Математика

DOI 10.15507/2079-6900.27.202504.411-421
Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.651

Об ортогональных кубических сплайнах Шенберга

В. Л. Леонтьев

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (г. Санкт-Петербург, Российская Федерация)

Аннотация. Проводится трансформация кубических сплайнов Шенберга с помощью четырех вспомогательных кубических сплайнов Шенберга, имеющих конечные носители, размеры которых меньше по сравнению с размером конечного носителя материнского сплайна. В результате построены восемь сеточных наборов ортогональных кубических сплайнов Шенберга, имеющих действительные значения. Выполнено исследование аппроксимативных свойств построенных ортогональных кубических сплайнов Шенберга. Показано, что порядок аппроксимации сплайнами Шенберга, модифицированными также сплайнами Шенберга, существенно выше по сравнению с порядком аппроксимации сплайнами Шенберга, модифицированными ступенчатыми функциями, и совпадает с порядком аппроксимации классическими кубическими сплайнами Шенберга. Дефект модифицированного сплайна Шенберга равен единице, как у классического сплайна Шенберга. Модифицированный сплайн является непрерывной функцией, у которой в точках сопряжения друг с другом частей материнского сплайна и частей сплайнов, используемых для модификации, нет разрывов также первой и второй производных.

Ключевые слова: кубические сплайны Шенберга, ортогонализация функций с компактными носителями, аппроксимация сплайнами

Для цитирования: Леонтьев В. Л. Об ортогональных кубических сплайнах Шенберга // *Журнал Средневолжского математического общества.* 2025. Т. 27, № 4. С. 411–421. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202504.411-421

Об авторе:
Леонтьев Виктор Леонтьевич, д.ф.-м.н., профессор Научного Центра мирового уровня «Передовые цифровые технологии» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого (195251, Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, 29В), ORCID: http: //orcid.org/0000-0002-8669-1919, leontiev_vl@spbstu.ru

Original article

MSC2020 41A15

On orthogonal cubic Schoenberg splines

V. L. Leontiev

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (St. Petersburg, Russian Federation)

Abstract. The transformation of cubic Schoenberg splines is carried out using four auxiliary cubic Schoenberg splines having finite supports, whose sizes are smaller than the size of the mother spline's finite support. As a result, eight grid sets of orthogonal cubic real-valued Schoenberg splines are constructed. The approximation properties of these splines are investigated. It is shown that the approximation order of Schoenberg splines, that are also modified by Schoenberg splines, is significantly higher than the approximation order of step function-modified Schoenberg splines, and coincides with the approximation order of classical cubic Schoenberg splines. The defect of modified Schoenberg spline is equal to one, as that of classical Schoenberg spline. The modified spline is a continuous function which has no breaks in the first and the second derivatives at the points where the parts of the mother spline and the parts of the splines used for modification meet.

Keywords: cubic Schoenberg splines, orthogonalization of compactly supported functions, spline approximation

For citation: *V. L. Leontiev.* On orthogonal cubic Schoenberg splines. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 27:4(2025), 411–421. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202504.411-421

About the author:
Victor L. Leontiev, D. Sci. (Phys. and Math.), Professor of World-Class Research Center for Advanced Digital Technologies, Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University (29, Politechnicheskaya str., litera B, St. Petersburg, 195251, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-8669-1919, leontiev_vl@spbstu.ru

1. Введение

Теория сплайнов возникла после создания кубических сплайнов Шенберга [1]. В книге [2] заявляется, что ортогональные сплайны не существуют, но это категоричное утверждение, как установлено в [3], имеет принципиальные исключения и означает лишь только то, что невозможно получить ортогональные сплайны с помощью процедуры ортогонализации Грама-Шмидта. Две авторские процедуры ортогонализации [3] компактно опертых функций без разрушения их конечных носителей привели к появлению ортогональных сплайнов [3] с широкой областью их применения, причем не только в алгоритмах смешанных вариационно-сеточных методов (СВСМ) [3]. Так, например, в [4] ортогональные сплайны применяются в наномеханике при построении потенциала взаимодействия атомов, в [5] - при создании алгоритма криптографии. Реализация геометрического алгоритма ортогонализации [3] с учетом особенностей кубических сплайнов Шенберга впервые излагается в статье [6], в которой показывается, что в случае использования восьми ступенчатых функций для модификации материнского кубического сплайна Шенберга достигается возможность ортогонализации порождаемого им сеточного набора сплайнов без изменения конечного носителя материнского сплайна. В [6] найдены несколько вариантов ортогонализации кубических сплайнов Шенберга ступенчатыми функциями, имеющими не только действительные, но и комплексные коэффициенты, а также имеющими только действительные коэффициенты. Установлено [6], что для ортогонализации сплайнов Шенберга достаточно использовать только четыре ступенчатые функции. Доказана теорема о порядке аппроксимации любой функции одного из использованных пространств Соболева линейными комбинациями построенных ортогональных сплайнов Шенберга, но порядок аппроксимации оказался более низким, чем для неортогональных сплайнов Шенберга. Кроме того, ортогональные сплайны Шенберга [6] имеют разрывы первого рода, что снижает их аппроксимативные свойства.

Данная статья является продолжением статьи [6] и содержит результаты ортогонализации кубических сплайнов Шенберга с использованием только четырех вспомогательных кубических сплайнов Шенберга, с учетом результатов, полученных в статье [6]. Доказывается, что порядок аппроксимации любой функции одного из используемых пространств Соболева линейными комбинациями модифицированных кубических сплайнов Шенберга не уменьшается в результате такой ортогонализации по сравнению с порядком аппроксимации линейными комбинациями классических неортогональных кубических сплайнов Шенберга. Дефект предлагаемых ортогональных кубических сплайнов Шенберга равен единице, как и у классических кубических сплайнов Шенберга. Построенный здесь модифицированный материнский кубический сплайн Шенберга, в отличие от кубического сплайна Шенберга [6], модифицированного ступенчатыми функциями, является непрерывной функцией, у которой также нет разрывов первой и второй производных. Ортогональные кубические сплайны Шенберга, получаемые здесь на основе модификации классического материнского кубического сплайна Шенберга с помощью четырех вспомогательных кубических сплайнов Шенберга, создают новые возможности при построении алгоритмов СВСМ, основанных на смешанных вариационных принципах Рейсснера и Ху-Вашицу [3]. Применение ортогональных кубических сплайнов Шенберга в таких алгоритмах, по-видимому, приведет к повышению фактической точности аппроксимаций искомых точных решений краевых задач и к увеличению скорости сходимости их приближенных решений. При этом, в задачах механики деформируемого твердого тела ортогональные кубические сплайны Шенберга позволяют исключить узловые неизвестные, соответствующие силовым факторам и деформациям, до начала решения глобальной системы вариационно-сеточных уравнений на компьютере. Это делает такие СВСМ сравнимыми по вычислительным затратам с ВСМ, основанными на вариационном принципе Лагранжа. Но при этом, по гладкости и точности приближенных решений для силовых факторов и деформаций СВСМ превосходят ВСМ, связанные с вариационным принципом Лагранжа. Предлагаемые здесь ортогональные кубические сплайны Шенберга являются вкладом не только в теорию СВСМ, но и в теорию сплайнов, которая продолжает получать во многих теоретических и прикладных работах, например, [7–10], свое дальнейшее развитие и расширение применения.

2. Кубические сплайны Шенберга и новая процедура их ортогонализации, не изменяющая конечные носители сплайнов

Материнский кубический сплайн Шенберга имеет вид [1, 11]

$$\varphi^{(3)}(x) = \begin{cases} 0, \ x \geq 2, \\ (2-x)^3/6, \ 1 \leq x \leq 2, \\ [1+3(1-x)+3(1-x)^2-3(1-x)^3]/6, \ 0 \leq x \leq 1, \\ \varphi^{(3)}(-x), \ \ x \leq 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

В соответствии с процедурой ортогонализации [6] конечными носителями вспомогательных функций являются отрезки [6, 10], [1, 5], [−4, 0], [−9, −5], расположенные на четырех равных по размеру частях конечного носителя материнского сплайна.

Для упрощения дальнейших преобразований и для создания дополнительных возможностей исследований материнский кубический сплайн Шенберга (2.1) масштабируется и принимает вид

$$\varphi_m^{(3)}(x) = \varphi^{(3)}(x/5) = \begin{cases} 0, \ x \geq 10, \\ (2-x/5)^3/6, \ 5 \leq x \leq 10, \\ [1+3(1-x/5)+3(1-x/5)^2-3(1-x/5)^3]/6, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 \leq x \leq 5, \\ \varphi^{(3)}(-x/5), \ \ x \leq 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Для новой по сравнению с [6] модификации масштабированного материнского кубического сплайна Шенберга (2.2) используются также кубические сплайны Шенберга

$$\varphi^{(3)}(x-8), \ \varphi^{(3)}(x-3), \ \varphi^{(3)}(x+2), \ \varphi^{(3)}(x+7)$$

с соответствующими им конечными носителями [6, 10], [1, 5], [−4, 0], [−9, −5], имеющими размер равный 4, который в 5 раз меньше размера, равного 20, конечного носителя сплайна (2.2).

Возможность построения материнского кубического сплайна Шенберга, порождающего ортогональные сеточные наборы сплайнов Шенберга на каждой сетке, с помощью только четырех вспомогательных ступенчатых функций, обоснована в статье [6]. При этом в [6] показано, что восемь модифицирующих ступенчатых функций с ненулевыми коэффициентами позволяют построить только комплексный материнский сплайн Шенберга, порождающий ортогональные сеточные наборы сплайнов Шенберга на каждой сетке. Поэтому здесь для модификации материнского кубического сплайна Шенберга (2.2) используется четыре указанных вспомогательных кубических сплайна Шенберга, что приводит к построению на сетке ортогональных действительных кубических сплайнов Шенберга, характеризующихся более высокой гладкостью по сравнению с ортогональными сплайнами [6].

Масштабированный материнский сплайн Шенберга в результате его модификации с помощью четырех вспомогательных кубических сплайнов Шенберга, порождаемых трансляциями не масштабированного материнского сплайна (2.1), принимает вид

$$\Phi(x) = \varphi_m^{(3)}(x) + A_1\varphi^{(3)}(x-8) + A_2\varphi^{(3)}(x-3) + A_3\varphi^{(3)}(x+2) + A_4\varphi^{(3)}(x+7), \tag{2.3}$$

где A_i, $i = 1,2,3,4$ – неизвестные постоянные коэффициенты, значения которых определяются тремя условиями ортогональности масштабированного материнского кубического сплайна (2.3) и трех кубических сплайнов $\Phi(x-15)$, $\Phi(x-10)$, $\Phi(x-5)$, полученных его трансляциями, а именно, условиями

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x)\Phi(x-15)dx = \int_{5}^{10} \Phi(x)\Phi(x-15)dx =$$
$$= \int_{5}^{10} \left[\varphi_m^{(3)}(x) + A_1\varphi^{(3)}(x-8)\right]\left[\varphi_m^{(3)}(x-15) + A_4\varphi^{(3)}(x-8)\right]dx = 0.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x)\Phi(x-10)dx = \int_{0}^{5} \Phi(x)\Phi(x-10)dx + \int_{5}^{10} \Phi(x)\Phi(x-10)dx =$$
$$= \int_{0}^{5} \left[\varphi_m^{(3)}(x) + A_2\varphi^{(3)}(x-3)\right]\left[\varphi_m^{(3)}(x-10) + A_4\varphi^{(3)}(x-3)\right]dx +$$
$$+ \int_{5}^{10} \left[\varphi_m^{(3)}(x) + A_1\varphi^{(3)}(x-8)\right]\left[\varphi_m^{(3)}(x-10) + A_3\varphi^{(3)}(x-8)\right]dx = 0.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x)\Phi(x-5)dx = \int_{-5}^{0} \Phi(x)\Phi(x-5)dx + \int_{0}^{5} \Phi(x)\Phi(x-5)dx + \int_{5}^{10} \Phi(x)\Phi(x-5)dx =$$
$$= \int_{-5}^{0} \left[\varphi_m^{(3)}(x) + A_3\varphi^{(3)}(x+2)\right]\left[\varphi_m^{(3)}(x-5) + A_4\varphi^{(3)}(x+2)\right]dx +$$
$$+ \int_{0}^{5} \left[\varphi_m^{(3)}(x) + A_2\varphi^{(3)}(x-3)\right]\left[\varphi_m^{(3)}(x-5) + A_3\varphi^{(3)}(x-3)\right]dx +$$
$$+ \int_{5}^{10} \left[\varphi_m^{(3)}(x) + A_1\varphi^{(3)}(x-8)\right]\left[\varphi_m^{(3)}(x-5) + A_2\varphi^{(3)}(x-8)\right]dx = 0.$$

которые преобразуются в соответствующие им три алгебраических уравнения

$$\frac{1}{25}A_1 + \frac{1}{75}A_4 + \frac{151}{315}A_1A_4 + \frac{1}{1008} = 0, \tag{2.4}$$

$$\frac{8}{15}A_1 + \frac{1}{25}A_2 + \frac{1}{75}A_3 + \frac{31}{75}A_4 + \frac{151}{315}\left(A_1A_3 + A_2A_4\right) + \frac{10}{84} = 0, \tag{2.5}$$

$$\frac{31}{75}(A_1 + A_3) + \frac{8}{15}(A_2 + A_4) + \frac{1}{75}A_2 + \frac{1}{25}A_3 + \frac{151}{315}(A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4) + \frac{397}{336} = 0. \tag{2.6}$$

3. Решения системы уравнений ортогональности и аппроксимации

Решение системы четырех уравнений для неизвестных постоянных коэффициентов A_i, $i = 1,2,3,4$, состоящей из трех уравнений (2.4), (2.5), (2.6) и необходимого условия аппроксимации [6], согласно которому сумма четырех этих коэффициентов должна быть равной нулю, дает восемь вариантов значений коэффициентов, в каждом из которых они имеют действительные значения (с округлением десяти значащих цифр после запятой до четырех):

3.1) $$A_1 = -0.7567, A_2 = 1.7548, A_3 = -0.9143, A_4 = -0.08379;$$

3.2) $$A_1 = -0.08314, A_2 = -1.3883, A_3 = 1.5594, A_4 = -0.08799;$$

3.3) $$A_1 = -0.03236, A_2 = 1.8098, A_3 = -1.6386, A_4 = -0.1388;$$

3.4) $$A_1 = -0.02816, A_2 = -0.6639, A_3 = 1.5045, A_4 = -0.8124;$$

3.5) $$A_1 = -0.02772, A_2 = -0.9167, A_3 = -1.6433, A_4 = 2.5877;$$

3.6) $$A_1 = -0.02658, A_2 = -1.5956, A_3 = 1.5029, A_4 = 0.1193;$$

3.7) $$A_1 = 0.1749, A_2 = 1.7532, A_3 = -1.8459, A_4 = -0.08220;$$

3.8) $$A_1 = 2.6433, A_2 = -1.3930, A_3 = -1.1670, A_4 = -0.08335.$$

Все варианты решений содержат четыре действительные значения коэффициентов A_i, $i = 1,2,3,4$ функций $\varphi^{(3)}(x-8)$, $\varphi^{(3)}(x-3)$, $\varphi^{(3)}(x+2)$, $\varphi^{(3)}(x+7)$, модифицирующих материнский сплайн Шенберга (2.2). Действительная функция, равная сумме четырех сплайнов Шенберга $A_1\varphi^{(3)}(x-8)$, $A_2\varphi^{(3)}(x-3)$, $A_3\varphi^{(3)}(x+2)$, $A_4\varphi^{(3)}(x+7)$, умноженных на коэффициенты, имеющие найденные значения, не является четной или нечетной во всех восьми вариантах. Поэтому модифицированный кубический сплайн Шенберга (2.3), порождающий сеточные наборы ортогональных кубических сплайнов Шенберга, есть действительная функция, не являющаяся четной или нечетной. Но гладкость модифицированного кубического сплайна Шенберга (2.3) такая же высокая, как гладкость исходного материнского сплайна Шенберга (2.2). Модифицированный материнский сплайн Шенберга (2.3), так же, как и исходный не ортогональный материнский сплайн Шенберга (2.2), имеет дефект равный единице, поскольку не только он является непрерывным, но и его первая и вторая производные во всех точках области определения сплайна $(-\infty, \infty)$, в том числе, в точках -5, 0, 5 сопряжения четырех частей сплайна Шенберга $\varphi_m^{(3)}(x)$, а также в точках -9, -5, -4, 0, 1, 5, 6, 10 сопряжения модифицированных частей сплайна с его не модифицированными частями. Это следует из того, что значения вспомогательных сплайнов Шенберга $\varphi^{(3)}(x-8), \varphi^{(3)}(x-3), \varphi^{(3)}(x+2), \varphi^{(3)}(x+7)$, а также их первых и вторых производных, на границах конечных носителей этих сплайнов равны нулю.

4. Исследование аппроксимативных свойств ортогональных кубических сплайнов Шенберга

Теорема 4.1. *Если*

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 0, \tag{4.1}$$

то для любой функции $u(x) \in W_2^4(R)$ *существуют такие коэффициенты* $\{u_i\}$, *что при* $h \to 0$

$$\left\| u(x) - \sum_{(i)} u_i \Phi_i(x) \right\|_{W_2^s} \leq C_s \cdot h^{4-s} \|u\|_{W_2^4}, \quad s = 0,1,2,3,$$

$$\sum_{(i)} |u_i|^2 \ \le c \ \|u\|^2_{W_2^0} \,. \tag{4.2}$$

Здесь h—шаг равномерной сетки; C_s, c—постоянные, не зависящие от h, $u(x)$; $\Phi_i(x)$ – сеточные сплайны, полученные маситабированием и трансляциями модифицированного материнского кубического сплайна Шенберга $\Phi(x)$; W_2^s, W_2^0, W_2^4 – гильбертовы пространства Соболева.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Преобразование Фурье [6] модифицированного материнского сплайна Шенберга (2.3)

$$\Phi(x) = \varphi_m^{(3)}\left(x\right) + A_1\varphi^{(3)}\left(x-8\right) + A_2\varphi^{(3)}\left(x-3\right) + A_3\varphi^{(3)}\left(x+2\right) + A_4\varphi^{(3)}\left(x+7\right)$$

имеет вид

$$\begin{aligned}(2\pi)^{1/2}\,\hat{\Phi}(\xi) = {} & \frac{1}{5^3 i^4 \xi^4}(e^{-10i\xi} - 4e^{-5i\xi} + 6 - 4e^{5i\xi} + e^{10i\xi}) + \\ & + \frac{1}{i^4\xi^4}[A_1(e^{-10i\xi} - 4e^{-9i\xi} + 6e^{-8i\xi} - 4e^{-7i\xi} + e^{-6i\xi}) + \\ & + A_2(e^{-5i\xi} - 4e^{-4i\xi} + 6e^{-3i\xi} - 4e^{-2i\xi} + e^{-i\xi}) + \\ & + A_3(e^{4i\xi} - 4e^{3i\xi} + 6e^{2i\xi} - 4e^{i\xi} + 1) + \\ & + A_4(e^{9i\xi} - 4e^{8i\xi} + 6e^{7i\xi} - 4e^{6i\xi} + e^{5i\xi})] = \\ = {} & \frac{1}{5^3 i^4\xi^4}(e^{i5\xi/2} - e^{-i5\xi/2})^4 + \frac{1}{\xi^4}(e^{2i\xi} - 4e^{i\xi} + 6 - 4e^{-i\xi} + e^{-2i\xi})\cdot \\ & \cdot (A_1 e^{-8i\xi} + A_2 e^{-3i\xi} + A_3 e^{2i\xi} + A_4 e^{7i\xi}) = \\ = {} & 5\left(\frac{\sin\left(5\xi/2\right)}{5\xi/2}\right)^4 + \frac{1}{\xi^4}\left(e^{i\xi/2} - e^{-i\xi/2}\right)^4 (A_1 e^{-8i\xi} + A_2 e^{-3i\xi} + A_3 e^{2i\xi} + A_4 e^{7i\xi}) = \\ = {} & 5\left(\frac{\sin\left(5\xi/2\right)}{5\xi/2}\right)^4 + \left(\frac{\sin\left(\xi/2\right)}{\xi/2}\right)^4 (A_1 e^{-8i\xi} + A_2 e^{-3i\xi} + A_3 e^{2i\xi} + A_4 e^{7i\xi}).\end{aligned} \tag{4.3}$$

Отсюда следует, что

$$\hat{\Phi}(0) \neq 0, \tag{4.4}$$

так как в (4.3)

$$5\lim_{\xi\to 0}\left(\frac{\sin\left(5\xi/2\right)}{5\xi/2}\right)^4 = 5,$$

а

$$\lim_{\xi\to 0}\left[\left(\frac{\sin\left(\xi/2\right)}{\xi/2}\right)^4 (A_1 e^{-8i\xi} + A_2 e^{-3i\xi} + A_3 e^{2i\xi} + A_4 e^{7i\xi})\right] = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 0$$

в соответствии с необходимым условием аппроксимации [6] и условием теоремы.

Из (4.3) также следует, что

$$(2\pi)^{1/2}\frac{d}{d\xi}\hat{\Phi}(\xi)=20\left(\frac{\sin(5\xi/2)}{5\xi/2}\right)^3\frac{\xi\cos(5\xi/2)-2\sin(5\xi/2)/5}{\xi^2}+$$
$$+\frac{d}{d\xi}\left[\left(\frac{\sin(\xi/2)}{\xi/2}\right)^4(A_1e^{-8i\xi}+A_2e^{-3i\xi}+A_3e^{2i\xi}+A_4e^{7i\xi})\right]=$$
$$=20\left(\frac{\sin(5\xi/2)}{5\xi/2}\right)^3\frac{\xi\cos(5\xi/2)-2\sin(5\xi/2)/5}{\xi^2}+$$
$$+4\left(\frac{\sin(\xi/2)}{\xi/2}\right)^3\frac{\xi\cos(\xi/2)/4-\sin(\xi/2)/2}{(\xi/2)^2}(A_1e^{-8i\xi}+A_2e^{-3i\xi}+A_3e^{2i\xi}+A_4e^{7i\xi})+$$
$$+\left(\frac{\sin(\xi/2)}{\xi/2}\right)^4(-8iA_1e^{-8i\xi}-3iA_2e^{-3i\xi}+2iA_3e^{2i\xi}+7iA_4e^{7i\xi}). \quad (4.5)$$

Поэтому

$$\frac{d}{d\xi}\hat{\Phi}(2\pi j)=0 \quad \forall j: \quad 0\neq j\in\mathbf{Z}. \quad (4.6)$$

Формула (4.5) также позволяет сделать вывод о том, что все члены, входящие в выражения для второй и третьей производных функции $\hat{\Phi}(\xi)$, полученной с помощью преобразования Фурье, содержат один из сомножителей вида

$$\left(\frac{\sin(5\xi/2)}{5\xi/2}\right)^k, \quad \left(\frac{\sin(\xi/2)}{\xi/2}\right)^k, \quad k=1,2,3,4$$

и в силу этого

$$\frac{d^2}{d\xi^2}\hat{\Phi}(2\pi j)=0, \quad \frac{d^3}{d\xi^3}\hat{\Phi}(2\pi j)=0 \quad \forall j: \quad 0\neq j\in\mathbf{Z}\,. \quad (4.7)$$

В соответствии с (4.4), (4.6), (4.7) оценка погрешности аппроксимации

$$\left\|u(x)-\sum_{(i)}u_i\,\Phi_i(x)\right\|_{W_2^s}\leq C\cdot h^{p+1-s}\,\|u\|_{W_2^{p+1}}$$

из формулировки теоремы Стренга-Фикса [11], справедлива в данном случае для $p=3$. Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

Для значений $s=0,\,1,\,2$ оценка (4.2) погрешности аппроксимации любой функции соответствующего пространства Соболева ортогональными сплайнами Шенберга записывается в трех формах

$$\left\|u(x)-\sum_{(i)}u_i\,\Phi_i(x)\right\|_{W_2^0}\leq C_0\cdot h^4\,\|u\|_{W_2^4}\,,$$

$$\left\|u(x)-\sum_{(i)}u_i\,\Phi_i(x)\right\|_{W_2^1}\leq C_1\cdot h^3\,\|u\|_{W_2^4}\,,$$

$$\left\| u(x) - \sum_{(i)} u_i \Phi_i(x) \right\|_{W_2^2} \leq C_2 \cdot h^2 \left\| u \right\|_{W_2^4},$$

характеризующих высокую точность аппроксимации любой функции соответствующего пространства Соболева, а также ее первой и второй производных. Эти оценки и высокая гладкость кубических сплайнов создают предпосылки для эффективного применения линейных комбинаций созданных здесь ортогональных кубических сплайнов Шенберга, как для непосредственной аппроксимации функций, так и для аппроксимации искомых решений краевых задач, получаемых с помощью вариационно-сеточных или проекционно-сеточных методов [3].

5. Заключение

Согласно полученной здесь оценке (4.2) аппроксимативных свойств модифицированных сплайнов Шенберга последовательность линейных комбинаций сеточных наборов ортогональных кубических сплайнов Шенберга, обладающих свойством относительно высокой гладкости, при стремлении величины шага сетки к нулю сходится к аппроксимируемой функции $u(x)$ с достаточно высокой скоростью.

В данной статье с помощью геометрической процедуры ортогонализации финитных функций [3], развитой и детализированной в статье [6] применительно к кубическим сплайнам Шенберга, построены, с сохранением размеров конечных носителей исходных сплайнов, восемь различных модифицированных материнских кубических сплайнов Шенберга с действительными значениями, порождающих на каждой сетке систему ортогональных кубических сплайнов Шенберга.

Ортогональность сеточных наборов созданных сплайнов, их высокая гладкость и высокая степень аппроксимации, а также наличие у них компактных носителей, порождающих разреженные сеточные матрицы, существенно повышают эффективность алгоритмов вариационно-сеточных методов [3], а также рациональность различных других алгоритмов, например [4, 5], в частности, за счет значительного снижения для них вычислительных затрат.

Ортогональные кубические сплайны Шенберга, полученные в статье [6] с применением вспомогательных ступенчатых функций, а также ортогональные кубические сплайны Шенберга, построенные здесь с помощью вспомогательных кубических сплайнов Шенберга, являются вкладами в теорию ортогональных сплайнов [3] и в общую теорию сплайнов, связанными с обобщениями кубических сплайнов Шенберга, с которых началось развитие теории сплайнов.

Список литературы

1. Schoenberg I. J. Contributions to problem of approximation of equidistant data by analytic functions. *Quart. Appl. Math.* 1946. Vol. 4. P. 45–99, 112–141.

2. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов: Пер. с англ. М.: Мир, 1977. 349 с.

3. Леонтьев В. Л. Ортогональные финитные функции и численные методы. Ульяновск: УлГУ, 2003. 178 с.

4. Леонтьев В. Л., Михайлов И. С. О построении потенциала взаимодействия атомов, основанном на ортогональных финитных функциях // *Нано- и микросистемная техника.* 2011. Т. 9, № 134. С. 48–50.

5. Щуренко А. В., Леонтьев В. Л. Финитные функции в алгоритмах криптографии // *Прикладная дискретная математика.* 2017. № 36. С. 73–83. DOI: 10.17223/20710410/36/6

6. Леонтьев В. Л. Об ортогонализации сплайнов Шенберга // *Журнал Средневолжского математического общества.* 2025. Т. 27, № 2. С. 111–126. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202502.111-126

7. Schoenberg I. J. Spline Functions and the problem of Graduation. *Proceedings of the National Academy of Sciences of USA*. 1964. Vol. 52, no. 4. P. 947–50. DOI: 10.1073/pnas.52.4.947

8. Алексеев В. Г., Суходоев В. А. Полиномиальные B-сплайны Шенберга нечетных степеней. Краткий обзор применений // *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 2012. Т. 52, № 10. С. 1756–1767. DOI: 10.1134/S096554251

9. Алексеев В. Г. B-сплайны Шенберга и их применения в радиотехнике и в смежных с ней дисциплинах // *Радиотехника.* 2003. Т. 12, № 12. С. 21–23.

10. Волков Ю. С., Субботин Ю. Н. 50 лет задаче Шёнберга о сходимости сплайн-интерполяции // *Тр. ИММ УрО РАН.* 2014. Т. 20, № 1. С. 52–67.

11. Марчук Г. И., Агошков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981. 416 с.

Поступила 15.08.2025; доработана после рецензирования 23.09.2025; принята к публикации 26.11.2025

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

References

1. I. J. Schoenberg, "Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions, Part A and B", *Quart. Appl. Math.*, **4**:2 (1946), 45–99, 112–141.

2. G. Strang, G. Fix, *Teoriya metoda konechnih elementov*, Mir, M., 1977 (In Russ.), 349 p.

3. V. L. Leontiev, *Ortogonalnie finitnii funkcii i shislenie metodi*, UlGU, Ulyanovsk, 2003 (In Russ.), 178 p.

4. V. L. Leontiev, I. S. Milhaylov, "About the building the potential of the atomic interaction based on orthogonal finite functions", *Nano- and microsystems technology*, **9**:134 (2011), 48–50 (In Russ.).

5. A. V. Shurenko, V. L. Leontiev, "Finitnie funkcii v algoritmah kriptografii", *Prikladnaia diskretnaia matematika*, **36** (2017), 73–83. DOI: 10.17223/20710410/36/6

6. V. L. Leontiev, "On orthogonalization of Schoenberg splines", *Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva*, **27**:2 (2025), 111–126 (In Russ.). DOI: 10.15507/2079-6900.27.202502.111-126

7. I. J. Schoenberg, "Spline Functions and the problem of Graduation", *Proceedings of the National Academy of Sciences of USA*, **52**:4 (October 1964), 947–950. DOI: 10.1073/pnas.52.4.947

8. V. G. Alekseev, V. A. Suhodoev, "Schoenberg's polynomial B-splines of odd degrees: A brief review of application", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **52**:10 (2012), 1331–1341. DOI: 10.1134/S096554251

9. V. G. Alekseev, "B-splyni Schoenberg i ih primenenia v radiotehnike i v smegnih s ney disciplinah", *Radiotehnika*, **12** (2003), 21–23 (In Russ.).

10. Yu. S. Volkov, Yu. N. Subbotin, "Fifty years of Schoenberg's problem on the convergence of spline interpolation", *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **288**:1 (2015), 222–237. DOI: 10.1134/S0081543815020236

11. G. I. Marchuk, V. I. Agoshkov, *Vvedenie v proektsionno-setochnye metody*, Nauka, M., 1981 (In Russ.), 416 p.

Submitted 15.08.2025; Revised 23.09.2025; Accepted 26.11.2025

The author have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The author declare no conflict of interest.