

## ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

DOI 10.15507/2079-6900.27.202504.422-434

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.63

## Оценки погрешности метода Галеркина при исследовании динамики бетонной плиты

М. А. Анкилов

*Ульяновский государственный университет (г. Ульяновск, Россия)*

**Аннотация.** При расчете на прочность элементов строительных конструкций одним из этапов является исследование динамики этих элементов при различных силовых нагрузках. В данной работе на основе классической модели свободных колебаний упругой пластины, в отличие от проведенных ранее численно-аналитических исследований, разрабатывается аналитический метод исследования динамики шарнирно закрепленной по краям бетонной плиты. Согласно методу Галеркина приближенное решение дифференциального уравнения в частных производных, используемого в модели, отыскивается в виде линейной комбинации базисных функций. В результате получена система обыкновенных дифференциальных уравнений для определения коэффициентов этой комбинации. На основе построения функционала типа Ляпунова для дифференциального уравнения в частных производных и функции Ляпунова для системы обыкновенных дифференциальных уравнений предложено несколько способов определения погрешности полученного приближенного решения. На основе численных расчетов показана точность полученных оценок этой погрешности. Для этого построены графики разности исследуемого приближения и приближения высшего порядка. Наилучшую оценку показал способ определения погрешности с помощью следующей базисной функции, коэффициент при которой найден из уравнения, полученного на основе исследования функционала типа Ляпунова для исходного дифференциального уравнения в частных производных.

**Ключевые слова:** дифференциальные уравнения в частных производных, функционал типа Ляпунова, метод Галеркина, упругая пластина

**Для цитирования:** Анкилов М. А. Оценки погрешности метода Галеркина при исследовании динамики бетонной плиты // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2025. Т. 27, № 4. С. 422–434. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202504.422-434

*Об авторах:*

**Анкилов Михаил Андреевич**, аспирант кафедры информационной безопасности и теории управления, Ульяновский государственный университет (432007, Россия, г. Ульяновск, ул. Университетская Набережная, д. 1), ORCID: <http://orcid.org/0009-0003-2038-3096>, [ankilov.2000@mail.ru](mailto:ankilov.2000@mail.ru)



MSC2020 35Q74

## Error estimates of Galerkin method in studying the dynamics of concrete slab

M. A. Ankilov

*Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russian Federation)*

**Abstract.** When calculating the strength of structural elements, one of the steps is to study the dynamics of these elements under various force loads. In this paper, based on the classical model of free vibrations of an elastic plate, in contrast to previous numerical and analytical studies, an analytical method for studying the dynamics of a concrete slab pinned at its edges is developed. According to the Galerkin method, an approximate solution of the partial differential equation used in the model is found as a linear combination of basis functions. This results in a system of ordinary differential equations for determining the coefficients of this combination. Based on the construction of a Lyapunov-type functional for the partial differential equation and on a Lyapunov function for the system of ordinary differential equations, several methods for determining the error of obtained approximate solution are proposed. Numerical calculations demonstrate the accuracy of error estimates. For this purpose, plots of the difference between the approximation under study and the higher-order approximation are constructed. The best estimate was shown by the method of error determination using the following basis function, whose coefficient was found from the equation obtained in study of the Lyapunov-type functional for the original partial differential equation.

**Keywords:** partial differential equations, Lyapunov-type functional, Galerkin method, elastic plate

**For citation:** M. A. Ankilov. Error estimates of Galerkin method in studying the dynamics of concrete slab. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 27:4(2025), 422–434. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202504.422-434

### *About the authors:*

**Mikhail A. Ankilov**, Postgraduate Student, Department of Information Security and Control Theory, Ulyanovsk State University (1 Universitetskaya Naberezhnaya St., Ulyanovsk 432007, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0009-0003-2038-3096>, [ankilov.2000@mail.ru](mailto:ankilov.2000@mail.ru)

## 1. Введение

При проектировании наземных сооружений необходимо производить расчеты динамики их деформируемых элементов, моделируемых упругими стержнями и пластинами [1–4]. При математическом моделировании необходимо учитывать различные силовые нагрузки, воздействующие на деформируемые элементы этих сооружений, например, ударные, тепловые, ветровые и снеговые нагрузки. Любое из этих воздействий может привести к потере устойчивости [5, 6] возникающих при этом колебаний элементов, что говорит о необходимости точных расчетов параметров сооружений.

В данной работе для исследования динамики бетонной плиты используется математическая модель колебаний упругой пластины [7]. Модель описывается дифференциальным уравнением в частных производных с неизвестной функцией деформации пластины, решение которого отыскивается методом Галеркина [8]. В настоящее время метод Галеркина теряет популярность при решении дифференциальных уравнений в частных производных, так как большое количество исследований посвящено сходимости к точному решению, например, работы [9, 10], но отсутствуют работы по определению погрешности полученного приближенного решения. В отличие от проведенных ранее авторами исследований [11] для определения погрешности метода Галеркина используются аналитические, а не численно-аналитические методы.

## 2. Математическая модель и функционал

В работе методом Галеркина решается начально-краевая задача, описывающая динамику шарнирно закрепленной по краям упругой пластины:

$$M\ddot{w}(x, t) + Dw''''(x, t) + \beta_0 w(x, t) = 0, \quad x \in [0, l], \quad (2.1)$$

$$w(0, t) = 0, \quad w(l, t) = 0, \quad w''(0, t) = 0, \quad w''(l, t) = 0, \quad (2.2)$$

$$w(x, 0) = f_1(x), \quad \dot{w}(x, 0) = f_2(x). \quad (2.3)$$

Здесь  $w(x, t)$  – функция, описывающая прогиб (деформацию) упругой пластины; штрих и точка обозначают частные производные по координате  $x$  и времени  $t$  соответственно;

$M = h\rho$  и  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  – масса и изгибная жесткость пластины;  $l, h$  – длина и толщина пластины;  $E, \rho$  – модуль упругости и линейная плотность пластины;  $\beta_0$  – коэффициент жесткости основания;  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

В работе [11] для уравнения (2.1) с граничными и начальными условиями (2.2), (2.3) на основе исследования функционала типа Ляпунова

$$\Phi = \int_0^l \{M\dot{w}^2(x, t) + Dw''^2(x, t) + \beta_0 w^2(x, t)\} dx \quad (2.4)$$

получено равенство

$$\begin{aligned} & \int_0^l \{M\dot{w}^2(x, t) + Dw''^2(x, t) + \beta_0 w^2(x, t)\} dx = \\ & = \int_0^l \{Mf_2^2(x) + Df_1''^2(x) + \beta_0 f_1^2(x)\} dx \end{aligned} \quad (2.5)$$

и доказана теорема.

**Теорема 2.1.** *Решение  $w(x, t)$  краевой задачи (2.1), (2.2) устойчиво по отношению к возмущениям начальных данных (2.3) и справедлива оценка*

$$w^2(x, t) \leq \frac{l^2}{\pi D} \int_0^l \{Mf_2^2(x) + Df_1''^2(x) + \beta_0 f_1^2(x)\} dx. \quad (2.6)$$

### 3. Метод Галеркина и функция Ляпунова

Приближенное решение краевой задачи (2.1), (2.2) согласно методу Галеркина ищется в виде

$$w_m(x, t) = \sum_{k=1}^m a_k(t) g_k(x), \quad g_k(x) = \sin \gamma_k x, \quad \gamma_k = \frac{\pi k}{l}. \quad (3.1)$$

Условия (2.2) выполняются. Подставляя (3.1) в (2.1), (2.3), умножая на  $g_k(x)$  и интегрируя от 0 до  $l$ , получим задачу Коши для системы уравнений:

$$M\ddot{a}_n(t) + (D\gamma_n^4 + \beta_0) a_n(t) = 0, \quad n = 1, \dots, m, \quad (3.2)$$

$$a_n(0) = \frac{2}{l} \int_0^l f_1(x) g_n(x) dx, \quad \dot{a}_n(0) = \frac{2}{l} \int_0^l f_2(x) g_n(x) dx. \quad (3.3)$$

В отличие от работы [11] для определения неизвестных функций  $a_n(t)$  и определения погрешности метода Галеркина используются аналитические, а не численные методы. Решая задачу Коши (3.2), (3.3), получим решение

$$a_n(t) = a_n(0) \cos \left( \sqrt{\frac{D\gamma_n^4 + \beta_0}{M}} t \right) + \dot{a}_n(0) \sqrt{\frac{M}{D\gamma_n^4 + \beta_0}} \sin \left( \sqrt{\frac{D\gamma_n^4 + \beta_0}{M}} t \right), \quad (3.4)$$

$n = 1, \dots, m$ . Следовательно, приближенное решение начально-краевой задачи (2.1), (2.2), (2.3) примет вид

$$w(x, t) \approx w_m(x, t) = \sum_{k=1}^m \left( a_k(0) \cos \left( \sqrt{\frac{D\gamma_k^4 + \beta_0}{M}} t \right) + \dot{a}_k(0) \sqrt{\frac{M}{D\gamma_k^4 + \beta_0}} \sin \left( \sqrt{\frac{D\gamma_k^4 + \beta_0}{M}} t \right) \right) g_k(x). \quad (3.5)$$

Введем функцию Ляпунова для каждого обыкновенного дифференциального уравнения (3.2):

$$\Psi_n = M\dot{a}_n^2(t) + (D\gamma_n^4 + \beta_0) a_n^2(t). \quad (3.6)$$

Найдем производную от  $\Psi_n$  по  $t$ :

$$\dot{\Psi}_n = 2M\dot{a}_n(t)\ddot{a}_n(t) + 2(D\gamma_n^4 + \beta_0) a_n(t)\dot{a}_n(t) = 2\dot{a}_n(t) (M\ddot{a}_n(t) + (D\gamma_n^4 + \beta_0) a_n(t)).$$

Тогда для функции  $a_n(t)$ , являющейся решением системы уравнений (3.2), имеет место равенство  $\dot{\Psi}_n = 0$ , интегрируя которое от 0 до  $t$ , получим:

$$\Psi_n(t) = \Psi_n(0). \quad (3.7)$$

Таким образом, из (3.7) получим равенство

$$M\dot{a}_n^2(t) + (D\gamma_n^4 + \beta_0) a_n^2(t) = M\dot{a}_n^2(0) + (D\gamma_n^4 + \beta_0) a_n^2(0) \quad (3.8)$$

и доказана следующая теорема.

**Теорема 3.1.** *Решение  $a_n(t), n = 1, \dots, m$  системы уравнений (3.2) устойчиво по отношению к возмущениям начальных данных (3.3) и справедливо неравенство*

$$a_n^2(t) \leq \frac{1}{(D\gamma_n^4 + \beta_0)} (M\dot{a}_n^2(0) + (D\gamma_n^4 + \beta_0) a_n^2(0)). \quad (3.9)$$

Тогда согласно (3.9) получим оценку ряда

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2(t) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(D\gamma_n^4 + \beta_0)} (M\dot{a}_n^2(0) + (D\gamma_n^4 + \beta_0) a_n^2(0)) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M\dot{a}_n^2(0)}{(D\gamma_n^4 + \beta_0)} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2(0). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Первый ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M\dot{a}_n^2(0)}{(D\gamma_n^4 + \beta_0)}$  сходится по признаку сравнения с обобщенным гармоническим рядом  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ . А для второго ряда получим равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2(0) = \frac{2}{l} \int_0^l \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0) g_n(x) \right)^2 dx = \frac{2}{l} \int_0^l f_1^2(x) dx.$$

Следовательно, для любых функций  $f_1(x) \in L_2[0, l]$  ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2(t)$  сходится и согласно [9] приближенное решение, полученное методом Галеркина, сходится к точному решению.

Из (3.9) получим оценку приближенного решения

$$\begin{aligned} w_m^2(x, t) &= \left( \sum_{k=1}^m a_k(t) g_k(x) \right)^2 \leq 2 \sum_{k=1}^m a_k^2(t) g_k^2(x) \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^m \frac{2 (M\dot{a}_k^2(0) + (D\gamma_k^4 + \beta_0) a_k^2(0))}{(D\gamma_k^4 + \beta_0)} g_k^2(x). \end{aligned} \quad (3.11)$$

#### 4. Остаточный член метода Галеркина

Рассмотрим остаточный член  $R_m(x, t)$  разложения (3.1):

$$w(x, t) = w_m(x, t) + R_m(x, t) = \sum_{k=1}^m a_k(t) \sin \gamma_k x + R_m(x, t). \quad (4.1)$$

Подставляя  $w(x, t)$  в виде (4.1) в уравнение (2.1), получим

$$\sum_{k=1}^m (M\ddot{a}_k(t) + (D\gamma_k^4 + \beta_0) a_k(t)) \sin \gamma_k x + M\ddot{R}_m(x, t) + DR_m'''(x, t) + \beta_0 R_m(x, t) = 0. \quad (4.2)$$

Согласно (3.2) из (4.2) окончательно получим

$$M\ddot{R}_m(x, t) + DR_m'''(x, t) + \beta_0 R_m(x, t) = 0. \quad (4.3)$$

Подставляя  $w(x, t)$  в виде (4.1) в граничные условия (2.2) и начальные условия (2.3), получим

$$R_m(0, t) = 0, \quad R_m(l, t) = 0, \quad R_m''(0, t) = 0, \quad R_m''(l, t) = 0, \quad (4.4)$$

$$R_m(x, 0) = f_1(x) - \sum_{k=1}^m a_k(0) \sin \gamma_k x, \quad \dot{R}_m(x, 0) = f_2(x) - \sum_{k=1}^m \dot{a}_k(0) \sin \gamma_k x, \quad (4.5)$$

где  $a_k(0), \dot{a}_k(0)$  определяются согласно (3.3).

Для дифференциального уравнения в частных производных (4.3) с граничными и начальными условиями (4.4), (4.5) введем функционал типа Ляпунова

$$T = \int_0^l \left\{ M \dot{R}_m^2(x, t) + DR_m''^2(x, t) + \beta_0 R_m^2(x, t) \right\} dx. \quad (4.6)$$

Аналогично исследованию функционала (2.4), получим

$$T(t) = T(0). \quad (4.7)$$

Таким образом, из (4.5), (4.7) получим равенство

$$\begin{aligned} \int_0^l \left\{ M \dot{R}_m^2(x, t) + DR_m''^2(x, t) + \beta_0 R_m^2(x, t) \right\} dx &= \int_0^l \left\{ M \left( f_2(x) - \sum_{k=1}^m \dot{a}_k(0) \sin \gamma_k x \right)^2 + \right. \\ &+ D \left( f_1''(x) + \sum_{k=1}^m \gamma_k^2 a_k(0) \sin \gamma_k x \right)^2 + \beta_0 \left( f_1(x) - \sum_{k=1}^m a_k(0) \sin \gamma_k x \right)^2 \left. \right\} dx. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Так как в силу сходимости метода Галеркина точное решение есть ряд

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) g_k(x), \quad (4.9)$$

то остаточный член имеет вид

$$R_m(x, t) = w(x, t) - w_m(x, t) = \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k(t) g_k(x). \quad (4.10)$$

Учитывая ортогональность функций  $\{g_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ , получим

$$\int_0^l R_m(x, t) g_n(x) dx = 0, \quad n = 1, \dots, m. \quad (4.11)$$

Рассмотрим краевую задачу для уравнения  $\omega^{IV}(x) = -\lambda\omega''(x)$ ,  $x \in [0, l]$  с краевыми условиями (4.2). Эта задача является самосопряженной и полностью определенной. Согласно (4.11) для функции  $R_m(x, t)$  запишем неравенство Рэлея [12]:

$$\int_0^l R_m(x, t) R_m^{IV}(x, t) dx \geq -\lambda_{m+1} \int_0^l R_m(x, t) R_m''(x, t) dx,$$

где  $(m+1)$ -е собственное значение рассматриваемой краевой задачи  $\lambda_{m+1} = \frac{\pi(m+1)}{l}$ . Интегрируя по частям, представим это неравенство в виде:

$$\int_0^l R_m'^2(x, t) dx \geq \lambda_{m+1} \int_0^l R_m'^2(x, t) dx. \quad (4.12)$$

Согласно (4.12) из (4.8) получим неравенство

$$\begin{aligned} \int_0^l \left\{ M \dot{R}_m^2(x, t) + D \lambda_{m+1} R_m'^2(x, t) + \beta_0 R_m^2(x, t) \right\} dx &\leq \int_0^l \left\{ M \left( f_2(x) - \sum_{k=1}^m \dot{a}_k(0) \sin \gamma_k x \right)^2 + \right. \\ &\left. + D \left( f_1''(x) + \sum_{k=1}^m \gamma_k^2 a_k(0) \sin \gamma_k x \right)^2 + \beta_0 \left( f_1(x) - \sum_{k=1}^m a_k(0) \sin \gamma_k x \right)^2 \right\} dx. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Используя неравенство Коши-Буняковского, получим

$$R_m^2(x, t) \leq l \int_0^l R_m'^2(x, t) dx. \quad (4.14)$$

Согласно (4.14) из (4.13) окончательно получим неравенство

$$\begin{aligned} \frac{D \lambda_{m+1}}{l} R_m^2(x, t) + \int_0^l \left\{ M \dot{R}_m^2(x, t) + \beta_0 R_m^2(x, t) \right\} dx &\leq \int_0^l \left\{ M \left( f_2(x) - \sum_{k=1}^m \dot{a}_k(0) \sin \gamma_k x \right)^2 + \right. \\ &\left. + D \left( f_1''(x) + \sum_{k=1}^m \gamma_k^2 a_k(0) \sin \gamma_k x \right)^2 + \beta_0 \left( f_1(x) - \sum_{k=1}^m a_k(0) \sin \gamma_k x \right)^2 \right\} dx, \end{aligned} \quad (4.15)$$

на основании которого доказана теорема.

**Теорема 4.1.** Если функция  $R_m(x, t)$  удовлетворяет краевым условиям (4.4), то решение  $R_m(x, t)$  уравнения (4.3) устойчиво по отношению к возмущениям начальных данных (4.5) и справедливо неравенство

$$\begin{aligned} R_m^2(x, t) &\leq \frac{l^2}{D \pi(m+1)} \int_0^l \left\{ M \left( f_2(x) - \sum_{k=1}^m \dot{a}_k(0) \sin \gamma_k x \right)^2 + \right. \\ &\left. + D \left( f_1''(x) + \sum_{k=1}^m \gamma_k^2 a_k(0) \sin \gamma_k x \right)^2 + \beta_0 \left( f_1(x) - \sum_{k=1}^m a_k(0) \sin \gamma_k x \right)^2 \right\} dx. \end{aligned} \quad (4.16)$$

## 5. Улучшение оценки остаточного члена метода Галеркина

Будем искать остаточный член  $R_m(x, t)$  в виде

$$R_m^{pr}(x, t) = a_{m+1}(t)g_{m+1}(x), \quad (5.1)$$

где индекс  $pr$  сверху обозначает приближенное значение остаточного члена, а функция  $a_{m+1}(t)$  удовлетворяет уравнению (2.5), которое в силу ортогональности базисных функций примет вид:

$$M\dot{a}_{m+1}^2(t) + (D\gamma_{m+1}^4 + \beta_0) a_{m+1}^2(t) = \frac{2}{l} \int_0^l \left\{ Mf_2^2(x) + Df_1''^2(x) + \beta_0 f_1^2(x) \right\} dx - \\ - \sum_{k=1}^m \left( M\dot{a}_k^2(t) + (D\gamma_k^4 + \beta_0) a_k^2(t) \right). \quad (5.2)$$

Учитывая (3.8), окончательно получим

$$M\dot{a}_{m+1}^2(t) + (D\gamma_{m+1}^4 + \beta_0) a_{m+1}^2(t) = \frac{2}{l} \int_0^l \left\{ Mf_2^2(x) + Df_1''^2(x) + \beta_0 f_1^2(x) \right\} dx - \\ - \sum_{k=1}^m \left( M\dot{a}_k^2(0) + (D\gamma_k^4 + \beta_0) a_k^2(0) \right). \quad (5.3)$$

Введем обозначение

$$A_m = \frac{2}{l} \int_0^l \left\{ Mf_2^2(x) + Df_1''^2(x) + \beta_0 f_1^2(x) \right\} dx - \sum_{k=1}^m \left( M\dot{a}_k^2(0) + (D\gamma_k^4 + \beta_0) a_k^2(0) \right). \quad (5.4)$$

Тогда уравнение (5.3) примет вид

$$M\dot{a}_{m+1}^2(t) + (D\gamma_{m+1}^4 + \beta_0) a_{m+1}^2(t) = A_m. \quad (5.5)$$

Введем обозначения

$$k^2 = \frac{A_m}{M}, \quad b^2 = \frac{D\gamma_{m+1}^4 + \beta_0}{M}. \quad (5.6)$$

Тогда уравнение (5.5) примет вид

$$\dot{a}_{m+1}(t) = \pm \sqrt{k^2 - b^2 a_{m+1}^2(t)}. \quad (5.7)$$

Это уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{da_{m+1}(t)}{b\sqrt{\left(\frac{k}{b}\right)^2 - a_{m+1}^2(t)}} = \pm dt. \quad (5.8)$$

Интегрируя (5.8), получим

$$\frac{1}{b} \arcsin \frac{ba_{m+1}(t)}{k} = \pm t + C. \quad (5.9)$$



Следовательно,

$$a_{m+1}(t) = \pm \frac{k}{b} \sin b(t + C). \quad (5.10)$$

Оценивая остаточный член вида (5.1) метода Бубнова-Галеркина, получим

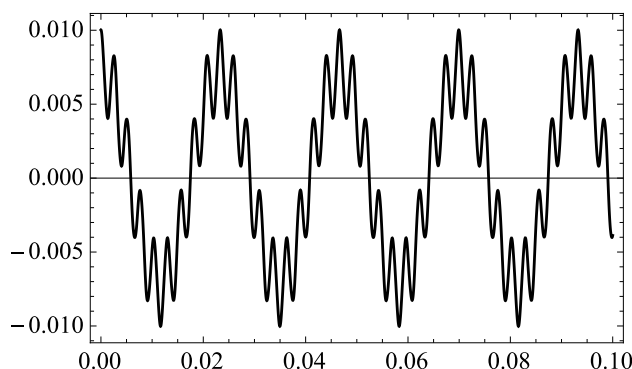
$$\begin{aligned} \varepsilon = |w(x, t) - w_m(x, t)| &= |R_m(x, t)| \approx |R_m^{pr}(x, t)| \leq |a_{m+1}(t)| \leq \\ &\leq \frac{k}{b} = \sqrt{\frac{A_m}{D\gamma_{m+1}^4 + \beta_0}}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

## 6. Численный эксперимент

Будем считать, что плита (пластина) изготовлена из бетона В20, тогда коэффициент Пуассона, модуль упругости и плотность:  $\nu = 0,2$  (безр.),  $E = 2,75 \cdot 10^{10}$  (Па),  $\rho = 2000$  (кг·м<sup>-3</sup>). Длина и толщина плиты  $l = 2$  (м),  $h = 0,1$  (м). Тогда масса и изгибная жесткость плиты:  $M = h\rho = 200$  (кг·м<sup>-2</sup>),  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \approx 2,39 \cdot 10^6$  (Н·м).

Возьмем коэффициент жесткости основания  $\beta_0 = 4$  (Па·м<sup>-1</sup>). Пусть начальные условия (в метрах) имеют вид:  $w(x, 0) = 0.01 \cdot x^5 \cdot (l - x)^4$ ;  $\dot{w}(x, 0) = -0.005x^3 \cdot (l - x)^5$ .

С помощью математической системы Mathematica получим график функции  $w(x, t) = \sum_{k=1}^m a_k(t)g_k(x)$  при  $m = 5$  в точке  $x_* = \frac{l}{2}$ :



**Рис. 6.1.** Деформация пластины  $w(x, t)$  в точке  $x_* = l/2$  при  $t \in [0; 0.1]$

**Fig. 6.1.** Deformation of plate  $w(x, t)$  at point  $x_* = l/2$  at  $t \in [0; 0.1]$

Рассчитаем полученные оценки (2.6), (3.11), (4.16), (5.11) при  $m = 5$ .

Грубая оценка амплитуды колебаний (2.6):

$$|w(x, t)| \leq \sqrt{\frac{l^2}{\pi D} \int_0^l \{Mf_2^2(x) + Df_1'^2(x) + \beta_0 f_1^2(x)\} dx} \approx 0.0816626. \quad (6.1)$$

Уточненная оценка амплитуды колебаний (3.11):

$$|w_m(x_*, t)| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^m \frac{2(M\dot{a}_k^2(0) + (D\gamma_k^4 + \beta_0)a_k^2(0))}{(D\gamma_k^4 + \beta_0)}} g_k^2(x_*) \approx 0.0109459. \quad (6.2)$$

Рассчитаем грубую оценку погрешности (4.16):

$$R_m^2(x, t) \leq \frac{l^2}{D\pi(m+1)} \int_0^l \left\{ M \left( f_2(x) - \sum_{k=1}^m \dot{a}_k(0) \sin \gamma_k x \right)^2 + \right. \\ \left. + D \left( f_1''(x) + \sum_{k=1}^m \gamma_k^2 a_k(0) \sin \gamma_k x \right)^2 + \beta_0 \left( f_1(x) - \sum_{k=1}^m a_k(0) \sin \gamma_k x \right)^2 \right\} dx.$$

Следовательно,

$$|R_m(x, t)| \leq \varepsilon \approx 0.0023465. \quad (6.3)$$

Уточненная оценка погрешности (5.11):

$$|R_m^{pr}(x, t)| \leq \sqrt{\frac{A_m}{D\gamma_{m+1}^4 + \beta_0}} \approx 0.0000573. \quad (6.4)$$

Как видим из рис. 6.1, оценка (6.1) очень грубая и не показывает точно амплитуду колебаний плиты.

Из (6.2), (6.3), получим точнее оценку  $|w(x, t)| \leq |w_m(x_*, t)| + |R_m(x, t)|$ . Следовательно,

$$|w(x, t)| \leq 0.0132924 \quad (6.5)$$

с относительной погрешностью

$$\left| \frac{R_m(x_*, t)}{w_m(x_*, t)} \right| \cdot 100\% \approx 21.4\%. \quad (6.6)$$

Из (6.2), (6.4), получим еще точнее оценку

$$|w(x, t)| \leq 0.0110032 \quad (6.7)$$

с относительной погрешностью

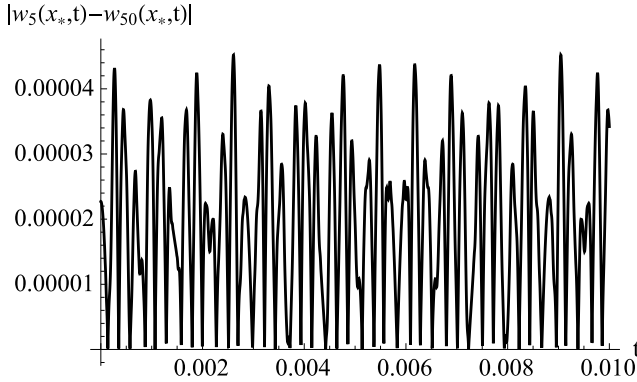
$$\left| \frac{R_m^{pr}(x_*, t)}{w_m(x_*, t)} \right| \cdot 100\% \approx 0.5\%. \quad (6.8)$$

Для доказательства достоверности предложенного метода определения погрешности приближенного решения, полученного с помощью метода Галеркина, на рис. 6.2 построен график разности приближений  $|w_5(x, t) - w_{50}(x, t)|$  в точке  $x_* = \frac{l}{2}$ .

Как видим из рисунка 6.2 разность  $|w_5(x, t) - w_{50}(x, t)| \leq 0.0000425$ , что достаточно хорошо согласуется с оценкой остаточного члена (6.4).

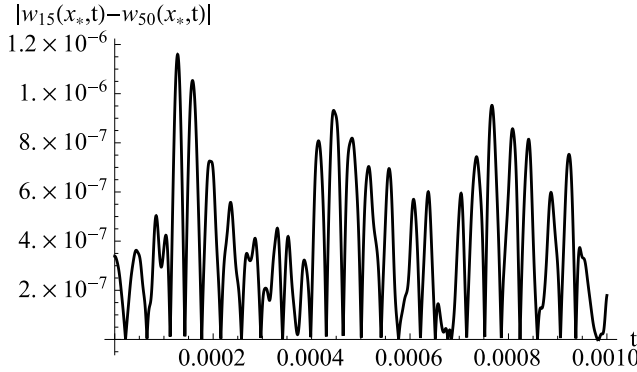
Возьмем  $m = 15$ . Оценки (3.11), (4.16), (5.11) и относительные погрешности примут вид

$$|w_m(x_*, t)| \leq 0.0109460, \quad |R_m(x, t)| \leq 0.0002384, \quad \left| \frac{R_m(x_*, t)}{w_m(x_*, t)} \right| \cdot 100\% \approx 2.2\%,$$



**Рис. 6.2.** Разность приближенных решений  $|w_5(x, t) - w_{50}(x, t)|$  в точке  $x_* = l/2$  при  $t \in [0; 0.01]$

**Fig. 6.2.** The difference between the approximate solutions  $|w_5(x, t) - w_{50}(x, t)|$  at the point  $x_* = l/2$  for  $t \in [0; 0.01]$



**Рис. 6.3.** Разность приближенных решений  $|w_{15}(x, t) - w_{50}(x, t)|$  в точке  $x_* = l/2$  при  $t \in [0; 0.001]$

**Fig. 6.3.** The difference between the approximate solutions  $|w_{15}(x, t) - w_{50}(x, t)|$  at the point  $x_* = l/2$  for  $t \in [0; 0.001]$

$$|R_m^{pr}(x, t)| \leq 0.0000013, \quad \left| \frac{R_m^{pr}(x_*, t)}{w_m(x_*, t)} \right| \cdot 100\% \approx 0.012\%.$$

Найдено приближенное решение (график аналогичен рис. 6.1) начально-краевой задачи (2.1)-(2.3). Для пятнадцатого приближения погрешность составила 0.012%, что подтверждается рис. 6.3.

## 7. Заключение

Описанию метода Галеркина и сходимости приближенного решения, полученного этим методом, к точному решению посвящено большое количество научных работ (см., например, [8, 9, 10]). В данной статье на простейшем примере свободных колебаний

шарнирно закрепленной по краям упругой пластины показана возможность использования функционалов и функций Ляпунова для определения погрешности полученного методом Галеркина приближенного решения. В дальнейшем, с помощью предложенного метода планируется провести исследование динамики бетонной плиты, моделируемой упругой пластиной, с учетом взаимодействия с окружающей средой.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бочкарев С. А., Матвеев В. П. Анализ собственных колебаний цилиндрической оболочки переменной толщины, частично заполненной жидкостью // *Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН*. 2023. Т. 29, № 2. С. 27–40.
2. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
3. Попов В. С., Попова А. А. Динамика взаимодействия пульсирующего слоя вязкой сжимаемой жидкости с пластиной на нелинейно-упругом основании // *Вестн. МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естеств. науки*. 2024. Т. 114, № 3. С. 45–69.
4. Суслов А. В., Ярославкина Е. Е. Исследование влияния температурных напряжений на собственные колебания пластин // *Вестн. Самар. ун-та. Естественнонауч. сер.* 2024. Т. 30, № 2. С. 45–53. DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-2-45-53
5. Божанов Е. Т., Ержанов Ж. С. Исследование проблем устойчивости упругих тел, гибких пластин и оболочек и их приложения. Алматы, 2001.
6. Сухотерин М. В., Сосновская А. А. Потеря устойчивости защемленной по контуру прямоугольной нанопластины // *Науч.-тех. вестн. информ. техн. мех. опт.* 2024. Т. 24, № 4. С. 629–636. DOI: 10.17586/2226-1494-2024-24-4-629-636
7. Бабаков И. М. Теория колебаний. М.: Наука, 1968. 559 с.
8. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. М.: Мир, 1988. 352 с.
9. Келдыш М. В. О методе В. Г. Галеркина для решения краевых задач // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1942. Т. 6, Вып. 6. С. 309–330.
10. Репина А. И. Сходимость метода Галеркина решения нелинейной задачи о собственных модах микродисковых лазеров // *Уч. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. 2021. Т. 163, № 1. С. 5–20. DOI: 10.26907/2541-7746.2021.1.5-20
11. Анкилов М. А., Андреев А. С. Численно-аналитический метод исследования динамики шарнирно закрепленной упругой пластины // *Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры*. 2025. Т. 242. С. 3–10. DOI: 10.36535/2782-4438-2025-242-3-10
12. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. М.: Наука, 1968. 503 с.

*Поступила 21.08.2025; доработана после рецензирования 28.10.2025;  
принята к публикации 26.11.2025*

*Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.*

*Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.*

## REFERENCES

1. S. A. Bochkarev, V. P. Matveenko, “Analysis of natural oscillations of a cylindrical shell of variable thickness partially filled with liquid”, *Proceedings of the Inst. of Mat. Mech. Ural Branch of the Russian Academy of Sciences.*, **29**:2 (2023), 27-40.
2. A. S. Volmir, *Nonlinear dynamics of plates and shells*, Nauka, Moscow, 1972 (In Russ.).
3. V. S. Popov, A. A. Popova, “Dynamics of interaction of a pulsating layer of a viscous compressible fluid with a plate on a nonlinear elastic foundation”, *Vestn. of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Sciences.*, **114**:3 (2024), 45-69 (In Russ.).
4. A. V. Suslov, E. E. Yaroslavkina, “Study of the influence of temperature stresses on the natural oscillations of plates”, *Vestn. Samara University. Natural Science Series.*, **30**:2 (2024), 45–53 (In Russ.). DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-2-45-53
5. E. T. Bozhanov, Zh. S. Erzhanov, *Study of stability problems of elastic bodies, flexible plates and shells and their applications*, Almaty, 2001 (In Russ.).
6. M. V. Sukhoterlin, A. A. Sosnovskaya, “Loss of stability of a rectangular nanoplate clamped along the contour”, *Nauch.-tech. vestn. inform. tech. mech. opt.*, **24**:4 (2024), 629–636 (In Russ.). DOI: 10.17586/2226-1494-2024-24-4-629-636
7. I. M. Babakov, *Theory of oscillations*, Nauka, Moscow, 1968 (In Russ.).
8. K. Fletcher, *Numerical methods based on the Galerkin method*, Mir, Moscow, 1988 (In Russ.), 352 p.
9. M. V. Keldysh, “On V. G. Galerkin’s method for solving boundary value problems”, *Izvestiya AN SSSR. Ser. Mat.*, **6**:6 (1942), 309-330 (In Russ.).
10. A. I. Repina, “Convergence of the Galerkin method for solving a nonlinear problem of the eigenmodes of microdisk lasers”, *Uch. zap. Kazan. University. Series: Phys.-Math. Sciences.*, **163**:1 (2021), 5–20 (In Russ.). DOI: 10.26907/2541-7746.2021.1.5-20
11. M. A. Ankilov, A. S. Andreev, “Numerical-analytical method for studying the dynamics of a hinged elastic plate”, *Results of Science and Technology. Modern Mathematics and its Applications. Thematic Reviews.*, **242** (2025), 3–10 (In Russ.). DOI: 10.36535/2782-4438-2025-242-3-10
12. L. Collatz, *Eigenvalue problems*, Nauka, Moscow, 1968 (In Russ.), 503 p.

*Submitted 21.08.2025; Revised 28.10.2025; Accepted 26.11.2025*

*The authors have read and approved the final manuscript.*

*Conflict of interest:* The authors declare no conflict of interest.