будем считать, что наборы  $z_k^{(j)}$  и  $\psi_k^{(j)}$  ( $k = 1, \dots, p_k$ ) являются биортогональными.

#### 4.4. Вычисление компоненты решения, ортогональной обобщённому жорданову набору

Ортогональное обобщённому жорданову набору слагаемое представим в следующем виде [12]

$$[I - \varepsilon \Gamma_k SDS]^{-1} \Gamma_k S h^{(k)} = \mu [\mu I - \Gamma_k SDS]^{-1} \Gamma_k S h^{(k)}, \quad (4.29)$$

где  $\mu = \frac{1}{\varepsilon}$ ,

$$\Gamma_k = \tilde{B}_k^{-1}, \quad \tilde{B}_k = B_k + G_k, \quad G_k = \gamma_k^{(1)} \left( z_k^{(1)} \right)^\top. \quad (4.30)$$

Для вычисления резольвенты матрицы  $\Gamma_k SDS$  использовался алгоритм, основанный на нахождении собственных значений и собственных векторов этой матрицы [13].

#### 4.5. Построение амплитудных векторов колебаний

Для построения решений возмущённой системы (4.2) и невозмущённой системы (4.5) воспользуемся алгоритмом из работы [12], основанным на методе Ляпунова-Шмидта [8].

Решения возмущённой системы (4.2) (при  $\varepsilon \neq 0$ ) и невозмущённой системы (4.5) (при  $\varepsilon = 0$ ) будут иметь вид

– в случае  $p_k = 1$ :

$$v^{(k)}(\varepsilon) = [I - \varepsilon \Gamma_k SDS]^{-1} \Gamma_k S h^{(k)}, \quad (4.31)$$

$$w^{(k)} = c \varphi_k^{(1)} + \Gamma_k S h^{(k)}, \quad (4.32)$$

где  $c \in \mathbb{R}$ ,

– в случае  $p_k = 2$ :

$$v^{(k)}(\varepsilon) = -\frac{c_{k2}}{1 - \varepsilon^2} \left( \frac{1}{\varepsilon} \varphi_k^{(1)} + \varphi_k^{(2)} \right) + [I - \varepsilon \Gamma_k SDS]^{-1} \Gamma_k S h^{(k)}, \quad (4.33)$$

$$w^{(k)} = c \varphi_k^{(1)} + \Gamma_k S h^{(k)}, \quad (4.34)$$

где  $c_{k2} = \left( h^{(k)}, \psi_k^{(2)} \right)$ .

Приведём оценку для малого параметра [8] и [10]

$$0 < \varepsilon < \|\Gamma_k SDS\|^{-1}, \quad (4.35)$$

где  $\|\cdot\|$  — операторная норма [14].

Из формул (4.31) и (4.32) следует, что при длине обобщенной жордановой цепочки равной 1 и стремлении малого параметра  $\varepsilon$  к нулю амплитудный вектор  $v^{(k)}$  стремится к амплитудному вектору  $w^{(k)}$  (при  $c = 0$ ).

Если же длина обобщенной жордановой цепочки равна 2, то амплитудный вектор  $v^{(k)}$  имеет полюс первого порядка в точке  $\varepsilon = 0$ , а при  $\varepsilon = 0$  переходит в однопараметрическое семейство амплитудных векторов  $w^{(k)}$ .

## 5. Численное моделирование цепочки из восьми осцилляторов

Проведём численное моделирование для цепочки осцилляторов с параметрами  $r = 8$ ,  $k_0 = 1$  и  $m = 1$ . Из формул (2.7) и (2.10) следует  $\omega_0 = 1$  и  $\tilde{\omega}_s = \omega_s$  для всех  $s = 1, \dots, r$ . Далее с учетом формулы (3.1) получим  $t = \tau$ . Тогда полагая  $\tilde{F} = 1$  заключаем, что уравнения (2.8) и (3.5) совпадают.

Рассмотрим резонансный случай, когда частота внешней периодической силы совпадает с собственной частотой  $\omega_5 = 2 \sin \frac{5\pi}{18}$  (соответствует  $k = 5$ ). Причем будем предполагать, что внешняя сила действует только на первую ( $s = 1$ ) и последнюю ( $s = 8$ ) частицы. В этом случае  $\tilde{h}_s^{(5)} = 0$  при  $s = 2, \dots, 7$ . Положим  $\tilde{h}_1^{(5)} = 0.5$  и  $\tilde{h}_1^{(8)} = -0.5$ , тогда условие (2.14) выполнено и, следовательно, невозмущенное уравнение (2.13) имеет  $T_5$ -периодические решения.

Выберем безразмерные параметры отклонения  $d_s$  так, чтобы выполнялось условие (4.12). В качестве примера рассмотрим значения

$$\begin{aligned} d_s &= -1, \quad s = 1, \dots, 4, \\ d_5 &= 0, \\ d_j &= 1, \quad j = 6, \dots, 9. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что выполняются все условия теоремы 4.2, и, следовательно, длина обобщенной жордановой цепочки равна 2.

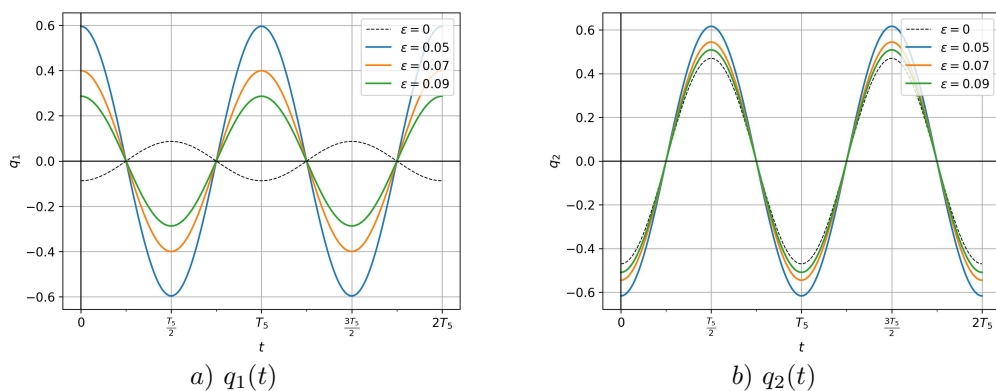
Формулы для вычисления  $T_5$ -периодических колебаний возмущенного уравнения (2.12) и невозмущенного уравнения (2.13) будут иметь вид

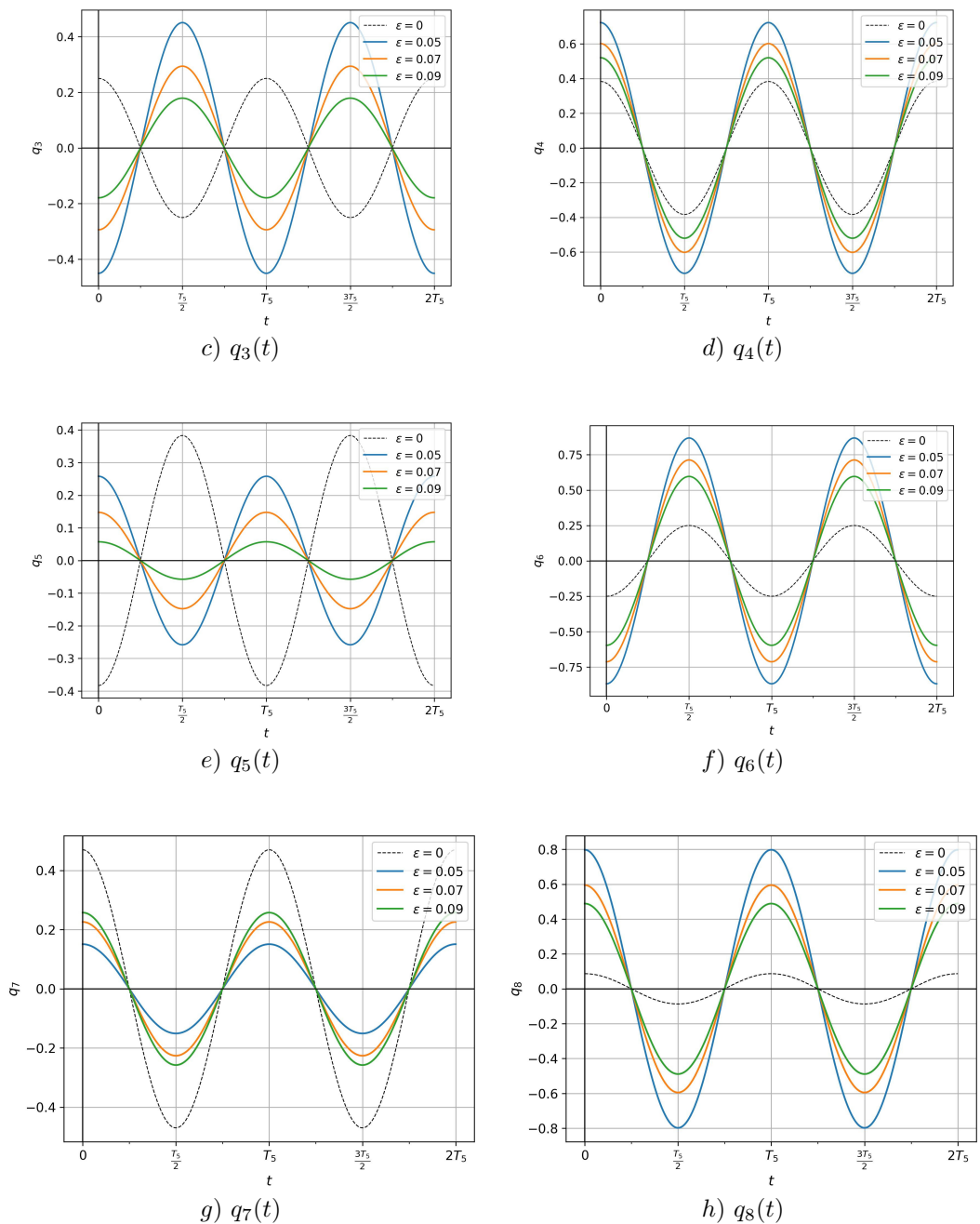
$$q(t, \varepsilon) = Sv^{(5)}(\varepsilon) \cos \omega_5 t, \quad (5.2)$$

$$z(t) = Sw^{(5)} \cos \omega_5 t. \quad (5.3)$$

При этом полагаем  $\theta_5 = 0$ . Соответствующие амплитуды колебаний будем рассчитывать по формулам (4.33) и (4.34) при  $k = 5$ .

На рисунке 5.1 показаны графики компонент  $q_s(t)$  ( $s = 1, \dots, 8$ )  $T_5$ -периодических решений: для возмущенного уравнения (2.12) при различных  $\varepsilon \neq 0$  и для невозмущенного уравнения (2.13).





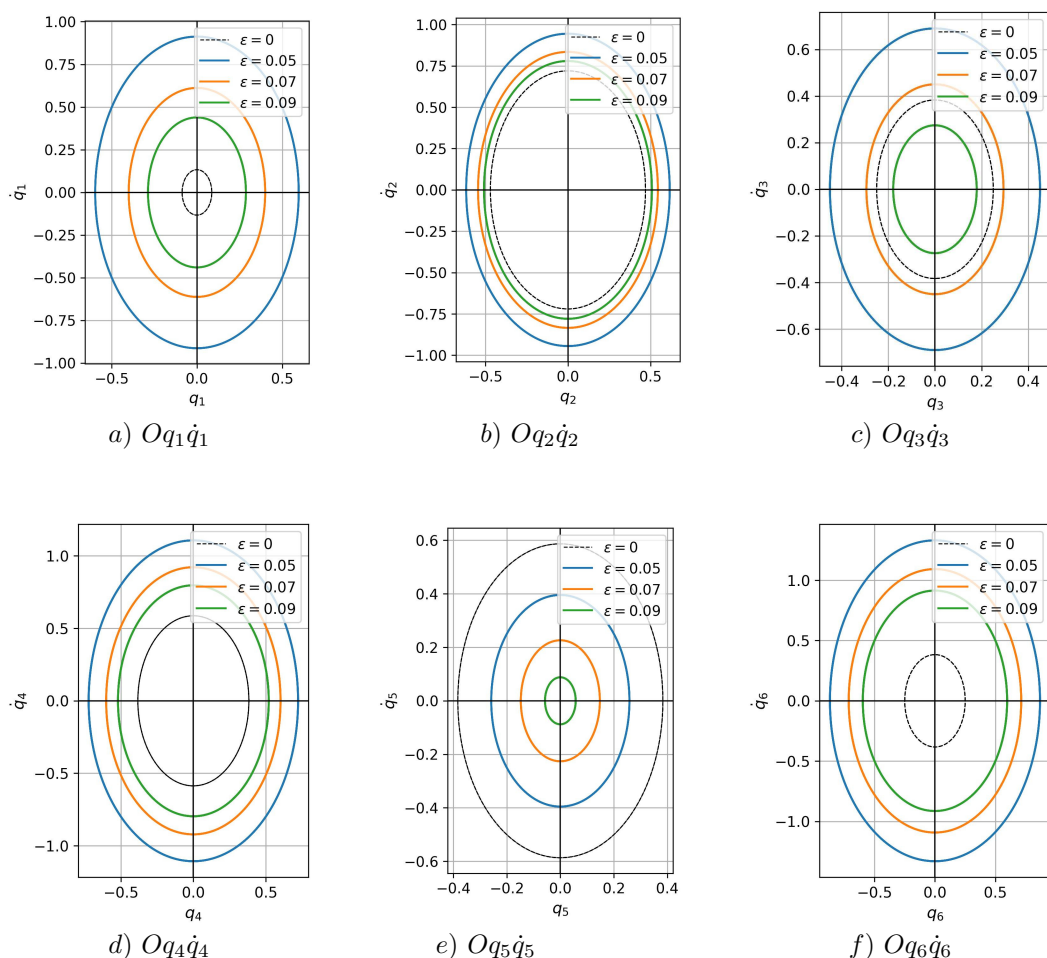
**Рис. 5.1.** Графики компонент  $q_s$  ( $s = 1, \dots, 8$ )  $T_5$ -периодических решений возмущенного уравнения (2.12) при различных  $\varepsilon$  и невозмущенного уравнения (2.13)

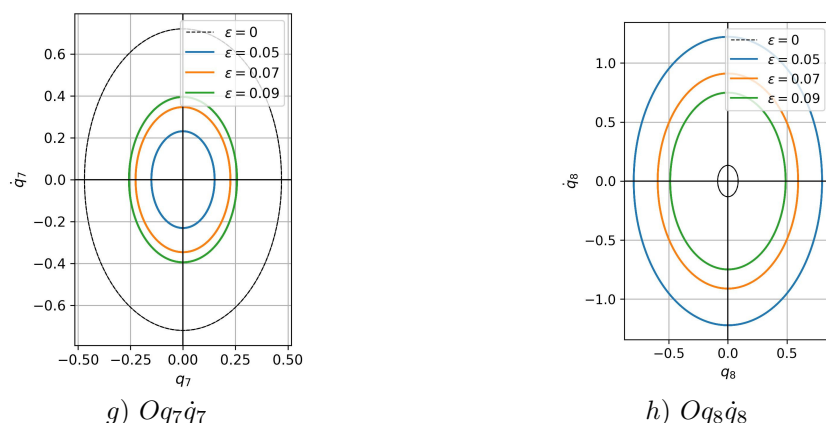
**Fig. 5.1.** Graphs of the components  $q_s$  ( $s = 1, \dots, 8$ ) of  $T_5$ -periodic solutions of the perturbed equation (2.12) for different values of  $\varepsilon$  and the unperturbed equation (2.13).

Анализ графиков на рисунке (5.1) показывает, что в любой фиксированный момент времени модуль разности между амплитудами соответствующих компонент возмущённого и невозмущённого решений увеличивается при уменьшении  $\varepsilon$ . При этом для чётных компонент ( $s = 2, 4, 6, 8$ ) знаки амплитуд совпадают для возмущённого и невозмущённого случаев. Для нечётных компонент ( $s = 1, 3, 5$ ) знаки различны, за исключением компоненты  $s = 7$ .

На всех графиках рисунка (5.1), за исключением (g), уменьшение  $\varepsilon$  приводит к увеличению модуля максимальной амплитуды компонент  $q_s$ . На графике (g) наблюдается противоположное поведение: максимальная амплитуда компоненты  $q_7$  стремится к нулю.

На рисунке 5.2 показаны графики фазовых траекторий компонент  $q_s$  ( $s = 1, \dots, 8$ ) на соответствующих плоскостях  $Oq_s\dot{q}_s$  для возмущённого уравнения (2.12) при различных  $\varepsilon$  и невозмущённого уравнения (2.13).





**Рис. 5.2.** Фазовые траектории компонент  $q_s$  ( $s = 1, \dots, 8$ ) на соответствующих плоскостях  $Oq_s \dot{q}_s$  для возмущённого уравнения (2.12) при различных  $\varepsilon$  и невозмущённого уравнения (2.13)

**Fig. 5.2.** Phase trajectories of the components  $q_s$  ( $s = 1, \dots, 8$ ) on the corresponding planes  $Oq_s \dot{q}_s$  for the perturbed equation (2.12) for different  $\varepsilon$  and the unperturbed equation (2.13)

Как видно из рис. 5.2, в любой фиксированный момент времени расстояние между фазовыми траекториями возмущённого и невозмущённого решений увеличивается с уменьшением  $\varepsilon$ . На всех графиках, за исключением (g), уменьшение  $\varepsilon$  приводит к удалению фазовых траекторий от начала координат. На графике (g) наблюдается противоположное поведение: фазовые траектории сжимаются к началу координат.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. 2-е изд. М.: Гостехиздат, 1950. 200 с.
2. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. М.: Наука, 1966. 300 с.
3. Вибрации в технике: Справочник в 6-ти т. Том 1. Колебания линейных систем / под ред. В. В. Болотина; ред. совет: В. Н. Челомей (пред.). Москва : Машиностроение, 1978. 352 с.
4. Трубецков Д. И., Рожнев А. Г. Линейные колебания и волны. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 416 с.
5. Стрелков С. П. Введение в теорию колебаний. Санкт-Петербург : Лань, 2005. 3-е изд., испр. 440 с.
6. Коткин Г. Л., Сербо В. Г., Черных А. И. Лекции по аналитической механике : учебное пособие. Изд. 2-е, испр. М.–Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Институт компьютерных исследований, 2017. 236 с.

7. Ланда П. С. Нелинейные колебания и волны Москва: Наука, ФИЗМАТЛИТ, 1997. 495 с.
8. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969. 527 с.
9. Sidorov N.A., Loginov B.V., Sinitsyn A., Falaleev M. Lyapunov-Schmidt methods in nonlinear analysis and applications. Kluwer Academic Publishers, 2002, 548 p.
10. Кяшкин А. А., Логинов Б. В., Шаманаев П. А. О ветвлении периодических решений линейных неоднородных дифференциальных уравнений с вырожденным или тождественным оператором при производной и возмущением в виде малого линейного слагаемого // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2016. Т. 18, № 1. С. 45–53.
11. Шаманаев П. А. О биортогонализации полных обобщенных жордановых наборов линейного оператора и ему сопряженного в банаховом пространстве [Электронный ресурс] // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: X Международная научная молодежная школа-семинар имени Е.В. Воскресенского (Саранск, 14-18 июля 2022 г.). - С. 221-224. Режим доступа: <https://conf.svmo.ru/files/2022/papers/paper35.pdf>. - Дата обращения: 11.12.2025.
12. Шаманаев П. А., Прохоров С. А. Алгоритм решения систем линейных алгебраических уравнений с малым параметром методом Ляпунова-Шмидта в регулярном случае [Электронный ресурс] // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ имени Е.В. Воскресенского: IX Международная научная молодежная школа-семинар (Саранск, 8-11 октября 2020 г.). - С. 129-131. Режим доступа: <https://conf.svmo.ru/files/2020/papers/paper40.pdf>. - Дата обращения: 11.12.2025.
13. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. 2-е изд. М.: Наука, 1966. 576 с.
14. Треногин В. А. Функциональный анализ. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 488 с.

*Поступила 15.08.2025; доработана после рецензирования 25.09.2025;  
принята к публикации 26.11.2025*

*Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.*

*Конфликт интересов:* авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## REFERENCES

1. F. R. Gantmakher, M. G. Krein, *Oscillation matrices and kernels and small oscillations of mechanical systems [Ostsillyatsionnye matritsy i yadra i malye kolebaniya mekhanicheskikh sistem]*, 2nd ed., Gostekhizdat, Moscow, 1950, 200 p.
2. F. R. Gantmakher, *Lectures on analytical mechanics [Lektsii po analiticheskoi mekhanike]*, Nauka, Moscow, 1966, 300 p.
3. V. V. Bolotin, *Vibrations in engineering: Handbook in 6 volumes. Volume 1. Oscillations of linear systems [Vibratsii v tekhnike: Spravochnik v 6-ti tomakh. Tom 1. Kolebaniya lineinykh sistem]*, ed., Mashinostroenie, Moscow, 1978, 352 p.



4. D. I. Trubetskov, A. G. Rozhnev, *Linear oscillations and waves [Lineinye kolebaniya i volny]*, FIZMATLIT, Moscow, 2001, 416 p.
5. S. P. Strelkov, *Introduction to the theory of oscillations [Vvedenie v teoriyu kolebanii]*, 3rd ed., revised, Lan, St. Petersburg, 2005, 440 p.
6. G. L. Kotkin, V. G. Serbo, A. I. Chernykh, *Lectures on analytical mechanics [Lektsii po analiticheskoi mekhanike]*, textbook, 2nd ed., revised, R&C Dynamics; Institute of Computer Research, Moscow–Izhevsk, 2017, 236 p.
7. P. S. Landa, *Nonlinear oscillations and waves [Nelineinye kolebaniya i volny]*, Nauka, FIZMATLIT, Moscow, 1997, 495 p.
8. M. M. Vainberg, V. A. Trenogin, *Theory of branching of solutions of nonlinear equations [Teoriya vetvleniya reshenii nelineinykh uravnenii]*, Nauka, Moscow, 1969, 527 p.
9. N. A. Sidorov, B. V. Loginov, A. Sinitsyn, M. Falaleev, *Lyapounov-Schmidt methods in nonlinear analysis and applications*, Kluwer Academic Publishers, 2002, 548 p.
10. A. A. Kyashkin, B. V. Loginov, P. A. Shamanaev, “On branching of periodic solutions of linear nonhomogeneous differential equations with a degenerate or identity operator at the derivative and perturbation in the form of a small linear term [O vetvlenii periodicheskikh reshenii lineinykh neodnorodnykh differentsial’nykh uravnenii c vyrozhdennym ili tozhdestvennym operatorom pri proizvodnoi i vozmushcheniem v vide malogo lineinogo slagaemogo]”, *Journal of the Middle Volga Mathematical Society*, **18**:1 (2016), 45–53.
11. P. A. Shamanaev, “On biorthogonalization of complete generalized Jordan sets of a linear operator and its adjoint in a Banach space [O biortogonalizatsii polnykh obobshchennykh zhordanovykh naborov lineinogo operatora i emu sopryazhennogo v banakhovom prostranstve]”, Mathematical modeling, numerical methods and software complexes: X International Scientific Youth School-Seminar named after E.V. Voskresensky (Saransk, July 14–18, 2022), 221–224, <https://conf.svmo.ru/files/2022/papers/paper35.pdf>.
12. P. A. Shamanaev, S. A. Prokhorov, “Algorithm for solving systems of linear algebraic equations with a small parameter by the Lyapunov-Schmidt method in the regular case [Algoritm resheniya sistem lineinykh algebraicheskikh uravnenii s malym parametrom metodom Lyapunova-Shmidta v reguliarnom sluchae]”, Mathematical modeling, numerical methods and software complexes named after E.V. Voskresensky: IX International Scientific Youth School-Seminar (Saransk, October 8–11, 2020), 129–131, <https://conf.svmo.ru/files/2020/papers/paper40.pdf>.
13. F. R. Gantmakher, *Theory of matrices [Teoriya matrits]*, 2nd ed., Nauka, Moscow, 1966, 576 p.
14. V. A. Trenogin, *Functional analysis [Funktsional’nyi analiz]*, FIZMATLIT, Moscow, 2007, 488 p.

Submitted 15.08.2025; Revised 25.09.2025; Accepted 26.11.2025

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.