

DOI 10.15507/2079-6900.27.202504.435-450

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.63

## Применение многосеточного метода с полной аппроксимацией для решения одномерных нелинейных уравнений в частных производных разрывным методом Галёркина

Р. В. Жалнин, М. С. Нефедов, С. Х. Зинина

МГУ им. Н. П. Огарёва (г. Саранск, Российская Федерация)

**Аннотация.** В статье рассматривается многосеточный метод с полной аппроксимацией для разрывного метода Галёркина с неявной дискретизацией по времени. Целью исследования является применение данного метода для эффективного решения задач, описываемых нелинейными уравнениями в частных производных. Разработан вычислительный алгоритм, который реализует многосеточный метод с полной аппроксимацией с применением метода Ньютона и усовершенствованного метода Ньютона-Крылова для решения возникающих нелинейных уравнений на каждом уровне сетки многосеточного метода. Такой подход позволяет существенно повысить эффективность алгоритма и сократить количество необходимых вычислительных ресурсов. Проведены численные эксперименты с применением обоих подходов к уравнению Хопфа. Исследовано влияние регуляризирующего параметра и числа Куранта на скорость сходимости внешних итераций метода Ньютона. Экспериментально показано, что использование метода Ньютона-Крылова значительно улучшает общую производительность вычислительного процесса по сравнению с традиционным методом Ньютона, хотя оба подхода демонстрируют схожий порядок сходимости, приближающийся ко второму порядку при применении квадратичных базисов.

**Ключевые слова:** многосеточный метод, FAS, разрывный метод Галёркина, неявная дискретизация по времени, h-мультигрид, p-мультигрид, метод Ньютона-Крылова

**Для цитирования:** Жалнин Р. В., Нефедов М. С., Зинина С. Х. Применение многосеточного метода с полной аппроксимацией для решения одномерных нелинейных уравнений в частных производных разрывным методом Галёркина // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2025. Т. 27, № 4. С. 435–450. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202504.435-450

Об авторах:

**Жалнин Руслан Викторович**, канд. физ.-мат. н., декан факультета математики и ИТ, МГУ им. Н. П. Огарёва (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1103-3321>, [zhrv@mrsu.ru](mailto:zhrv@mrsu.ru)

**Нефедов Михаил Сергеевич**, аспирант кафедры прикладной математики, МГУ им. Н. П. Огарёва (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-7347-2191>, [snef7@yandex.ru](mailto:snef7@yandex.ru)

**Зинина Светлана Халиловна**, канд. мат. н., доцент кафедры прикладной математики, МГУ им. Н. П. Огарёва (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3002-281X>, [zininaskh@math.mrsu.ru](mailto:zininaskh@math.mrsu.ru)

© Жалнин Р. В., Нефедов М. С., Зинина С. Х.



Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License.  
This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License.

MSC2020 76-10

# Application of the Full Approximation Scheme Multigrid Method to solving one-dimensional nonlinear partial differential equations by the Discontinuous Galerkin Method

R. V. Zhalnin, M. S. Nefedov, S. Kh. Zinina

*National Research Mordovia State University (Saransk, Russian Federation)*

**Abstract.** This paper considers the Full Approximation Scheme (FAS) multigrid method for the Discontinuous Galerkin method with implicit time discretization. The objective of the research is to apply this method to efficient solution of problems governed by nonlinear partial differential equations. A computational algorithm has been developed that implements the Full Approximation Scheme multigrid method using Newton's method and an improved Newton-Krylov method to solve the arising nonlinear equations at each grid level of the multigrid method. This approach significantly improves the efficiency of the algorithm and reduces required computational resources. Numerical experiments were conducted applying both approaches for solving the Hopf equation. The influence of the regularization parameter and of the Courant number on the convergence rate of Newton's method outer iterations was investigated. It has been experimentally demonstrated that the use of the Newton-Krylov method significantly improves the overall performance of the computational process compared to the traditional Newton's method, although both approaches demonstrate a similar order of convergence, approaching second order when using quadratic basis functions.

**Keywords:** multigrid method, FAS, discontinuous Galerkin method, implicit time discretization, h-multigrid, p-multigrid, Newton-Krylov method

**For citation:** R. V. Zhalnin, M. S. Nefedov, S. Kh. Zinina. Application of the Full Approximation Scheme Multigrid Method to solving one-dimensional nonlinear partial differential equations by the Discontinuous Galerkin Method. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 27:4(2025), 435–450. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202504.435-450

## *About the authors:*

**Ruslan V. Zhalnin**, Ph.D. (Phys. and Math.), Dean of the Faculty of Mathematics and IT, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk, 430005, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1103-3321>, [zhrv@mrsu.ru](mailto:zhrv@mrsu.ru)

**Mikhail S. Nefedov**, Postgraduate Student, Department of Applied Mathematics, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk, 430005, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-7347-2191>, [snef7@yandex.ru](mailto:snef7@yandex.ru)

**Svetlana K. Zinina**, Ph.D. (Math.), Associate Professor, Department of Applied Mathematics, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk, 430005, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3002-281X>, [zininaskh@math.mrsu.ru](mailto:zininaskh@math.mrsu.ru)

## 1. Введение

Разрывный метод Галёркина (Discontinuous Galerkin, DG) является эффективным инструментом для численного решения уравнений в частных производных гиперболического и параболического типов [1–6]. Метод обеспечивает высокий порядок точности на неструктурированных сетках, обладает естественным параллелизмом и демонстрирует устойчивость при решении задач с преобладанием конвективных членов.

При решении, например, уравнений Навье-Стокса для малых чисел Маха явные схемы дискретизации по времени становятся неэффективными вследствие жёстких ограничений на шаг по времени, определяемых условием Куранта. Применение неявных схем, таких как неявные схемы Рунге-Кутты или методы дифференцирования назад [7], позволяет использовать большие шаги по времени; однако на каждом временном слое возникает необходимость решения больших систем нелинейных уравнений, которые часто оказываются плохо обусловленными. Классические итерационные методы могут демонстрировать существенное снижение скорости сходимости с ростом числа степеней свободы и увеличением порядка аппроксимации, что требует применения более эффективных решателей.

Многосеточные методы представляют собой перспективный подход к решению плохо обусловленных задач. В настоящее время можно выделить несколько основных направлений развития многосеточных методов для DG:  $p$ -multigrid и  $h$ -multigrid [8–13].

Эффективным для DG высокого порядка, является  $p$ -multigrid, при котором иерархия уровней строится на основе полиномиальных пространств различного порядка на фиксированной пространственной сетке. Эффективность этого подхода для численного решения уравнений Навье-Стокса продемонстрирована в работах [8, 9]. Для схем с порядком точности не выше третьего эффективно использование  $h$ -multigrid. В этом случае иерархия уровней строится на основе полиномиальных пространств с сетками разной размерности при фиксированном порядке точности каждого пространства [10]. Также имеется множество исследований, направленных на развитие гибридных  $hp$ -multigrid методов, сочетающих оба подхода [11–13].

Для решения систем нелинейных уравнений хорошо зарекомендовал себя многосеточный метод с полной аппроксимацией (Full Approximation Scheme Multigrid, FAS MG). Этот метод эффективно применяется как в сочетании с конечно-объемными методами [15–17], так и с DG [11].

Таким образом, сочетание неявных схем и многосеточных методов представляет собой важное направление в развитии эффективных DG-решателей для сложных многомасштабных задач.

В данной работе рассматривается применение многосеточного метода ( $h$ -multigrid) для неявной схемы разрывного метода Галёркина с использованием метода Ньютона и безматричного метода Ньютона-Крылова [18–21] для решения нелинейного уравнения Хопфа. Показывается, что использование метода Ньютона-Крылова значительно улучшает общую производительность вычислительного процесса по сравнению с традиционным методом Ньютона, хотя оба подхода демонстрируют схожий порядок сходимости, приближающийся ко второму порядку при применении квадратичных базисов

## 2. Вычислительный алгоритм

В данной работе рассматривается использование многосеточного метода с полной аппроксимацией (Full Approximation Scheme, FAS) [14] на основе разрывного метода

Галеркина [1] для решения нелинейных уравнений в частных производных.

Рассмотрим уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad x \in [0, 1], \quad t > 0, \quad (2.1)$$

где  $u = u(x, t)$ , с периодическими граничными условиями и начальным условием

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [0, 1]. \quad (2.2)$$

## 2.1. Метод Галёркина с разрывными базисными функциями (разрывный метод Галёркина) с неявной дискретизацией по времени

Для численного решения уравнения (2.1) введём равномерную сетку

$$0 = x_{1/2} < x_{3/2} < \dots < x_{i-\frac{1}{2}} < x_{i+\frac{1}{2}} < \dots < x_{N+1/2} = 1$$

с шагом  $h = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}, i = 1, \dots, N$ .

Приближенное решение будем искать разрывным методом Галеркина [1], как элемент пространства

$$V_h^p = \{u_h \in L^2(0, 1) : u_h|_{I_i} \in P_p(I_i), \quad i = 1, \dots, N\}, \quad (2.3)$$

где  $I_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ ,  $P_p(I_i)$  – пространство полиномов степени не выше  $p$  на интервале  $I_i$ .

В каждой ячейке  $I_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$  приближенное решение системы уравнений (2.1) будем искать в виде проекции на пространство  $P_p(I_i)$  в базисе  $\{\psi_k(x)\}$ :

$$u_h(x, t)|_{I_i} = \sum_{k=0}^p u_{ik}(t) \psi_{ik}(x), \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.4)$$

В работе рассматриваются случаи  $p = 0, 1, 2$ . В качестве базиса выберем полиномы Лежандра:

$$\begin{aligned} \psi_{i0}(x) &= \frac{1}{\sqrt{h}}, \quad \psi_{i1}(x) = 2\sqrt{\frac{3}{h}} \frac{x - x_i}{h}, \\ \psi_{i2}(x) &= \sqrt{\frac{5}{h}} \left( 6 \left( \frac{x - x_i}{h} \right)^2 - \frac{1}{2} \right), \quad x \in I_i, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где  $x_i = (x_{i-\frac{1}{2}} + x_{i+\frac{1}{2}})/2$ .

Согласно разрывному методу Галеркина для нахождения решения в ячейке  $I_i$  получим следующую систему [1]:

$$\begin{aligned} & \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial u_h}{\partial t} \psi_{il}(x) dx - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(u_h) \frac{\partial}{\partial x} \psi_{il}(x) dx + \\ & + \hat{f}_{i+\frac{1}{2}} \psi_{il}(x_{i+\frac{1}{2}}) - \hat{f}_{i-\frac{1}{2}} \psi_{il}(x_{i-\frac{1}{2}}) = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad l = 0, \dots, p. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь  $\hat{f}_{i-\frac{1}{2}}$ ,  $\hat{f}_{i+\frac{1}{2}}$  – дискретные потоки, которые определяются по значениям слева и справа от соответствующей границы ячейки:

$$\begin{aligned}\hat{f}_{i-\frac{1}{2}} &= \hat{f}(u_{i-\frac{1}{2}}^L, u_{i-\frac{1}{2}}^R), u_{i-\frac{1}{2}}^L = u_h(x_{i-\frac{1}{2}}, t) \Big|_{I_{i-1}}, u_{i-\frac{1}{2}}^R = u_h(x_{i-\frac{1}{2}}, t) \Big|_{I_i}, \\ \hat{f}_{i+\frac{1}{2}} &= \hat{f}(u_{i+\frac{1}{2}}^L, u_{i+\frac{1}{2}}^R), u_{i+\frac{1}{2}}^L = u_h(x_{i+\frac{1}{2}}, t) \Big|_{I_i}, u_{i+\frac{1}{2}}^R = u_h(x_{i+\frac{1}{2}}, t) \Big|_{I_{i+1}}\end{aligned}$$

и должны удовлетворять условиям согласования  $\hat{f}(u, u) = f(u)$ .

Из (2.4) получим:

$$\begin{aligned}\frac{du_{il}}{dt} &= \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(u_h) \psi'_l dx - \hat{f}_{i+\frac{1}{2}} \psi_{il} \Big|_{x_{i+\frac{1}{2}}} + \hat{f}_{i-\frac{1}{2}} \psi_{il} \Big|_{x_{i-\frac{1}{2}}}, \\ i &= 1, \dots, N; \quad l = 0, \dots, p.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Неявная дискретизация по времени приводит к следующей системе нелинейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{u_{il} - \bar{u}_{il}}{\tau} &= \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(u_h) \psi'_l dx - \hat{f}_{i+\frac{1}{2}} \psi_{il} \Big|_{x_{i+\frac{1}{2}}} + \hat{f}_{i-\frac{1}{2}} \psi_{il} \Big|_{x_{i-\frac{1}{2}}}, \\ i &= 1, \dots, N; \quad l = 0, \dots, p.\end{aligned}\tag{2.8}$$

## 2.2. Метод Ньютона

Неявную схему (2.8) запишем в следующем виде:

$$\frac{U_h - \bar{U}_h}{\tau} = \mathcal{L}(U_h),\tag{2.9}$$

где  $\mathcal{L}$  – оператор, соответствующий правой части уравнения (2.8);  $U_h = (u_{00}, \dots, u_{ik}, \dots, u_{Np})^T$  – коэффициенты разложения решения по базису;  $\bar{U}_h$  – коэффициенты разложения решения по базису, соответствующие предыдущему шагу по времени.

Далее перепишем систему (2.9) в виде

$$\mathcal{Q}_h(U_h) = F_h,\tag{2.10}$$

где

$$\mathcal{Q}_h(U_h) = \frac{1}{\tau} U_h - \mathcal{L}(U_h), \quad F_h = \frac{1}{\tau} \bar{U}_h.\tag{2.11}$$

При решении системы (2.10) методом Ньютона на каждой итерации находим новое приближение решения как

$$U_h^{(\alpha+1)} = U_h^{(\alpha)} + \theta \Delta U_h, \quad \alpha = 0, 1, \dots; \quad U_h^{(0)} = \bar{U}_h,$$

где  $\theta$  – параметр регуляризации, который вводится для управления сходимостью метода Ньютона; приращение  $\Delta U_h$  находится, как решение системы линейных алгебраических уравнений вида

$$J_h^{(\alpha)} \Delta U_h = F_h - \mathcal{Q}_h(U_h^\alpha), \quad J_h^{(\alpha)} = \frac{\partial \mathcal{Q}_h}{\partial U_h^\alpha} \Big|_{U_h^\alpha}.\tag{2.12}$$

### 2.3. Безматричный метод Ньютона-Крылова

Основная идея безматричного метода Ньютона-Крылова (Jacobian-free Newton-Krylov method – JFNK) заключается в выполнении ньютоновских итераций без явного формирования матрицы Якоби [18–20].

Рассмотрим невязку системы (2.10):

$$R_h(U_h) = \mathcal{Q}_h(U_h) - F_h = \frac{1}{\tau}(U_h - \bar{U}_h) - \mathcal{L}(U_h). \quad (2.13)$$

Алгоритм, как и классический метод Ньютона, состоит из внешних итераций:

$$U_h^{(\alpha+1)} = U_h^{(\alpha)} + \theta \Delta U_h, \quad (2.14)$$

где приращение  $\Delta U_h$  находится решением задачи минимизации в подпространстве Крылова:

$$\Delta U_h \approx \arg \min_{\Delta U \in \mathcal{K}_m} \left\| R_h(U_h^{(\alpha)}) + J \Delta U \right\|_2, \quad (2.15)$$

где  $J = \left. \frac{\partial R_h}{\partial U_h} \right|_{U_h^{(\alpha)}}$  и  $\mathcal{K}_m = \text{span} \langle r_0, J r_0, J^2 r_0, \dots, J^{m-1} r_0 \rangle$ ,  $r_0 = R_h(U_h^{(\alpha)})$ .

Ключевой особенностью JFNK является безматричная аппроксимация действия якобиана на вектор:

$$Jv \approx \frac{R_h(U_h^{(\alpha)} + \varepsilon v) - R_h(U_h^{(\alpha)})}{\varepsilon}, \quad (2.16)$$

где  $\varepsilon$  — малое возмущение, выбираемое с учётом машинной точности. Таким образом, отпадает необходимость формирования и явного хранения в памяти якобиана (2.12), как в классическом методе Ньютона; вместо этого требуется только вычисление значения невязки (2.13).

В данной работе для решения внутренних линейных систем используется метод LGMRES [21], который представляет собой модификацию GMRES с ограниченным размером подпространства Крылова и возможностью перезапуска. Этот выбор обусловлен его эффективностью для нелинейных задач и возможностью контроля памяти. Для обеспечения устойчивости применяется регуляризация шага с параметром  $\theta$ .

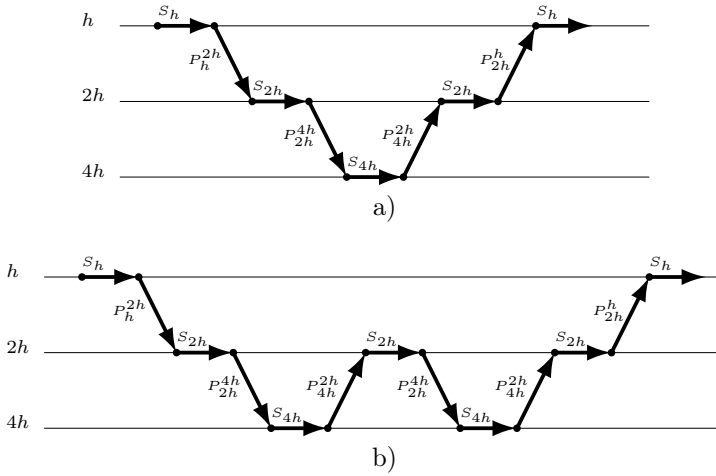
### 2.4. Многосеточный метод с полной аппроксимацией

При решении задач большой размерности вычислительная сложность может оставаться высокой, поэтому для дальнейшего ускорения сходимости и снижения вычислительных затрат в данной работе используется многосеточный подход. Основная идея многосеточного метода заключается в использовании иерархии сеток для эффективного подавления погрешностей различных частот. Высокочастотные составляющие погрешности эффективно устраняются на мелких сетках, в то время как низкочастотные компоненты переносятся на более грубые сетки, где их устранение требует меньших вычислительных ресурсов.

Чтобы найти решение  $U_h$  системы (2.10) воспользуемся многосеточным методом с полной аппроксимацией.

Рассмотрим набор вложенных пространств:

$$V_h^p \supset V_{2h}^p \supset \dots \supset V_{2^{l-1}h}^p \quad (2.17)$$



**Рис. 2.1.** Варианты проекции на сеточные уровни трехсеточного метода ( $S_\alpha$  – оператор сглаживания на уровне  $\alpha$ ;  $P_\alpha^\beta$  – оператор проекции с уровня  $\alpha$  на уровень  $\beta$ ): а) V-цикл; б) W-цикл.

**Fig 2.1.** Projection schemes for grid levels in a three-grid method ( $S_\alpha$ —smoothing operator at level  $\alpha$ ;  $P_\alpha^\beta$ —projection operator from level  $\alpha$  to level  $\beta$ ): а) V-cycle; б) W-cycle.

Здесь  $l$  – это фиксированное число, равное количеству уровней.

Далее рассмотрим два последовательных пространства из набора (2.17), которые обозначим  $V_h \supset V_H$ . В дальнейших рассуждениях будем говорить, что пространство  $V_h$  соответствует подробному уровню, а пространство  $V_H$  – грубому уровню.

Также определим операторы ортогональной проекции:

$$\mathcal{P}_h^H : V_h \rightarrow V_H, \quad \mathcal{P}_H^h : V_H \rightarrow V_h,$$

Выполнив несколько итераций метода Ньютона или безматричного метода Ньютона-Крылова, найдем приближение к искомому решению  $\tilde{U}_h$ . Невязка для данного приближения будет равна

$$R_h = F_h - \mathcal{Q}_h(\tilde{U}_h). \quad (2.18)$$

Вычтем  $\mathcal{Q}_h(\tilde{U}_h)$  из левой и правой частей (2.10) и получим

$$\mathcal{Q}_h(U_h) - \mathcal{Q}_h(\tilde{U}_h) = F_h - \mathcal{Q}_h(\tilde{U}_h). \quad (2.19)$$

Из (2.18) получим

$$\mathcal{Q}_h(U_h) = R_h + \mathcal{Q}_h(\tilde{U}_h). \quad (2.20)$$

Далее аналогично (2.11) определим оператор  $\mathcal{Q}_H : V_H \rightarrow V_H$  и найдем на грубом уровне решение  $U_H \in V_H$  для системы

$$\mathcal{Q}_H(U_H) = F_H, \quad (2.21)$$

где  $F_H = \mathcal{P}_h^H R_h + \mathcal{Q}_H(\mathcal{P}_h^H \tilde{U}_h)$ .

Вычислив ошибку

$$\varepsilon_H = U_H - \tilde{U}_H,$$

найдем решение на подробной сетке

$$U_h = \tilde{U}_h + \mathcal{P}_H^h \varepsilon_H. \tag{2.22}$$

Затем выполним несколько итераций метода Ньютона или безматричного метода Ньютона-Крылова для системы (2.10), взяв в качестве начального приближения вычисленное  $U_h$ .

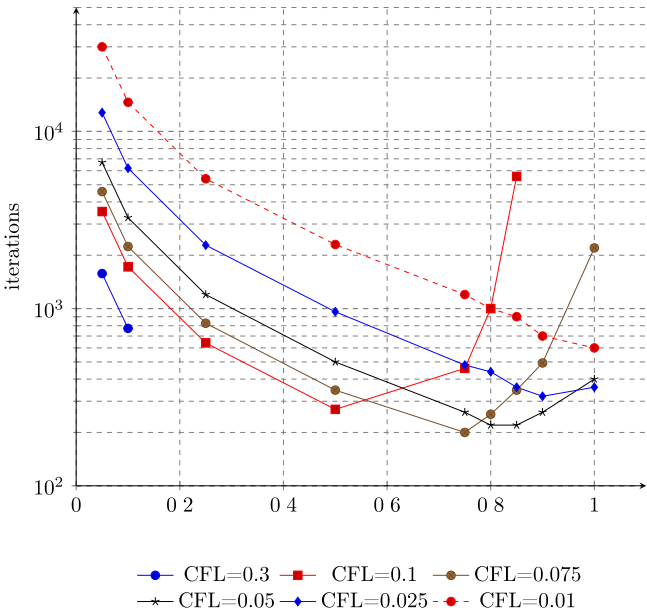
При решении системы (2.21) можно рекурсивно применить этот же алгоритм. Таким образом, комбинируя различную глубину огрубления расчетной сетки и повторные переходы на грубый уровень, можно получить модификации данного многосеточного алгоритма (например, V-, W-циклы, как показано на рисунке 2.1).

### 3. Результаты расчетов

Рассматривалось нелинейное уравнение Хопфа:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} \right) = 0, \quad x \in [0, 1], \quad t > 0 \tag{3.1}$$

с начальным условием  $u(x, 0) = \sin(2\pi x)$  и периодическими граничными условиями.



**Рис. 3.1.** Общее количество итераций метода Ньютона, при выполнении  $1/CFL$  шагов по времени.

**Fig. 3.1.** Total number of iterations of Newton's method, performing  $1/CFL$  time steps.



**Таблица 3.1.** Зависимость количества итераций метода Ньютона от параметра  $\theta$  для различных значений  $CFL$  и  $p$  до достижения условия  $\|\Delta U_h\| < 10^{-10}$

**Table 3.1.** Dependence of the number of iterations of Newton's method on parameter  $\theta$  for various values of  $CFL$  and  $p$  until reaching the condition  $\|\Delta U_h\| < 10^{-10}$

$p = 0$						
$\theta$	CFL					
	0.3	0.1	0.075	0.05	0.025	0.01
0.05	473	353	343	334	319	300
0.1	232	172	168	163	155	146
0.25	>500	64	62	60	57	54
0.5	>500	27	26	25	24	23
0.75	>500	46	15	13	12	12
0.8	>500	100	19	11	11	10
0.85	>500	557	26	11	9	9
0.9	>500	>500	37	13	8	7
1	>500	>500	165	20	9	6
$p = 1$						
$\theta$	CFL					
	0.3	0.1	0.075	0.05	0.025	0.01
0.05	385	362	357	348	334	315
0.1	188	177	174	170	163	154
0.25	69	65	64	63	60	57
0.5	29	27	27	26	25	24
0.75	>500	14	14	13	13	12
0.8	>500	13	12	12	11	11
0.85	>500	16	11	10	10	9
0.9	>500	20	14	9	8	8
1	>500	30	20	14	9	6
$p = 2$						
$\theta$	CFL					
	0.3	0.1	0.075	0.05	0.025	0.01
0.05	492	368	359	349	334	315
0.1	242	180	175	170	163	154
0.25	>500	66	64	63	60	57
0.5	>500	28	27	26	25	24
0.75	>500	55	18	13	13	12
0.8	>500	107	24	12	11	11
0.85	>500	>500	32	12	10	9
0.9	>500	>500	46	15	8	8
1	>500	>500	164	23	10	6

Для выбора оптимального параметра  $\theta$  была выполнена серия расчетов без использования многосеточного метода классическим методом Ньютона для различных значений параметров  $\theta$  и  $CFL = \tau/h$ . В каждом расчете было выполнено  $1/CFL$  шагов по времени.

В таблице 3.1 приведено количество внутренних итераций метода Ньютона на одном шаге по времени, необходимое для достижения оценки  $\|\Delta U_h\| < 10^{-10}$  для значений параметра  $p = 0, 1, 2$ . На рисунке 3.1 представлены графики зависимости количества итераций от значения параметра  $\theta$  при  $p = 2$ . Анализ таблицы и графиков показывает, что для параметра  $p = 2$  наиболее оптимальным по количеству внутренних итераций является набор параметров  $CFL = 0.1$  и  $\theta = 0.5$ .

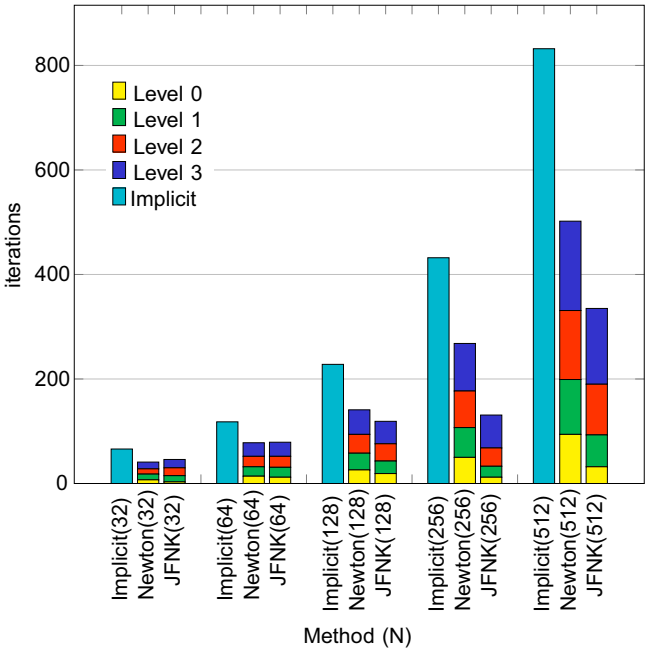


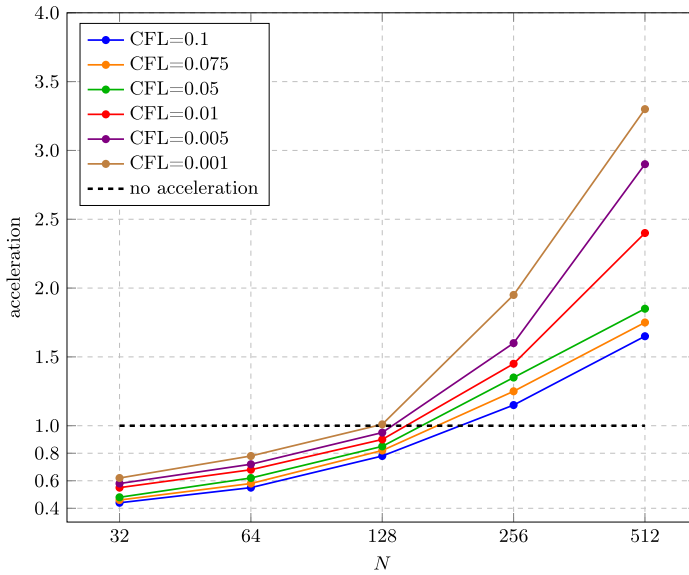
Рис. 3.2. Количество внешних итераций по уровням при различных  $N$ .

Fig. 3.2. The number of outer iterations per level for different  $N$ .

Затем были выполнены расчеты методом FAS с использованием методов Ньютона и Ньютона-Крылова на сетках с уровнем вложенности до 4. Количество итераций на каждом уровне приведено на рисунке 3.2, где сравниваются результаты, полученные вышеуказанными методами и классическим методом Ньютона без использования многосеточного подхода. Видно, что с увеличением количества ячеек сетки значительное преимущество демонстрирует расчет с использованием метода Ньютона-Крылова.

Для сравнения ускорения метода были выполнены расчеты для различных значений  $CFL$ . На рисунке 3.3 показано достигаемое ускорение (отношение времени вычислений метода Ньютона-Крылова к методу Ньютона) в зависимости от размера сетки  $N$  и числа Куранта ( $CFL$ ). Для каждого метода подсчитывается суммарное число внешних итераций по всем уровням многосеточной иерархии.

Метод Ньютона-Крылова демонстрирует преимущество для сеток размером  $N \geq 128$ , достигая ускорения до 3.3 раза при  $N = 512$  и малых  $CFL$ . Для малых сеток



**Рис. 3.3.** График ускорения метода Ньютона-Крылова относительно классического Ньютона по времени вычисления

**Fig. 3.3.** Graph of the acceleration of the Newton-Krylov method relative to classical Newton in terms of computation time.

( $N < 128$ ) классический метод Ньютона может быть предпочтительнее из-за низких накладных расходов.

График ускорения демонстрирует существенную зависимость эффективности от размера сетки. При  $N = 32, 64$ : ускорение меньше 1.0 для всех  $CFL$ . Накладные расходы итерационного решения внутренних систем перевешивают выгоду от отсутствия явной факторизации матрицы Якоби. При  $N = 128$ : появляется положительное ускорение для малых  $CFL = 0.001, 0.005$ , достигая значений 1.2 – 1.5. При  $N = 256, 512$ : ускорение становится существенным для всех  $CFL$ , достигая максимума  $\sim 3.3$  при  $N = 512$  и  $CFL = 0.001$ .

Также наблюдается и существенная зависимость от значений  $CFL$ . Малые  $CFL = 0.001, 0.005$ : максимальное ускорение. При  $N = 512$  и  $CFL = 0.001$  ускорение  $\sim 3.3$ . Это связано с увеличением числа итераций у классического метода Ньютона для плохообусловленных систем, тогда как метод Ньютона-Крылова использует безматричные операции и лучше справляется с такими условиями. Большие  $CFL = 0.1$  – меньшее ускорение, но положительное для больших  $N$ . При  $N = 512$  достигается ускорение  $\sim 1.5$ . Интересно, что при  $CFL = 0.1$  метод Крылова показывает больше итераций (1003 против 832), но все равно быстрее за счет меньшей стоимости итерации.

**Таблица 3.2.** Порядки сходимости для методов Ньютона и Ньютона-Крылова  
( $p = 2$ ;  $p_1, p_2$  – численные порядки сходимости для погрешности в  
соответствующей норме).

**Table 3.2.** Convergence orders for Newton’s method and Newton-Krylov method  
( $p = 2$ ;  $p_1, p_2$  are the numerical convergence orders for the error in the  
corresponding norm).

Кол-во ячеек	Метод Ньютона				Метод Ньютона-Крылова			
	$L_1$		$L_2$		$L_1$		$L_2$	
	$err_1$	$p_1$	$err_2$	$p_2$	$err_1$	$p_1$	$err_2$	$p_2$
32	$1.5581 \times 10^{-5}$	–	$1.9917 \times 10^{-5}$	–	$1.5581 \times 10^{-5}$	–	$1.9916 \times 10^{-5}$	–
64	$3.4445 \times 10^{-6}$	2.18	$4.4335 \times 10^{-6}$	2.17	$3.4444 \times 10^{-6}$	2.18	$4.4334 \times 10^{-6}$	2.17
128	$8.7216 \times 10^{-7}$	1.98	$1.0584 \times 10^{-6}$	2.07	$8.7216 \times 10^{-7}$	1.98	$1.0584 \times 10^{-6}$	2.07
256	$4.0786 \times 10^{-7}$	1.78	$4.8282 \times 10^{-7}$	1.82	$4.0783 \times 10^{-7}$	1.78	$4.8279 \times 10^{-7}$	1.82

Были выполнены расчеты на сгущающихся сетках. В таблице 3.2 показаны абсолютные погрешности и порядки сходимости для методов Ньютона и Ньютона-Крылова. В первой колонке указано количество ячеек самого подробного уровня сетки. Оба метода демонстрируют порядок сходимости близкий ко второму при использовании базисных полиномов степени не выше 2.

4. Заключение

В работе предложен вычислительный алгоритм на основе разрывного метода Галеркина с использованием многосеточного метода с полной аппроксимацией для решения одномерных нелинейных уравнений в частных производных. Эффективность алгоритма исследована на примере начально краевой задачи для уравнения Хопфа с периодическими граничными условиями. Для решения нелинейной системы уравнений, получающейся на каждом уровне сетки, использованы два метода – метод Ньютона и метод Ньютона-Крылова. Выполнено сравнение результатов в плане экономичности, то есть минимального количества итераций, необходимых для достижения заданного уровня точности на каждом уровне сетки. Показано, что метод JFNK демонстрирует значительное преимущество при увеличении количества ячеек расчетной сетки.

При этом безматричный метод Ньютона-Крылова демонстрирует такую же точность и порядок сходимости, как и классический метод Ньютона. Это позволяет говорить о том, что этот метод является эффективным инструментом, позволяющим решать нелинейные уравнения с частными производными с наименьшими вычислительными затратами.

**Благодарности.** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-21-00308, <https://rscf.ru/project/25-21-00308/>.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cockburn B. An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection Dominated Problems. Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations : Lecture Notes in Mathematics. 1998. Vol. 1697. P. 151-268.
2. Hesthaven J. S., Warburton T. Nodal Discontinuous Galerkin Methods: Algorithms, Analysis, and Applications. New York: Springer, 2008. DOI: 10.1007/978-0-387-72067-8
3. Жалнин Р. В., Ладонкина М. Е., Масыгин В. Ф., Тишкин В. Ф. Применение разрывного метода Галёркина для решения параболических задач в анизотропных средах на треугольных сетках // *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование*. 2016. Т. 9, № 3. С. 144-151. DOI: 10.14529/mmp160313
4. Жалнин Р. В., Ладонкина М. Е., Масыгин В. Ф., Тишкин В. Ф. Решение задач о нестационарной фильтрации вещества с помощью разрывного метода Галёркина на неструктурированных сетках // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2016. Т. 56, № 6. С. 989-998. DOI: 10.7868/S0044466916060247
5. Брагин М. Д., Криксин Ю. А., Тишкин В. Ф. Энтропийно устойчивый разрывный метод Галеркина для двумерных уравнений Эйлера // *Матем. Моделирование*. 2021. Т. 33, № 2. С. 125-140. DOI: 10.20948/mm-2021-02-09
6. Масыгин В. Ф., Жалнин Р. В., Тишкин В. Ф. Применение неявной схемы разрывного метода Галеркина к решению задач газовой динамики на графических ускорителях NVIDIA. // *Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование*. 2022. Т. 15, № 2. С. 86-99. DOI: 10.14529/mmp220207
7. Persson P.-O., Peraire J. Newton-GMRES Preconditioning for Discontinuous Galerkin Discretizations of the Navier-Stokes Equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*. 2008. Vol. 30, no. 6. P. 2709-2733. DOI: 10.1137/070692108
8. Franciolini M., Botti L., Colombo A., Crivellini A. p-multigrid matrix-free discontinuous galerkin solution strategies for the under-resolved simulation of incompressible turbulent flows. *Computers Fluids*. 2020. DOI: 10.48550/arXiv.1809.00866
9. Lei N., Zhang D., Zheng W. P-multigrid method for the discontinuous galerkin discretization of elliptic problems. *Journal of Scientific Computing*. 2025. Vol. 105, no. 76. DOI: 10.1007/s10915-025-03105-7
10. Botti L., Colombo A., Bassi F. h-multigrid agglomeration based solution strategies for discontinuous galerkin discretizations of incompressible flow problems. *Journal of Computational Physics*. 2017. P. 382-415. DOI: 10.1016/j.jcp.2017.07.002
11. Волков А. В. Применение многосеточного подхода к решению 3D уравнений Навье-Стокса на гексаэдральных сетках методом Галеркина с разрывными базисными функциями // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2010. Т. 50, № 3. С. 517-531. DOI: 10.1134/S0965542510030103

12. Antonietti P. F., Sarti M., Verani M. Multigrid algorithms for hp-discontinuous galerkin discretizations of elliptic problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2015. Vol. 53, no. 1. P. 598–618. DOI: 10.1137/130947015
13. Fu G., Kuang W. hp-Multigrid Preconditioner for a Divergence-Conforming HDG Scheme for the Incompressible Flow Problems. *J. Sci Comput.* 2024. Vol. 100, no. 16. DOI: 10.1007/s10915-024-02568-4
14. Brandt A. Multi-level Adaptive Computations in Fluid Dynamics : Technical Report AIAA-79-1455. Williamsburg : AIAA, 1979.
15. Feng W., Guo Z., Lowengrub J.S., Wise S.M. A mass-conservative adaptive FAS multigrid solver for cell-centered finite difference methods on block-structured, locally-cartesian grids. *Journal of Computational Physics*. 2018. Vol. 352. P. 463-497. DOI: 10.1016/j.jcp.2017.09.065
16. Горобец А.В. Подход к реализации многосеточного метода с полной аппроксимацией для задач вычислительной гидродинамики // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2023. Т. 63, № 11. С. 1922-1933. DOI: 10.31857/S0044466923110133
17. Горобец А.В., Суков С.А., Магомедов А.Р. Гетерогенная параллельная реализация многосеточного метода с полной аппроксимацией в программном комплексе NOISETTE // *Матем. моделирование*. 2024. Т. 36, № 2. С. 129-146. DOI: 10.20948/mm-2024-02-08
18. Chan T. F., Jackson K.R. Nonlinearly preconditioned Krylov subspace methods for discrete Newton algorithms. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* 1984. Vol. 5. P. 533-542.
19. Brown P.N., Saad Y. Hybrid Krylov methods for nonlinear systems of equations. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* 1990. Vol. 11. P. 450-481.
20. Knoll D.A., Keyes D.E. Jacobian-free Newton-Krylov methods: a survey of approaches and applications. *Journal of Computational Physics*. 2004. Vol. 193, No. 2. P. 357-397. DOI: 10.1016/j.jcp.2003.08.010
21. Baker A.H., Jessup E.R., Manteuffel T. A Technique for Accelerating the Convergence of Restarted GMRES *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 2005. Vol. 26, No. 4. P. 962-984. DOI: 10.1137/S0895479803422014

*Поступила 15.09.2025; доработана после рецензирования 27.10.2025;  
принята к публикации 26.11.2025*

*Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.*

*Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.*

## REFERENCES

1. B. Cockburn, “An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection Dominated Problems”, *Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations*, Lecture Notes in Mathematics, **1697**, Springer, Berlin, 1998, 151–268.

2. J. S. Hesthaven, T. Warburton, “Nodal Discontinuous Galerkin Methods: Algorithms, Analysis, and Applications.”, 2008. DOI: 10.1007/978-0-387-72067-8
3. R. V. Zhalnin, M. E. Ladonkina, V. F. Masyagin, V. F. Tishkin, “Discontinuous finite-element galerkin method for numerical solution of parabolic problems in anisotropic media on triangle grids”, *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming, Computer Software*, **9:3** (2016), 144–151. DOI: 10.14529/mmp160313
4. R. V. Zhalnin, M. E. Ladonkina, V. F. Masyagin, V. F. Tishkin, “Solving the problem of non-stationary filtration of substance by the discontinuous Galerkin method on unstructured grids”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **56:6** (2016), 977–986. DOI: 10.1134/S0965542516060245
5. M. D. Bragin, Y. A. Kriksin, V. F. Tishkin, “Entropy stable discontinuous Galerkin method for two-dimensional Euler equations”, *Math. Models Comput. Simul.*, **13:5** (2021), 897–906. DOI: 10.20948/mm-2021-02-09
6. V. F. Masyagin, R. V. Zhalnin, V. F. Tishkin, “Application of an implicit scheme of the discontinuous galerkin method to solving gas dynamics problems on NVIDIA graphic accelerators”, *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming, Computer Software*, **15:2** (2022), 86–99. DOI: 10.14529/mmp220207
7. P.-O. Persson, J. Peraire, “Newton-GMRES Preconditioning for Discontinuous Galerkin Discretizations of the Navier-Stokes Equations.”, *SIAM Journal on Scientific Computing*, **30:6** (2008), 2709–2733.. DOI: 10.1137/070692108
8. M. Franciolini, L. Botti, A. Colombo, A. Crivellini, “p-multigrid matrix-free discontinuous galerkin solution strategies for the under-resolved simulation of incompressible turbulent flows”, *Computers Fluids*, 2020. DOI: 10.48550/arXiv.1809.00866
9. N. Lei, D. Zhang, W. Zheng, “P-multigrid method for the discontinuous galerkin discretization of elliptic problems”, *Journal of Scientific Computing*, **105:76** (2025). DOI: 10.1007/s10915-025-03105-7
10. L. Botti, A. Colombo, F. Bassi, “h-multigrid agglomeration based solution strategies for discontinuous galerkin discretizations of incompressible flow problems”, *Journal of Computational Physics*, 2017, 382–415. DOI: 10.1016/j.jcp.2017.07.002
11. A. V. Wolkov, “Application of the multigrid approach for solving 3D NavierStokes equations on hexahedral grids using the discontinuous Galerkin method”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **50:3** (2010), 495–508. DOI: 10.1134/S0965542510030103
12. P. F. Antonietti, M. Sarti, M. Verani, “Multigrid algorithms for hp-discontinuous galerkin discretizations of elliptic problems”, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **53:1** (2015), 598–618. DOI: 10.1137/130947015
13. G. Fu, W. Kuang, “hp-Multigrid Preconditioner for a Divergence-Conforming HDG Scheme for the Incompressible Flow Problems”, *J. Sci Comput.*, **100:16** (2024). DOI: 10.1007/s10915-024-02568-4

14. A. Brandt, *Multi-level Adaptive Computations in Fluid Dynamics*, Williamsburg, 1979 (Technical Report AIAA-79-1455).
15. W. Feng, Z. Guo, J. S. Lowengrub, S. M. Wise, “A mass-conservative adaptive FAS multigrid solver for cell-centered finite difference methods on block-structured, locally-cartesian grids”, *Journal of Computational Physics*, **352** (2018), 463–497. DOI: 10.1016/j.jcp.2017.09.065
16. A. V. Gorobets, “An approach to the implementation of the multigrid method with full approximation for CFD problems”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **63**:11 (2023), 2150–2161. DOI: 10.1134/S0965542523110106
17. A. V. Gorobets, S. A. Sukov, A. R. Magomedov, “Heterogeneous Parallel Implementation of the Full Approximation Scheme Multigrid Method in the NOISETTE Software Package”, *Math. Models Comput. Simul.*, **16**:4 (2024), 609–619. DOI: 10.1134/S2070048224700261
18. T. F. Chan, K. R. Jackson, “Nonlinearly preconditioned Krylov subspace methods for discrete Newton algorithms”, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, **5** (1984), 533–542.
19. P. N. Brown, Y. Saad, “Hybrid Krylov methods for nonlinear systems of equations”, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, **11** (1990), 450–481.
20. D. A. Knoll, D. E. Keyes, “Jacobian-free Newton-Krylov methods: a survey of approaches and applications”, *Journal of Computational Physics*, **193**:2 (2004), 357–397. DOI: 10.1016/j.jcp.2003.08.010
21. A. H. Baker, E. R. Jessup, T. Manteuffel, “A Technique for Accelerating the Convergence of Restarted GMRES”, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, **26**:4 (2005), 962–984. DOI: 10.1137/S0895479803422014

*Submitted 15.09.2025; Revised 27.10.2025; Accepted 26.11.2025*

*The authors have read and approved the final manuscript.*

*Conflict of interest:* The authors declare no conflict of interest.